FÍSICA TEÓRICA

MECÁNICA DE FLUIDOS

LANDAU Y LIFSHITZ

VOLÚMEN 6

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 6

MECÁNICA DE FLUIDOS

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

MECÁNICA DE FLUIDOS

Volumen 6
del
CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
BARCELONA-BOGOTÁ-BUENOS AIRES-CARACAS-MÉXICO

Título de la obra original:
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.
Т. VI. Гидродинамика

Edición original en lengua rusa publicada por:
MEZHDUNARODNAYA KNIGA, MOSCOU

Copyright © MEZHDUNARODNAYA KNIGA.

Versión española por:
Prof. Dr. J. Aguilar Peris
Catedrático de Termología
Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid

y

Prof. Dr. J. De la Rubia Pacheco
Catedrático de Mecánica Estadística
Facultad de Física de la Universidad de Valencia

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36 Fax: (34) 93 419 51 89
E-mail: reverte@reverte.com Internet: http://www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1985

2ª REIMPRESIÓN: ENERO 2001

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN: 84-291-4080-8 Obra completa
ISBN: 84-291-4087-5 Tomo 6

Depósito Legal: SE-3514-2001

Impresión: Publidisa (Sevilla)
www.publidisa.com

PREFACIO A LA EDICIÓN INGLESA

Este libro tiene por objeto el estudio de la mecánica de fluidos, es decir, la teoría del movimiento de los líquidos y los gases.

La naturaleza del libro viene determinada ampliamente por el hecho de que describe la mecánica de fluidos como una rama de la física teórica y, por tanto, es notablemente diferente de otros libros de texto escritos sobre el mismo tema. Hemos intentado desarrollar al máximo posible todas las materias de interés físico y hacerlo de modo que nos ofrezcan la imagen más clara posible de los fenómenos y sus interrelaciones. En consecuencia, no discutiremos métodos aproximados de cálculo en mecánica de fluidos, ni teorías empíricas desprovistas de significado físico. Por otra parte, se tratan algunos tópicos que no se encuentran habitualmente en textos de esta materia: la teoría de la transmisión y difusión del calor en fluidos; acústica; la teoría de la combustión; la dinámica de los superfluidos, y la dinámica relativista de fluidos.

En este campo de la mecánica de fluidos, tan extensamente estudiado, es inevitable que hayan aparecido nuevos resultados durante los últimos años desde que se publicó la última edición rusa. Es lamentable que nuestra preocupación por otras materias nos haya impedido su inclusión en la edición inglesa. Simplemente hemos añadido un capítulo más sobre la teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos.

Agradecemos a los Dres. Sykes y Reid la excelente versión inglesa del libro y a Pergamon Press su conformidad respecto a diferentes cuestiones relacionadas con la publicación.

Moscú

L. D. LANDAU
E. M. LIFSHITZ

NOTACIÓN

ρ densidad
p presión
T temperatura
s entropía por unidad de masa
ϵ energía interna por unidad de masa
$w = \epsilon + p/\rho$ entalpía
$\gamma = c_p/c_v$ cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante
η viscosidad dinámica
$\nu = \eta/\rho$ viscosidad cinemática
κ conductividad térmica
$\chi = \kappa/\rho c_p$ conductividad termométrica
R número de Reynolds
c velocidad del sonido
M cociente entre la velocidad del fluido y la del sonido

Índice analítico

Prefacio a la edición inglesa V
Notación VI

I. Fluidos ideales

§ 1 Ecuación de continuidad 1
§ 2 Ecuación de Euler 3
§ 3 Hidrostática 7
§ 4 Caso en que la convección está ausente 9
§ 5 Ecuación de Bernoulli 11
§ 6 Flujo de energía 12
§ 7 Flujo del impulso 14
§ 8 Conservación de la circulación 16
§ 9 Flujo potencial 18
§ 10 Fluidos incompresibles 22
§ 11 Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo ... 34
§ 12 Ondas de gravedad 41
§ 13 Ondas de gravedad largas 47
§ 14 Ondas en un fluido incompresible 49

II. Fluidos viscosos

§ 15 Ecuación del movimiento de un fluido viscoso 53
§ 16 Disipación de energía en un fluido incompresible 59
§ 17 Flujo en una tubería 61
§ 18 Flujo entre cilindros en rotación 67
§ 19 Ley de semejanza 68
§ 20 Fórmula de Stokes 71
§ 21 Estela laminar 79
§ 22 La viscosidad de las suspensiones 85
§ 23 Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso 88

§ 24 Movimiento oscilante en un fluido viscoso 97
§ 25 Amortiguamiento de las ondas de gravedad 108

III. Turbulencia

§ 26 Estabilidad del flujo estacionario 113
§ 27 Establecimiento de la turbulencia 115
§ 28 Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación 119
§ 29 Estabilidad del flujo en una tubería 123
§ 30 Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales 128
§ 31 Turbulencia totalmente desarrollada 130
§ 32 Turbulencia local 134
§ 33 Correlación de velocidades 138
§ 34 Región de turbulencia y el fenómeno de separación 144
§ 35 Chorro turbulento 146
§ 36 Estela turbulenta 152
§ 37 Teorema de Joukowski 154
§ 38 Turbulencia isótropa 158

IV. Capas límites

§ 39 Capa límite laminar 163
§ 40 Flujo cerca de la línea de separación 170
§ 41 Estabilidad del flujo en una capa límite laminar 176
§ 42 Perfil logarítmico de velocidades 180
§ 43 Flujo turbulento en tuberías 184
§ 44 Capa límite turbulenta 187
§ 45 Crisis de arrastre o resistencia 190
§ 46 Flujo que rodea a cuerpos con forma aerodinámica 194
§ 47 Arrastre inducido 197
§ 48 La sustentación de un ala delgada 203

V. Conducción térmica en los fluidos

§ 49 Ecuación general de la transferencia de calor 207
§ 50 Conducción térmica en un fluido incompresible 213
§ 51 Conducción térmica en un medio infinito 217
§ 52 Conducción térmica en un medio finito 222
§ 53 Ley de semejanza para la transferencia térmica 228
§ 54 Transferencia térmica en una capa límite 232
§ 55 Calentamiento de un cuerpo en un fluido móvil 237
§ 56 Convección libre 240

VI. Difusión

§ 57 Ecuaciones de la dinámica de fluidos para una mezcla 249

§ 58 Coeficientes de transferencia de masa y de difusión térmica 253
§ 59 Difusión de partículas suspendidas en un fluido 258

VII. Fenómenos superficiales

§ 60 Fórmula de Laplace 263
§ 61 Ondas de capilaridad 271
§ 62 Influencia de películas adsorbidas sobre el movimiento de un líquido 276

VIII. Sonido

§ 63 Ondas sonoras 281
§ 64 La energía y el impulso de las ondas sonoras 286
§ 65 Reflexión y refracción de ondas sonoras 291
§ 66 Acústica geométrica 293
§ 67 Propagación del sonido en un medio móvil 297
§ 68 Vibraciones características 301
§ 69 Ondas esféricas 304
§ 70 Ondas cilíndricas 307
§ 71 Solución general de la ecuación de onda 310
§ 72 Onda lateral 314
§ 73 Emisión del sonido 319
§ 74 Principio de reciprocidad 330
§ 75 Propagación de los sonidos en un tubo 333
§ 76 Dispersión del sonido 337
§ 77 Absorción del sonido 341
§ 78 Segunda viscosidad 348

IX. Ondas de choque

§ 79 Propagación de las perturbaciones en un gas móvil 355
§ 80 Flujo estacionario de un gas 358
§ 81 Superficies de discontinuidad 363
§ 82 Choque adiabático 365
§ 83 Ondas de choque débiles 369
§ 84 Sentido de variación de las magnitudes en una onda de choque 372
§ 85 Ondas de choque en un gas perfecto 377
§ 86 Ondas de choque oblicuas 381
§ 87 Espesor de las ondas de choque 386
§ 88 Discontinuidad isoterma 391
§ 89 Discontinuidades débiles 393

X. Flujo gaseoso monodimensional

§ 90 Flujo de un gas a través de una tobera 397
§ 91 Flujo de un gas viscoso en una tubería 401

§ 92 Movimiento de flujo de semejanza monodimensional 404
§ 93 Discontinuidades en las condiciones iniciales 412
§ 94 Ondas móviles monodimensionales 419
§ 95 Formación de discontinuidades en una onda sonora 426
§ 96 Características 432
§ 97 Invariantes de Riemann 437
§ 98 Flujo gaseoso monodimensional arbitrario 441
§ 99 Propagación de ondas de choque intensas 449
§ 100 Teoría del agua poco profunda 452

XI. Intersección de superficies de discontinuidad

§ 101 Ondas de rarefacción 457
§ 102 Intersección de las ondas de choque 464
§ 103 Intersección de ondas de choque con una superficie sólida 469
§ 104 Flujo supersónico alrededor de un ángulo 473
§ 105 Flujo que rodea un obstáculo cónico 479

XII. Flujo gaseoso bidimensional

§ 106 Flujo potencial de un gas 483
§ 107 Ondas simples estacionarias 406
§ 108 Ecuación de Chaplygin: el problema general del flujo gaseoso bidimensional estacionario 492
§ 109 Características de un flujo bidimensional estacionario 496
§ 110 Ecuación de Euler-Tricomi. Flujo transónico 499
§ 111 Soluciones de la ecuación de Euler-Triconi cerca de puntos no singulares de la superficie sónica 505
§ 112 Flujo a la velocidad del sonido 510
§ 113 Intersección de las discontinuidades con la línea de transición 516

XIII. Flujo que rodea a cuerpos finitos

§ 114 Formación de ondas de choque en flujo supersónico que rodea a los cuerpos 523
§ 115 Flujo supersónico que rodea a un cuerpo puntiagudo 526
§ 116 Flujo subsónico que rodea un ala delgada 531
§ 117 Flujo supersónico que rodea un ala 534
§ 118 Ley de la semejanza transónica 537
§ 119 Ley de la semejanza hipersónica 540

XIV. Dinámica de fluidos de la combustión

§ 120 Combustión lenta 543
§ 121 Detonación 550
§ 122 Propagación de una onda de detonación 559

§ 123 Relación existente entre los diversos modos de combustión 567
§ 124 Discontinuidades de condensación 570

XV. Dinámica relativista de fluidos

§ 125 Tensor impulso-energía 575
§ 126 Ecuaciones de la dinámica relativista de fluidos 577
§ 127 Ecuaciones relativistas en el caso de procesos disipativos 583

XVI. Dinámica de superfluidos

§ 128 Propiedades principales de los superfluidos 587
§ 129 Efecto termomecánico 590
§ 130 Ecuaciones de la dinámica de superfluidos 591
§ 131 Propagación del sonido en un superfluido 599

XVII. Fluctuaciones en dinámica de fluidos

§ 132 Teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos 607
§ 133 Fluctuaciones en un medio infinito 611

Índice alfabético 615

CAPÍTULO I

FLUIDOS IDEALES

§ 1. Ecuación de continuidad

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina *dinámica de fluidos*. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas. De acuerdo con ello, cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños, siempre queremos significar aquellos que son «físicamente» infinitamente pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. En un sentido semejante han de entenderse las expresiones *partícula de fluido* y *punto en un fluido*. Si, por ejemplo, hablamos del desplazamiento de alguna partícula fluida, no entendemos entonces el desplazamiento de una molécula individual, sino el de un elemento de volumen que contiene muchas moléculas aunque siga considerándose como un punto.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Como es bien conocido, todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de dos cualesquiera de ellas junto con la ecuación de estado; de aquí que si se tienen cinco magnitudes determinadas, a saber las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$, la presión p y la densidad ρ, queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento.

En general, todas estas magnitudes son funciones de las coordenadas x, y, z y del tiempo t. También resaltamos que $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido en un punto determinado (x, y, z) del espacio y en un instante determinado t; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas fijas del fluido; en el curso del tiempo, estas últimas se estarán moviendo en el espacio. Lo mismo hay que señalar respecto a ρ y p.

Deduciremos a continuación las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Empezaremos con la ecuación que expresa la conservación de la materia. Consideremos un cierto volumen V_0 del espacio. La masa de fluido contenida en este volumen es $\int \rho \, dV$, siendo ρ la densidad del fluido y realizándose la integración respecto al volumen V_0. La masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento df de la superficie que limita a este volumen es $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df}$; el módulo del vector df es igual al área del elemento superficial y su dirección coincide con la normal a la misma. Por convenio, consideraremos que df tiene el sentido normal hacia fuera. Entonces, $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df}$ es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen V_0 en la unidad de tiempo es, por consiguiente,

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df},$$

en donde la integración se extiende a la totalidad de la superficie cerrada que limita el volumen en cuestión.

A continuación, puede escribirse la disminución de la masa del fluido en el volumen V_0 por unidad de tiempo, como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV.$$

Igualando ambas expresiones, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = -\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df}. \tag{1.1}$$

La integral de superficie puede transformarse mediante la fórmula de Green en una integral de volumen:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df} = \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, dV.$$

Así pues,

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe anularse, es decir,

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{1.2}$$

Esta es la denominada *ecuación de continuidad.* Desarrollando la expresión div ($\rho\mathbf{v}$), podemos también escribir (1.2) como

$$\partial\rho/\partial t+\rho \operatorname{div} \mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\rho = 0. \tag{1.3}$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1.4}$$

se denomina *densidad de flujo másico.* Su dirección es la del movimiento del fluido, mientras que su valor o módulo es igual a la masa del fluido que circula por la unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular a la velocidad.

§ 2. Ecuación de Euler

Consideremos cierto volumen del fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo es igual a la integral

$$-\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{f}$$

de la presión, extendida a la superficie que limita el volumen. Transformándola en una integral de volumen, tenemos

$$-\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad}\,p\,\mathrm{d}V.$$

Como puede verse, el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen $\mathrm{d}V$ ejerce sobre el mismo una fuerza $-\mathrm{d}V\,\mathbf{grad}\,p$. En otras palabras, podemos decir que sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza $-\mathbf{grad}\,p$.

A continuación podemos escribir la ecuación del movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza $-\mathbf{grad}\,p$ al producto de la masa por unidad de volumen (ρ) por la aceleración $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$:

$$\rho\,\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = -\mathbf{grad}\,p. \tag{2.1}$$

La derivada $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ que aparece aquí designa, no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada ha de expresarse en función de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio. Para ello observemos que la variación $\mathrm{d}\mathbf{v}$ de la velocidad de la partícula fluida dada durante el tiempo $\mathrm{d}t$ se descompone en dos partes, a saber, la variación durante $\mathrm{d}t$ de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados $\mathrm{d}\mathbf{r}$, siendo $\mathrm{d}\mathbf{r}$ la distancia recorrida por la partícula de fluido dada durante el tiempo $\mathrm{d}t$. La primera parte es $(\partial\mathbf{v}/\partial t)\mathrm{d}t$, en donde se considera que la derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ corres-

ponde a valores x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado de espacio. La segunda parte es

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}.$$

Así pues,

$$d\mathbf{v} = (\partial \mathbf{v}/\partial t)dt + (d\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v},$$

o sea, dividiendo ambos miembros por dt,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Sustituyendo esta expresión en (2.1), nos encontramos con

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\, p. \tag{2.3}$$

Esta es la ecuación requerida del movimiento del fluido. Fue obtenida por primera vez por L. EULER en 1755. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen unidad actúa una fuerza adicional $\rho\mathbf{g}$, siendo $\mathbf{g}$ la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (2.1), de modo que la ecuación (2.3) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{2.4}$$

Al deducir las ecuaciones del movimiento no hemos tenido en cuenta los procesos de disipación de energía que pueden producirse en un fluido en movimiento como consecuencia de la fricción o rozamiento interno (viscosidad) del fluido y el intercambio térmico entre las diferentes partes del mismo. La totalidad del análisis realizado en ésta y en las secciones siguientes de este capítulo es válida, por consiguiente, sólo en el caso de movimientos de fluidos en los que carecen de importancia la conductividad térmica y la viscosidad; dichos fluidos se denominan *ideales*.

La ausencia de intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido (y también, como es natural, entre el fluido y los cuerpos que lo rodean) significa que el movimiento a través del fluido es adiabático. Así pues, el movimiento de un fluido ideal debe suponerse necesariamente que es adiabático.

En el movimiento adiabático la entropía de una partícula cualquiera del fluido permanece constante cuando dicha partícula se mueve en el espacio.

Designando por s la entropía por unidad de masa, podemos expresar la condición correspondiente al movimiento adiabático como

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 0, \tag{2.5}$$

en donde la derivada total respecto al tiempo designa, como en (2.1), la variación respecto al tiempo de la entropía para una partícula fluida determinada cuando ésta se mueve. Dicha condición puede escribirse también

$$\partial s/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s = 0. \tag{2.6}$$

Esta ecuación es la que de modo general describe el movimiento adiabático de un fluido ideal. Utilizando (1.2), podemos escribirla como una «ecuación de continuidad» correspondiente a la entropía:

$$\partial(\rho s)/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho s\mathbf{v}) = 0. \tag{2.7}$$

El producto $\rho s\mathbf{v}$ es la «densidad de flujo de entropía».

Conviene recordar que la ecuación adiabática normalmente puede ponerse en una forma mucho más sencilla. Si, como suele suceder, la entropía es constante a través del volumen del fluido en un instante inicial determinado, sigue manteniendo el mismo valor constante en todo instante durante cualquier movimiento subsiguiente del fluido. En este caso podemos escribir la ecuación adiabática simplemente como:

$$s = \text{constante}, \tag{2.8}$$

que es lo que haremos normalmente en adelante. Dicho movimiento se dice, entonces, que es *isoentrópico.*

Podemos utilizar el hecho de que el movimiento es isoentrópico para poner la ecuación del movimiento (2.3) en una forma ligeramente distinta. Para ella emplearemos la familiar relación termodinámica

$$\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s + V\,\mathrm{d}p,$$

en donde w es la entalpía* por unidad de masa de fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Puesto que s = constante, tenemos simplemente

$$\mathrm{d}w = V\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}p/\rho,$$

y, por tanto, $(\mathbf{grad}\, p)/\rho = \mathbf{grad}\, w$. Por consiguiente, la ecuación (2.3) puede escribirse en la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w. \tag{2.9}$$

* N. del T. — Habitualmente la entalpía se representa por la letra H (o h si es por unidad de masa).

Es interesante señalar otra forma que puede adquirir la ecuación de Euler, en la cual interviene sólo la velocidad. Utilizando una fórmula bien conocida en el análisis vectorial,

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{grad}\,v^2 = \mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v},$$

podemos escribir (2.9) en la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t+\tfrac{1}{2}\mathbf{grad}\,v^2-\mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,w. \tag{2.10}$$

Si tomamos el rotacional de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}) = \ \mathbf{rot}\ (\mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}), \tag{2.11}$$

en la que interviene sólo la velocidad.

Las ecuaciones del movimiento han de suplementarse con las condiciones límites que deben ser satisfechas en las superficies que limitan el fluido. En el caso de un fluido ideal la condición límite expresa simplemente que el fluido no puede penetrar en una superficie sólida. Esto significa que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie límite debe anularse si dicha superficie está en reposo:

$$v_n = 0. \tag{2.12}$$

En el caso general de una superficie móvil, v_n debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles, la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

Como se ha dicho al principio del § 1, el estado de un fluido móvil queda determinado por cinco magnitudes: las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$ y, por ejemplo, la presión p y la densidad ρ. De acuerdo con esto, un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos deberá tener un número de cinco ecuaciones. En el caso de un fluido ideal éstas son las ecuaciones de Euler, la ecuación de continuidad y la ecuación adiabática.

PROBLEMA

Escribir las ecuaciones del movimiento monodimensional de un fluido ideal en función de las variables a, t, siendo a (denominada *variable lagrangiana*†) la cordenada x de una partícula fluida en un momento determinado $t = t_0$.

† Aunque estas variables suelen denominarse *lagrangianas*, debemos mencionar que las ecuaciones del movimiento en estas coordenadas fueron obtenidas en primer lugar por Euler, al mismo tiempo que las ecuaciones (2.3).

Solución. Con estas variables la coordenada x de una partícula fluida cualquiera en un instante también cualquiera se considera como una función de t y de su coordenada a en el instante inicial: $x = x(a, t)$. La condición de conservación de masa durante el movimiento de un elemento de fluido (ecuación de continuidad) se escribe de acuerdo con ello, $\rho\, dx = \rho_0\, da$, o sea,

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0,$$

en donde $\rho_0(a)$ es una distribución de densidad inicial determinada. La velocidad de una partícula fluida es, por definición, $v = (\partial x/\partial t)_a$, y la derivada $(\partial v/\partial t)_a$ da la variación respecto al tiempo de la velocidad de la partícula durante su movimiento. La ecuación de Euler se reduce entonces a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

y la ecuación adiabática es

$$(\partial s/\partial t)_a = 0.$$

§ 3. Hidrostática

En el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de Euler (2.4) toma la forma

$$\mathbf{grad}\, p = \rho \mathbf{g}. \tag{3.1}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido. (Si no existe ninguna fuerza externa, la ecuación del equilibrio es simplemente $\mathbf{grad}\, p = 0$, es decir, $p =$ constante; la presión es la misma en todos los puntos del fluido.)

La ecuación (3.1) puede integrarse inmediatamente si la densidad del fluido puede suponerse constante a través de todo su volumen, es decir, si no existe ninguna compresión significativa del fluido bajo la acción de la fuerza exterior. Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos

$$\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0, \qquad \partial p/\partial z = -\rho g.$$

De aquí

$$p = -\rho g z + \text{constante}.$$

Si el fluido en reposo tiene una superficie libre a una altura h, en la cual se aplica una presión externa p_0, que es la misma en todos sus puntos, dicha superficie debe estar en el plano horizontal $z = h$. A partir de la condición $p = p_0$ para $z = h$, encontramos que la constante es $p_0 + \rho g h$, de modo que

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \tag{3.2}$$

En el caso de masas grandes de líquido, y para un gas, la densidad ρ no puede, en general, suponerse constante; esto se aplica especialmente en los

gases (por ejemplo, la atmósfera). Supongamos que el fluido no solamente está en equilibrio mecánico, sino también en equilibrio térmico. Entonces, la temperatura es la misma en todos su puntos y la ecuación (3.1) puede integrarse del modo siguiente. Utilizamos la relación termodinámica familiar

$$d\Phi = -s dT + V dp,$$

en donde Φ es el potencial termodinámico por unidad de masa.(*) En el caso de temperatura constante

$$d\Phi = V dp = dp/\rho.$$

Es fácil ver que la expresión $(\mathbf{grad}\, p)/\rho$ puede escribirse en este caso como $\mathbf{grad}\,\Phi$, de modo que la ecuación de equilibrio (3.1) toma la forma

$$\mathbf{grad}\,\Phi = \mathbf{g}.$$

En el caso de un vector constante $\mathbf{g}$ dirigido a lo largo del eje z negativo tenemos

$$\mathbf{g} \equiv -\mathbf{grad}(gz).$$

Así pues,

$$\mathbf{grad}(\Phi + gz) = 0,$$

De aquí resulta que en todo el fluido

$$\Phi + gz = \text{constante}; \tag{3.3}$$

gz es la energía potencial de la unidad de masa de fluido en el campo gravitatorio. La condición (3.3) resulta de la física estadística aplicada al equilibrio termodinámico de un sistema en un campo externo.

Podemos mencionar aquí otra consecuencia sencilla de la ecuación (3.1). Si un fluido (como la atmósfera) está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión en él puede ser una función sólo de la altura z (puesto que, si la presión fuese diferente en los distintos puntos con la misma altitud, no estaría en equilibrio). Así resulta a partir de (3.1) que la densidad

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3.4}$$

es también sólo una función de z. La presión y la densidad juntas determinan la temperatura, que es, por tanto, de nuevo una función exclusiva de z. Así pues, en el equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, las distribuciones de presión, densidad y temperatura dependen sólo de la altura.

(*) N. del T. Este potencial suele representarse con el símbolo G en la mayor parte de los textos de termodinámica y se denomina potencial de Gibbs o entalpía libre.

Si, por ejemplo, la temperatura es distinta en los diferentes puntos que tienen la misma altitud, entonces es imposible el equilibrio mecánico.

Finalmente, deduciremos la ecuación de equilibrio para una masa muy grande de fluido, cuyas partes separadas se mantienen reunidas por la atracción gravitatoria — como una estrella. Sea ϕ el potencial gravitatorio newtoniano del campo debido al fluido. Éste satisface la ecuación diferencial

$$\triangle\phi = 4\pi G\rho, \tag{3.5}$$

en donde G es la constante de Newton de la gravitación. La aceleración gravitatoria es $-\mathbf{grad}\,\phi$ y la fuerza sobre una masa ρ es $-\rho\,\mathbf{grad}\,\phi$. La condición del equilibrio es, por tanto,

$$\mathbf{grad}\,p = -\rho\,\mathbf{grad}\,\phi.$$

Dividiendo ambos miembros por ρ, tomando la divergencia de ambos miembros y utilizando la ecuación (3.5), obtenemos

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.6}$$

Debe resaltarse que el estudio actual se refiere sólo al equilibrio mecánico; la ecuación (3.6) no presupone la existencia de un equilibrio térmico completo.

Si el cuerpo no está girando, será esférico cuando esté en equilibrio y las distribuciones de densidad y de presión tendrán simetría esférica. La ecuación (3.6) toma entonces la forma en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.7}$$

§ 4. Caso en que la convección está ausente

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. La ecuación (3.1), que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en todo el seno del fluido. Sin embargo, la cuestión que entonces se plantea es la estabilidad de dicho equilibrio. Se encuentra que el equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. En otro caso, el equilibrio es inestable y esto conduce a la aparición de corrientes en el fluido que tienden a mezclar dicho fluido, de modo tal que se llegue a igualar la temperatura. Este movimiento se denomina *convección*. Así pues, la condición para que un equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección. Esta puede deducirse del modo siguiente.

Consideremos un elemento fluido a una altura z con un volumen específico $V(p, s)$, en donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la

altura z. Supongamos que este elemento fluido sufre un desplazamiento adiabático hacia arriba a lo largo de un pequeño intervalo ξ; su volumen específico se transforma entonces en $V(p', s)$, en donde p' es la presión a la altura $z + \xi$. Para que el equilibrio sea estable, es necesario (aunque no suficiente, en general) que la fuerza resultante sobre el elemento tienda a devolverlo a su posición original. Esto significa que el elemento debe ser más pesado que el fluido que «desplaza» en su nueva posición. El volumen específico de este último es $V(p', s')$, siendo s' la entropía de equilibrio a la altura $z + \xi$. Así pues, tenemos la condición de estabilidad

$$V(p', s') - V(p', s) > 0.$$

Desarrollando esta diferencia en potencias de $s' - s = \xi \mathrm{d}s/\mathrm{d}z$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} > 0. \tag{4.1}$$

Las fórmulas de la termodinámica dan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. Tanto c_p como T son positivos, de modo que (4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} > 0. \tag{4.2}$$

La mayoría de las sustancias se dilatan al calentarse, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$. La condición de que esté ausente la convección se reduce entonces a

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}z > 0, \tag{4.3}$$

es decir, la entropía debe aumentar con la altura.

A partir de este resultado encontramos con facilidad la condición que debe ser satisfecha por el gradiente de temperaturas $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. Desarrollando la derivada $\mathrm{d}s/\mathrm{d}z$, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{c_p}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} > 0.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión dada por (3.4) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -g/V$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} > -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{4.4}$$

Puede producirse la convección si la temperatura disminuye al aumentar la altura y el valor del gradiente de temperaturas excede a $(gT/c_pV)(\partial V/\partial T)_p$.

Si consideramos el equilibrio de una columna de un gas perfecto, entonces

$$(T/V)(\partial V/\partial T)_p = 1,$$

y la condición correspondiente al equilibrio estable es simplemente

$$\mathrm{d}T/\mathrm{d}z > -g/c_p. \tag{4.5}$$

§ 5. Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven grandemente simplificadas en el caso de flujo estacionario. Entendemos por *flujo estacionario* aquél en el cual la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido. En otras palabras, **v** es una función sólo de las coordenadas, de modo que $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$. La ecuación (2.10) se reduce entonces a

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\ \mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w. \tag{5.1}$$

Introduzcamos ahora el concepto de *línea de corriente*. Estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto; quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}. \tag{5.2}$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario deja de cumplirse esta coincidencia: las tangentes a las líneas de corrientes dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

Formemos el producto escalar de la ecuación (5.1) con el vector unitario tangente a la línea de corriente en cada punto; designaremos este vector unidad por **l**. La proyección del gradiente en cualquier dirección es, como sabemos, la derivada en dicha dirección. De aquí que la proyección de **grad** w sea $\partial w/\partial l$. El vector $\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\ \mathbf{v}$ es perpendicular a **v**, y su proyección en la dirección de **l**, por tanto, es cero.

Así pues, obtenemos a partir de la ecuación (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial l}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) = 0.$$

Se deduce a partir de esta expresión que $\frac{1}{2}v^2 + w$ es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\tfrac{1}{2}v^2 + w = \text{constante}. \tag{5.3}$$

En general, la constante toma valores diferentes para las distintas líneas de corriente. La ecuación (5.3) se denomina *ecuación de Bernoulli.*

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración **g** debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (5.1). Consideremos que la dirección de la gravedad es el eje z, creciendo z en el sentido hacia arriba. Entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de **g** y **l** es igual a la derivada $-\mathrm{d}z/\mathrm{d}l$, de modo que la proyección de **g** sobre **l** es

$$-g\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}l.$$

De acuerdo con esto, tenemos ahora

$$\frac{\partial}{\partial l}(\tfrac{1}{2}v^2+w+gz) = 0.$$

Así pues, la ecuación de Bernoulli tiene la siguiente expresión a lo largo de una línea de corriente

$$\tfrac{1}{2}v^2+w+gz = \text{constante}. \tag{5.4}$$

§ 6. Flujo de energía

Escojamos un elemento de volumen cualquiera fijo en el espacio y veamos cómo varía con el tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon,$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la energía interna, siendo ϵ la energía interna por unidad de masa. La variación de esta energía viene dada por la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon).$$

Para calcular esta magnitud escribamos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t},$$

o bien, utilizando la ecuación de continuidad (1.2) y la ecuación del movimiento (2.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p-\rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}.$$

En el último término sustituiremos $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ por $\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,v^2$ y $\mathbf{grad}\,p$ por $\rho\,\mathbf{grad}\,w-\rho T\,\mathbf{grad}\,s$ [utilizando la relación termodinámica $\mathrm{d}w = T\mathrm{d}s + (1/\rho)\mathrm{d}p$], con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,(\tfrac{1}{2}v^2+w)+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s.$$

Con objeto de transformar la derivada $\partial(\rho\epsilon)/\partial t$, utilizaremos la relación termodinámica

$$\mathrm{d}\epsilon = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}V = T\mathrm{d}s + (p/\rho^2)\mathrm{d}\rho.$$

Puesto que $\epsilon + p/\rho = \epsilon + pV$ es simplemente la función entalpía w por unidad de masa, encontramos que

$$\mathrm{d}(\rho\epsilon) = \epsilon\mathrm{d}\rho + \rho\mathrm{d}\epsilon = w\mathrm{d}\rho + \rho T\mathrm{d}s,$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s.$$

También hemos utilizado aquí la ecuación adiabática general (2.6).

Combinando los resultados anteriores, encontramos que la variación de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -(\tfrac{1}{2}v^2 + w)\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}(\tfrac{1}{2}v^2 + w),$$

o sea, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\mathrm{div}\,[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)]. \tag{6.1}$$

Con objeto de ver el significado de esta ecuación, integrémosla respecto a un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon)\,\mathrm{d}V = -\int \mathrm{div}\,[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)]\,\mathrm{d}V,$$

o bien, convirtiendo la integral de volumen en el segundo miembro en una integral de superficie,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon)\,\mathrm{d}V = -\oint \rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)\cdot\mathrm{d}\mathbf{f}. \tag{6.2}$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de energía que fluye hacia el exterior de este volumen en la unidad de tiempo. De aquí que la expresión

$$\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) \tag{6.3}$$

pueda denominarse vector *densidad de flujo de energía.* Su módulo es la cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular a la dirección de la velocidad.

La expresión (6.3) muestra que cualquier masa unitaria de fluido lleva consigo durante su movimiento una cantidad de energía $w + \frac{1}{2}v^2$. El hecho

de que la entalpía w aparezca aquí en lugar de la energía ϵ, tiene un significado físico sencillo. Haciendo $w = \epsilon + p/\rho$, podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada en la forma

$$-\oint \rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2+\epsilon)\cdot d\mathbf{f} - \oint p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}.$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie en la unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

§ 7. Flujo del impulso

Consideremos ahora una serie semejante de razonamientos para el impulso o cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es $\rho\mathbf{v}$. Determinemos su variación respecto al tiempo, $\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t$. Para ello utilizaremos la notación tensorial.† Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}v_i.$$

Utilizando la ecuación de continuidad (1.2) [con $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$ escrita en la forma $\partial(\rho v_k)/\partial x_k$]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k},$$

y la ecuación de Euler (2.3) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}\\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k).\end{aligned}$$

† Los sufijos latinos i, k, ..., toman los valores 1, 2, 3, correspondientes a los componentes de los vectores y tensores a lo largo de los ejes x, y, z, respectivamente. Escribiremos las sumas del tipo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \Sigma A_iB_i$ en la forma A_iB_i simplemente, omitiendo el signo de la suma. Utilizaremos un procedimiento semejante en todos los productos en los que intervengan vectores o tensores: se debe sobreentender siempre la suma respecto a los valores 1, 2, 3, cuando aparezca duplicado un sufijo latino en un término cualquiera. Dichos sufijos, a veces, se denominan *mudos*. Al trabajar con sufijos mudos debe recordarse que puede sustituirse cualquier par de dichos sufijos por otro par de letras semejantes, ya que la notación utilizada en el caso de sufijos que pueden tomar todos sus valores posibles no influye evidentemente sobre el valor de la suma.

Escribiremos el primer término del segundo miembro en la forma†

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k},$$

y se obtiene, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7.1}$$

viniendo definido el tensor Π_{ik} como

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{7.2}$$

Este tensor es claramente simétrico.

Para ver el significado del tensor Π_{ik}, integremos la ecuación (7.1) respecto a un volumen determinado:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, \mathrm{d}V = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V.$$

La integral del segundo miembro se transforma en una integral de superficie mediante la fórmula de Green:‡

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, \mathrm{d}V = -\oint \Pi_{ik}\, \mathrm{d}f_k. \tag{7.3}$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente i del impulso contenido en el volumen considerado. La integral de superficie del segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de impulso que fluye hacia fuera a través de la superficie límite en la unidad de tiempo. En consecuencia, $\Pi_{ik}\mathrm{d}f_k$ es la componente i del impulso que fluye a través del elemento superficial $\mathrm{d}f$. Si escribimos $\mathrm{d}f_k$ en la forma $n_k\,\mathrm{d}f$, siendo $\mathrm{d}f$ el área del elemento superficial y $\mathbf{n}$ un vector unidad a lo largo de la normal y dirigido hacia fuera, veremos que $\Pi_{ik}n_k$ es el flujo de la componente i del impulso a través del área superficial unidad. Podemos observar, además, que, de acuerdo con (7.2), $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$. Esta expresión puede escribirse en forma vectorial

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}). \tag{7.4}$$

Así pues, Π_{ik} es la componente i de la cantidad de impulso que fluye en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular al eje x_k. El

† δ_{ik} designa el tensor unidad, es decir, el tensor con componentes que son la unidad para $i = k$ y cero para $i \neq k$. Es evidente que $\delta_{ik}A_k = A_i$, siendo A_i un vector cualquiera. Análogamente, si A_{kl} es un tensor de rango dos, tenemos las relaciones $\delta_{ik}A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik}A_{ik} = A_{ii}$, y así sucesivamente.

‡ La regla para transformar una integral extendida a una superficie cerrada en otra aplicada al volumen limitado por dicha superficie puede formularse así: debe sustituirse el elemento de superficie df_i por el operador $\mathrm{d}V \cdot \partial/\partial x_i$, que ha de aplicarse a la totalidad del integrando.

tensor Π_{ik} se denomina *tensor de densidad de flujo de impulso.* El flujo de energía queda determinado por un vector, siendo la energía un escalar; sin embargo, el flujo de impulso viene determinado por un tensor de orden dos, puesto que el propio impulso es un vector.

El vector (7.4) da el flujo de impulso en la dirección de **n**, es decir, a través de una superficie perpendicular a **n**. En particular, tomando el vector unidad **n** dirigido paralelamente a la velocidad del fluido, veremos que sólo la componente longitudinal del impulso se ve transportada en dicha dirección y su densidad de flujo es $p + \rho v^2$. En una dirección perpendicular a la velocidad, sólo se transporta la componente transversal (relativa a **v**) del impulso, siendo su densidad de flujo exactamente p.

§ 8. Conservación de la circulación

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

extendida a lo largo de cierto contorno cerrado se denomina *circulación de la velocidad* alrededor de dicho contorno.

Consideremos un contorno cerrado dibujado en el fluido en un instante determinado. Supongamos que sea un «contorno fluido», es decir, compuesto por partículas fluidas que están sobre él mismo. En el curso del tiempo estas partículas se mueven y el contorno se mueve con ellas. Investiguemos lo que le ocurre a la circulación de la velocidad. En otras palabras, calculemos la derivada respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Hemos escrito aquí la derivada total respecto del tiempo, puesto que estamos buscando la variación de la circulación a lo largo de un «contorno fluido» cuando éste se mueve y no a lo largo de un contorno fijo en el espacio.

Para evitar confusiones, designaremos temporalmente la derivación respecto a las coordenadas mediante el símbolo δ, manteniendo el símbolo d para la derivación respecto al tiempo. A continuación, observemos que un elemento $d\mathbf{l}$ de la longitud del contorno puede escribirse como la diferencia $\delta\mathbf{r}$ entre los radios vectores **r** de los puntos situados en los extremos del elemento. Así pues, escribamos la circulación de la velocidad como $\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}$. Al derivar esta integral respecto al tiempo, debe tenerse en cuenta que varía no sólo la velocidad, sino también el propio contorno (es decir, su forma).

De aquí que al tomar la derivada temporal bajo el signo integral debemos derivar no solamente **v**, sino también $\delta\mathbf{r}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Como la velocidad **v** es precisamente la derivada respecto al tiempo del radio vector **r**, tenemos

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\cdot\delta\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} = \delta(\tfrac{1}{2}v^2).$$

La integral de una diferencia total a lo largo de un contorno cerrado es, sin embargo, cero. Por consiguiente, la segunda integral se anula dejando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\mathbf{r}.$$

Ahora queda sólo sustituir la aceleración $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ por su expresión obtenida en (2.9):

$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = -\mathbf{grad}\, w.$$

Utilizando la fórmula de Stokes, tenemos entonces

$$\oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \mathbf{rot}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\delta\mathbf{f} = 0,$$

puesto que $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, w \equiv 0$. Así pues, volviendo a nuestra notación previa, encontramos†

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = 0,$$

o bien

$$\oint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \text{constante}. \tag{8.1}$$

Por consiguiente, hemos llegado a la conclusión de que en un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno «fluido» cerrado es constante en el tiempo (*teorema de Kelvin* o *ley de conservación de la circulación*).

Debe resaltarse que se ha obtenido este resultado mediante el empleo de la ecuación de Euler en la forma (2.9) y, por consiguiente, en ella interviene la hipótesis de que el flujo es isoentrópico. El teorema no es válido para flujos que no sean isoentrópicos.‡

† Este resultado sigue siendo válido en un campo gravitatorio uniforme, ya que en este caso $\mathbf{rot}\,\mathbf{g} \equiv 0$.

‡ Matemáticamente resulta necesaria una relación biunívoca entre p y ρ [que en el caso de un flujo isoentrópico es $s(p, \rho) = \text{constante}$]; entonces, puede escribirse $-(1/\rho)\,\mathbf{grad}\, p$ como el gradiente de una función determinada, resultado imprescindible para deducir el teorema de Kelvin.

§ 9. Flujo potencial

A partir de la ley de conservación de circulación podemos obtener un resultado importante. Supongamos primero que el flujo es estacionario y consideremos una línea de corriente de la cual sabemos que $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{rot}\, \mathbf{v}$ (la *vorticidad*) es cero en un punto determinado. Dibujemos un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en dicho punto. Según el teorema de Stokes, la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier contorno infinitesimalmente pequeño es igual a $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{df}$, siendo $\mathbf{df}$ el elemento de área encerrado por el contorno. Puesto que el contorno que estamos considerando en este momento está situado en un punto en el cual $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, la circulación de la velocidad a lo largo del mismo es cero. En el transcurso del tiempo, este contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y siempre rodea a la misma línea de corriente. Puesto que la circulación de la velocidad debe permanecer constante, es decir, cero, se deduce que $\boldsymbol{\omega}$ debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

Así llegamos a la conclusión de que si en un punto cualquiera de la línea de corriente $\boldsymbol{\omega} = 0$, esto es cierto también en los demás puntos de dicha línea de corriente. Si el flujo no es estacionario, el mismo resultado es válido excepto que en lugar de una línea de corriente podemos considerar la trayectoria que describe en el curso del tiempo una partícula de fluido particular;‡ recordemos que en flujos no estacionarios estas trayectorias no coinciden, en general, con las líneas de corriente.

A primera vista parece posible basar sobre este resultado el siguiente argumento. Consideremos que el flujo estacionario está pasando alrededor de un cuerpo determinado. Y que el flujo incidente es uniforme en el infinito; su velocidad $\mathbf{v}$ es una constante, de modo que $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ en todas las líneas de corriente. De aquí que concluyamos que $\boldsymbol{\omega}$ es cero a lo largo de la totalidad de cada línea de corriente, es decir, en todo el espacio.

Un flujo en el cual $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todo el espacio se denomina *flujo potencial* o *flujo irrotacional*, en oposición al *flujo rotacional*, en el cual la vorticidad no es nula en todos los puntos. Así pues, llegamos a la conclusión de que si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial.

Análogamente, podemos razonar del modo siguiente, mediante la ley de conservación de la circulación. Supongamos que en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera del

‡ Para evitar malas interpretaciones, debemos señalar que este resultado carece de significado en el flujo turbulento (ver capítulo III). Podemos también indicar que puede producirse una vorticidad no nula en una línea de corriente después del paso de una onda de choque. Veremos que esto se debe a que el flujo ya no es isoentrópico y no puede entonces deducirse la ley de conservación de la circulación (§ 106).

fluido es nula.† Según el teorema de Kelvin, llegamos a la conclusión de que esto será válido en un instante futuro cualquiera, es decir, encontraremos que, si existe un flujo potencial en un instante determinado, entonces existe un flujo potencial en todos los instantes siguientes (en particular, cualquier flujo para el cual el fluido esté inicialmente en reposo debe ser un flujo potencial). Esto está de acuerdo con el hecho de que, si $\omega = 0$, la ecuación (2.11) se ve idénticamente satisfecha.

Sin embargo, de hecho, todas estas conclusiones son solamente de una validez muy limitada. La razón es que la prueba dada anteriormente de que $\omega = 0$ a lo largo de una línea de corriente es, estrictamente hablando, inválida para una línea que está en la superficie de un sólido junto al cual está circulando el flujo, puesto que la presencia de esta superficie hace imposible dibujar un contorno cerrado en el fluido que rodee dicha línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento de un fluido ideal admiten soluciones, por tanto, en las cuales se produce una *separación* en la superficie del cuerpo: las líneas de corriente, que han seguido la superficie del cuerpo durante cierta distancia, empiezan a separarse de ellas en un punto determinado y continúan dentro del fluido. El esquema del flujo resultante está caracterizado por la presencia de una «superficie de discontinuidad tangencial» que sale del cuerpo; en esta superficie la velocidad, que es en todas partes tangencial en las dos superficies, tiene una discontinuidad. En otras palabras, en esta superficie una capa del fluido «desliza» sobre otra. La figura 1 muestra una superficie de discontinuidad que separa el fluido que está moviéndose en una región de otra con fluido estacionario detrás del cuerpo. Desde el punto de vista matemático, la discontinuidad en la componente de velocidad tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad es nula.

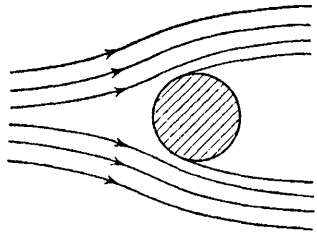

FIG. 1

† Hemos supuesto por sencillez que el fluido ocupa una región del espacio simplemente conexa. En el caso de un dominio múltiple conexo se obtendrá el mismo resultado final, pero en los razonamientos a realizar habría que precisar algunas restricciones en la selección de los contornos.

Cuando se incluyen dichos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal no es única: además del flujo continuo admiten también un número infinito de soluciones que poseen superficies de discontinuidad tangencial partiendo desde cualquier línea prescrita en la superficie del cuerpo por el cual está circulando el flujo en cuestión. Sin embargo, debe resaltarse que carecen de significado físico todas estas soluciones discontinuas, puesto que las discontinuidades tangenciales son totalmente inestables y, por consiguiente, el flujo se haría, de hecho, turbulento (ver capítulo III).

El problema físico real del flujo que pasa a lo largo de un cuerpo tiene, como es natural, una solución única. La razón es que los fluidos ideales no existen realmente; cualquier fluido real tiene una cierta viscosidad, aunque sea muy pequeña. Esta viscosidad puede carecer prácticamente de efectos sobre el movimiento de la mayor parte del fluido, pero, sin importar lo pequeño que éste sea, resultará importante en una capa delgada de fluido junto al cuerpo. Las propiedades del flujo en esta *capa límite* deciden la selección de una de las infinitas soluciones de las ecuaciones del movimiento correspondientes a un fluido ideal. Así resulta que, en el caso general del flujo que rodea a un cuerpo de forma arbitraria, deben rechazarse las soluciones con separación; si se produjese la separación daría como resultado la turbulencia.

A pesar de lo que hemos dicho hasta ahora, el estudio de las soluciones de las ecuaciones del movimiento para un flujo potencial estacionario continuo que circula junto a cuerpos tiene en algunos casos un interesante significado. Aunque, en el caso general del flujo que rodea a cuerpos de forma arbitraria, el flujo real apenas tiene relación con el esquema del flujo potencial, en el caso de cuerpos de formas especiales («aerodinámicas» — ver § 46) pueden diferir muy poco de un flujo potencial; con más precisión, se da un flujo potencial, excepto en una capa delgada de fluido en la superficie del cuerpo y en una «estela» relativamente estrecha detrás del mismo.

Otro caso importante de flujo potencial se presenta cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. Es fácil demostrar que, si la amplitud a de las oscilaciones son pequeñas en comparación con la dimensión l del cuerpo ($a \ll l$), el flujo que circula junto al cuerpo será flujo potencial. Para demostrarlo estimaremos el orden de magnitud de los diversos términos de la ecuación de Euler

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w.$$

La velocidad $\mathbf{v}$ varía apreciablemente (en una cantidad del mismo orden que la velocidad $\mathbf{u}$ del cuerpo oscilante) a lo largo de una distancia del orden de la dimensión l del cuerpo. De aquí que las derivadas de $\mathbf{v}$ respecto a las coordenadas son del orden de u/l. El orden de magnitud de la propia $\mathbf{v}$ (a distancias relativamente pequeñas del cuerpo) queda determinado por el

valor de **u**. Así pues, tenemos $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} \sim u^2/l$. La derivada $\partial \mathbf{v}/\partial t$ es del orden de ωu, siendo ω la frecuencia de las oscilaciones. Puesto que $\omega \sim u/a$, tenemos que $\partial \mathbf{v}/\partial t \sim u^2/a$. Se deduce, por tanto, a partir de la desigualdad $a \ll l$ que el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ es pequeño en comparación con $\partial \mathbf{v}/\partial t$ y puede despreciarse, de modo que la ecuación de movimiento del fluido se reduce a $\partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{grad}\, w$. Tomando el rotacional de ambos miembros, obtenemos $\partial(\mathbf{rot}\, \mathbf{v})/\partial t = 0$, y, por tanto, $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} =$ constante. Sin embargo, en el movimiento oscilante, el promedio temporal de la velocidad es cero y, por consiguiente, $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} =$ constante implica que $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 0$. Así pues, el movimiento de un fluido que realiza pequeñas oscilaciones es un flujo potencial en primera aproximación.

Obtendremos ahora algunas propiedades generales del flujo potencial. Recordemos primeramente que la deducción de la ley de conservación de la circulación y, por lo tanto, todas sus consecuencias, se basaron en la hipótesis de que el flujo era isoentrópico. Si el flujo no es isoentrópico, la ley deja de cumplirse y, por consiguiente, aunque tengamos un flujo potencial en un instante determinado, la vorticidad será, en general, no nula en instantes siguientes. Así pues, únicamente el flujo isoentrópico puede, de hecho, ser flujo potencial.

De acuerdo con el teorema de Stokes,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f},$$

en donde la integral del segundo miembro se extiende a una superficie limitada por el contorno en cuestión. De aquí vemos que, en el flujo potencial, la circulación de la velocidad alrededor de cualquier contorno cerrado es nula:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{9.1}$$

Se deduce a partir de esto que, en particular, no pueden existir líneas de corriente cerradas en el flujo potencial.† Porque, ya que la dirección de una línea de corriente es en todo punto la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de dicha línea no puede nunca ser nula.

En el movimiento rotacional la circulación de la velocidad es, en general, no nula. En este caso pueden existir líneas de corriente cerradas, pero debe resaltarse que la presencia de líneas de corriente cerradas no es una propiedad necesaria del movimiento rotacional.

Del mismo modo que cualquier campo vectorial que posee un rotacional cero, la velocidad en el flujo de potencial puede expresarse como el gra-

† Este resultado, como el (19.1), puede que no sea válido en un dominio múltiple conexo del espacio. En el flujo potencial en una región como esta, la circulación de la velocidad puede ser no nula si el contorno cerrado a lo largo del cual se calcula no puede contraerse a un punto sin cortar los límites del dominio.

diente de un escalar. Este escalar se denomina *potencial de velocidad*, y lo designaremos por ϕ:

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi. \tag{9.2}$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma (2.10)

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + \tfrac{1}{2}\mathbf{grad}\,v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,w$$

y sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$, tenemos

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}v^2 + w\right) = 0,$$

de aquí que

$$\partial\phi/\partial t + \tfrac{1}{2}v^2 + w = f(t), \tag{9.3}$$

siendo $f(t)$ una función arbitraria del tiempo. Esta ecuación es una primera integral de las ecuaciones del flujo potencial. La función $f(t)$ de la ecuación (9.3) puede ponerse igual a cero sin pérdida de generalidad. Puesto que la velocidad es la derivada espacial de ϕ, podemos sumar a ϕ cualquier función del tiempo; sustituyendo ϕ por $\phi + \int f(t)\mathrm{d}t$, obtenemos cero en el segundo miembro de (9.3).

En el caso de flujo estacionario tenemos (considerando que el potencial ϕ es independiente del tiempo) $\partial\phi/\partial t = 0$, $f(t) =$ constante y (9.3) se transforma en la ecuación de Bernoulli:

$$\tfrac{1}{2}v^2 + w = \text{constante}. \tag{9.4}$$

Puede señalarse que existe una diferencia importante entre la ecuación de Bernoulli para el flujo potencial y la correspondiente a otros flujos. En el caso general, la constante del segundo miembro es invariable a lo largo de cualquier línea de corriente dada, pero es diferente para las distintas líneas de corriente. Sin embargo, en el flujo potencial es constante en todo el fluido. Esto resalta la importancia de la ecuación de Bernoulli en el estudio del flujo potencial.

§ 10. Fluidos incompresibles

En un gran número de casos de flujo de líquidos (y también de gases), su densidad puede suponerse invariable, es decir, constante en todo el volumen del fluido y a lo largo de todo su movimiento. En otras palabras, no existe ninguna compresión o dilatación observable del fluido en dichos casos. Hablamos entonces de un *flujo incompresible.*

Las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos se simplifican mucho en el caso de un fluido incompresible. Es cierto que la ecuación de Euler

resulta sin variación si ponemos ρ = constante, excepto que ρ puede entonces incluirse bajo el operador gradiente de la ecuación (2.4):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g}. \tag{10.1}$$

La ecuación de continuidad, por otra parte, toma para ρ constante la forma simple

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \tag{10.2}$$

Como la densidad deja de ser una función desconocida como lo era en el caso general, el sistema fundamental de ecuaciones de la dinámica de fluidos incompresibles puede considerarse como ecuaciones en las que interviene la velocidad sólo. Éstas pueden ser la ecuación de continuidad (10.2) y la ecuación (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}). \tag{10.3}$$

La ecuación de Bernoulli puede escribirse en una forma más sencilla en el caso de un fluido incompresible. La ecuación (10.1) difiere de la ecuación de Euler (2.9), en general, en que hay que escribir $\mathbf{grad}\,(p/\rho)$ en lugar de $\mathbf{grad}\,w$. De aquí que podamos escribir la ecuación de Bernoulli inmediatamente sustituyendo simplemente la entalpía en (5.4) por p/ρ:

$$\tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho + gz = \text{constante}. \tag{10.4}$$

En el caso de un fluido incompresible, podemos también escribir p/ρ en lugar de w en la expresión (6.3) que nos da el flujo de energía, el cual resulta entonces

$$\rho\mathbf{v}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right). \tag{10.5}$$

Como sabemos, a partir de una bien conocida relación termodinámica, la expresión $d\epsilon = Tds - pdV$ corresponde a la variación de la energía interna; en el caso de s = constante y $V = 1/\rho$ = constante, resulta $d\epsilon = 0$, es decir, ϵ = constante. Puesto que los términos constantes en la energía carecen de importancia, podemos omitir ϵ en $w = \epsilon + p/\rho$.

Las ecuaciones son particularmente sencillas en el caso del flujo potencial de un fluido incompresible. La ecuación (10.3) se ve satisfecha idénticamente si $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$. La ecuación (10.2), con la sustitución $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi$, se transforma en

$$\triangle\phi = 0, \tag{10.6}$$

es decir, es la ecuación de Laplace† para el potencial ϕ. Esta ecuación debe

† El potencial de velocidad fue introducido primeramente por EULER, que obtuvo una ecuación de la forma (10.6); esta fórmula se conoció después por *ecuación de Laplace*.

suplementarse mediante condiciones límites en la superficie donde el fluido se encuentra con cuerpos sólidos. En las superficies sólidas fijas, la componente de velocidad del fluido v_n normal a la superficie debe ser nula, mientras que en el caso de superficies móviles debe ser igual a la componente normal de la velocidad de la superficie (que es una función determinada del tiempo). Sin embargo, la velocidad v_n es igual a la derivada normal del potencial ϕ: $v_n = \partial\phi/\partial n$. Así pues, las condiciones límites generales son que $\partial\phi/\partial n$ es una función determinada de las coordenadas y del tiempo en los límites.

En el caso del flujo potencial, la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (9.3). En un fluido incompresible, podemos sustituir w por p/ρ:

$$\partial\phi/\partial t + \tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho = f(t). \tag{10.7}$$

Podemos observar aquí la siguiente propiedad importante del flujo potencial de un fluido incompresible. Supongamos que un cuerpo sólido se está moviendo a través del fluido. Si el resultado es un flujo potencial, en un instante cualquiera depende sólo de la velocidad del cuerpo móvil en dicho instante y no, por ejemplo, de su aceleración. La ecuación (10.6) no contiene explícitamente el tiempo, el cual entra en la solución sólo a través de las condiciones límites y éstas contienen sólo la velocidad del cuerpo móvil.

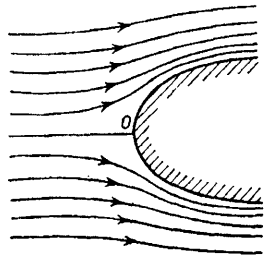

FIG. 2

A partir de la ecuación de Bernoulli, $\frac{1}{2}v^2 + p/\rho = \text{constante}$, vemos que, en el flujo estacionario de un fluido incompresible (no en un campo gravitatorio), la presión más alta se presenta en puntos en donde la velocidad es nula. Dicho punto normalmente se presenta en la superficie de un cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (en el punto O de la figura 2) que se llama *punto de estancamiento*. Si $\mathbf{u}$ es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad del fluido en el infinito) y p_0 la presión en el infinito, la presión en el punto de estancamiento es

$$p_{\max} = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho u^2. \tag{10.8}$$

Si la distribución de velocidades en un fluido móvil depende solamente de dos coordenadas (por ejemplo, x e y), y la velocidad es en todas partes paralela al plano xy, el flujo se dice que es *bidimensional* o *flujo plano*. Para resolver problemas de flujo bidimensional de un fluido incompresible es, a veces, conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina la *función de corriente*. A partir de la ecuación de continuidad $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$, vemos que las componentes de la velocidad pueden escribirse como las derivadas

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \qquad v_y = -\partial\psi/\partial x \tag{10.9}$$

de cierta función $\psi(x, y)$, denominada función de corriente. La ecuación de continuidad se ve satisfecha entonces automáticamente. La ecuación que debe satisfacerse por la función de corriente se obtiene sustituyendo (10.9) en la ecuación (10.3). Obtenemos entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\triangle\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\triangle\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\triangle\psi = 0. \tag{10.10}$$

Si conocemos la función de corriente podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario. La ecuación diferencial de las líneas de corrientes (en flujo bidimensional) es $dx/v_x = dy/v_y$, o sea, $v_y\,dx - v_x\,dy = 0$; expresa el hecho de que la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (10.9), tenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi = 0,$$

de aquí que $\psi =$ constante. Así pues, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenida haciendo la función de corriente $\psi(x, y)$ igual a una constante arbitraria.

Si dibujamos una curva entre dos puntos A y B en el plano xy, el flujo de masa Q a través de esta curva viene dada por la diferencia de los valores de la función de corriente en estos dos puntos, independientemente de la forma de la curva. Porque, si v_n es la componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, tenemos

$$Q = \rho\int_A^B v_n\,dl = \rho\int_A^B(-v_y\,dx + v_x\,dy) = \rho\int_A^B d\psi,$$

o sea,

$$Q = \rho(\psi_B - \psi_A). \tag{10.11}$$

Existen métodos poderosos para resolver problemas de un flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de

diversos perfiles, en los que interviene la aplicación de la teoría de funciones de una variable compleja.† La base de estos métodos es la siguiente. La función potencial y la corriente están relacionadas con las componentes de velocidad por

$$v_x = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \qquad v_y = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

Estas relaciones entre las derivadas de ϕ y ψ son, sin embargo, matemáticamente las mismas que las bien conocidas condiciones de Cauchy-Riemann para que una expresión compleja

$$w = \phi + i\psi \tag{10.12}$$

sea una función analítica del argumento complejo $z = x + iy$. Esto significa que la función $w(z)$ tiene en cada punto una derivada bien definida

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \tag{10.13}$$

La función w se denomina *potencial complejo* y $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ la *velocidad compleja*. El módulo y argumento de esta última dan el módulo v de la velocidad y el ángulo θ formado por la dirección de la velocidad con el eje x:

$$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = ve^{-i\theta}. \tag{10.14}$$

En una superficie sólida, alrededor de la cual tiene lugar el flujo, la velocidad debe estar dirigida sobre la tangente. Es decir, el contorno del perfil de la superficie debe ser una línea de corriente, o sea, ψ = constante a lo largo de la misma; la constante puede considerarse como cero y entonces el problema del flujo que rodea un contorno determinado se reduce a la determinación de una función analítica $w(z)$ que tome valores reales en el contorno. El enunciado del problema es más complicado cuando el fluido tiene una superficie libre; se encuentra un ejemplo de este tipo en el problema 9.

Como sabemos, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier contorno cerrado C es igual a $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función en sus polos simples en el interior de C; de aquí,

$$\oint w'\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k A_k,$$

siendo A_k los residuos de la velocidad compleja. Tenemos también

$$\oint w'\,\mathrm{d}z = \oint (v_x - iv_y)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \oint (v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y) + i\oint (v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x).$$

† Para una descripción más detallada de estos métodos y de sus diversas aplicaciones, ver N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. ROZE, *Hidromecánica teórica*, parte 1, 4.ª ed., Moscú, 1948; L. I. SEDOV, *Problemas bidimensionales de hidrodinámica y aerodinámica*, Moscú, 1950.

La parte real de esta expresión es precisamente la circulación de la velocidad Γ a lo largo del contorno C. La parte imaginaria, multiplicada por ρ, es el flujo de masa que atraviesa C; si no existen fuentes de fluido dentro del contorno, este flujo es cero y entonces tenemos simplemente

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k; \tag{10.15}$$

siendo en este caso todos los residuos A_k imaginarios puros.

Finalmente, consideremos las condiciones en las que puede considerarse el fluido como incompresible. Cuando la presión varía adiabáticamente en Δp, la densidad varía en $\Delta\rho = (\partial\rho/\partial p)_s \Delta p$. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, Δp es del orden de ρv^2 en flujo estacionario. Así pues, $\Delta\rho \sim (\partial\rho/\partial p)_s \rho v^2$. Demostraremos en § 63 que la derivada $(\partial p/\partial\rho)_s$ es el cuadrado de la velocidad c del sonido en el fluido, de modo que $\Delta\rho \sim \rho v^2/c^2$. El fluido puede considerarse como incompresible si $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Vemos que una condición necesaria para que se cumpla esto es que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido:

$$v \ll c. \tag{10.16}$$

No obstante, esta condición es suficiente sólo en flujo estacionario. En un flujo no estacionario, debe cumplirse otra condición adicional. Sean τ y l un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en los que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Si son comparables los términos $\partial\mathbf{v}/\partial t$ y $(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p$ en la ecuación de Euler, encontramos, en órdenes de magnitud, $v/\tau \sim \Delta p/l\rho$ o $\Delta p \sim l\rho v/\tau$, y la variación correspondiente en ρ es $\Delta\rho \sim l\rho v/\tau c^2$. Comparando a continuación los términos $\partial\rho/\partial t$ y $\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ en la ecuación de continuidad, vemos que puede despreciarse la derivada $\partial\rho/\partial t$ (es decir, puede suponerse que ρ es constante) si $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$, o sea,

$$\tau \gg l/c. \tag{10.17}$$

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (10.16) y (10.17) puede considerarse que el fluido es incompresible. La condición (10.17) tiene un significado evidente: el tiempo l/c que emplea una señal sonora en recorrer la distancia l debe ser pequeño en comparación con el tiempo τ durante el cual varía apreciablemente el flujo, de modo que la propagación de las interacciones en el fluido pueda considerarse como instantánea.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de la superficie de un fluido incompresible sometido a un campo gravitatorio y contenido en un recipiente cilíndrico que gira alrededor de su eje (vertical) con una velocidad angular constante Ω.

Solución. Consideremos el eje del cilindro como el eje z. Entonces, $v_x = -y\Omega$, $v_y = +x\Omega$, $v_z = 0$. La condición de continuidad se satisface idénticamente y la ecuación de Euler (10.1) da

$$x\Omega^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad y\Omega^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

La integral general de estas ecuaciones es

$$p/\rho = \tfrac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - gz + \text{constante}.$$

En la superficie libre p = constante, de modo que la superficie es un paraboloide:

$$z = \tfrac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2)/g,$$

habiéndose tomado el origen en el punto más bajo de la superficie.

Problema 2. Una esfera, de radio R, se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ dentro de un fluido ideal incompresible. Determinar el flujo potencial del fluido cuando la esfera se mueve.

Solución. La velocidad del fluido debe anularse en el infinito. Las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$ que se anulan en el infinito se sabe que son del tipo $1/r$ más las derivadas, de diversos órdenes, de $1/r$ con respecto a las coordenadas (se toma el origen en el centro de la esfera). Teniendo en cuenta la simetría completa de la esfera, sólo puede aparecer en la solución un vector constante, la velocidad $\mathbf{u}$, y de acuerdo con la linealidad tanto de la ecuación de Laplace como de la condición límite, en ϕ debe aparecer $\mathbf{u}$ linealmente. El único escalar que puede formarse con $\mathbf{u}$ y las derivadas de $1/r$ es el producto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}(1/r)$. Por consiguiente, buscaremos ϕ de modo que cumpla la condición:

$$\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}(1/r) = -(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})/r^2,$$

en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{r}$. La constante $\mathbf{A}$ se determina a partir de la condición de que las componentes normales de las velocidades $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ deben ser iguales en la superficie de la esfera, es decir, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ para $r = R$. Esta condición nos dice que $\mathbf{A} = 1/2\mathbf{u}R^3$, de modo que

$$\phi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \qquad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{u}].$$

La distribución de presiones viene dada por la ecuación (10.7):

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2}\rho v^2 - \rho\partial\phi/\partial t,$$

siendo p_0 la presión en el infinito. Para calcular la derivada $\partial\phi/\partial t$, debemos recordar que el origen (que hemos considerado que coincide con el centro de la esfera) se mueve con velocidad $\mathbf{u}$. De aquí,

$$\partial\phi/\partial t = (\partial\phi/\partial\mathbf{u})\cdot\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\phi.$$

La distribución de presiones en la superficie de la esfera viene dada por la fórmula

$$p = p_0 + \tfrac{1}{8}\rho u^2(9\cos^2\theta - 5) + \tfrac{1}{2}\rho R\mathbf{n}\cdot\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t,$$

en donde θ es el ángulo formado entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{u}$.

Problema 3. Repetir el problema 2, para el caso de un cilindro infinito que se mueve perpendicularmente a su eje.†

Solución. El flujo es independiente de la coordenada axial, de modo que hemos de resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Las soluciones que se anulan en el infinito son la primera y posteriores derivadas de $\log r$ respecto a las coordenadas, siendo $\mathbf{r}$ el radio vector perpendicular al eje del cilindro. Busquemos una solución de la forma

$$\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\log r = \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}/r,$$

A partir de las condiciones límites obtenemos $\mathbf{A} = -R^2\mathbf{u}$, de modo que

$$\phi = -\frac{R^2}{r}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \qquad \mathbf{v} = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{u}].$$

La presión en la superficie del cilindro viene dada por la fórmula

$$p = p_0+\tfrac{1}{2}\rho u^2(4\cos^2\theta-3)+\rho R\mathbf{n}\cdot\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t.$$

Problema 4. Determinar el flujo potencial de un fluido ideal incompresible en un recipiente elipsoidal que gira alrededor de un eje principal con velocidad angular Ω y determinar el momento angular total del fluido.

Solución. Tomemos las coordenadas cartesianas x, y, z a lo largo de los ejes del elipsoide en un instante determinado, coincidiendo el eje z con el eje de rotación. La velocidad de los puntos del recipiente es

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r},$$

de modo que la condición límite $v_n = \partial\phi/\partial n = u_n$ es

$$\partial\phi/\partial n = \Omega(xn_y-yn_x),$$

o bien, utilizando la ecuación del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$,

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial z} = xy\Omega\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

La solución de la ecuación de Laplace que satisface esta condición límite es

$$\phi = \Omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy. \tag{1}$$

El momento angular del fluido dentro del recipiente es

$$M = \rho\int(xv_y-yv_x)\mathrm{d}V.$$

Integrando respecto al volumen V del elipsoide, tenemos

$$M = \frac{\Omega\rho V}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

† Pueden encontrarse las soluciones a problemas más generales de flujo potencial alrededor de un elipsoide y un cilindro elíptico en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Hidromecánica teórica*, parte 1, 4.ª ed., págs. 265 y 355, Moscú, 1948; H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6.ª ed., §§ 103-116, Cambridge, 1932.

La fórmula (1) da el movimiento absoluto del fluido respecto a la posición instantánea de los ejes x, y, z que están fijos respecto a los recipientes en rotación. El movimiento respecto al recipiente (es decir, respecto a un sistema rotatorio de coordenadas x, y, z) se halla restando la velocidad $\Omega \times \mathbf{r}$ de la velocidad absoluta; designando por $\mathbf{v}'$ la velocidad relativa del fluido, tenemos

$$v'_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + y\Omega = \frac{2\Omega a^2}{a^2+b^2}y, \qquad v'_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2+b^2}x, \qquad v'_z = 0.$$

Se encuentran las trayectorias del movimiento relativo integrando las ecuaciones $\dot{x} = v'_x$, $\dot{y} = v'_y$, y son las elipses $x^2/a^2 + y^2/b^2 =$ constante, las cuales son semejantes a la elipse límite.

Problema 5. Determinar el flujo cerca de un punto de estancamiento (figura 2).

Solución. Puede considerarse una pequeña parte de la superficie del cuerpo cerca del punto de estancamiento como un plano. Consideremos que forma el plano xy. Desarrollando ϕ para valores de x, y, z pequeños, tenemos hasta los términos de segundo orden

$$\phi = ax+by+cz+Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx;$$

en donde carece de importancia un término constante en ϕ. Los coeficientes constantes se determinan de modo que ϕ satisfaga la ecuación $\Delta\phi = 0$ y las condiciones límites $v_z = \partial\phi/\partial z = 0$ para $z = 0$ y todos los valores de x, y, $\partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial y = 0$ para $x = y = z = 0$ (punto de estancamiento). Esto nos da $a = b = c = 0$; $C = -A - B$, $E = F = 0$. Puede siempre eliminarse el término Dxy mediante una rotación apropiada de los ejes x e y. Tenemos, entonces,

$$\phi = Ax^2+By^2-(A+B)z^2. \tag{1}$$

Si el flujo tiene una simetría axial respecto al eje z (flujo simétrico que rodea un sólido de revolución), debemos tener $A = B$, de modo que

$$\phi = A(x^2+y^2-2z^2).$$

Los componentes de la velocidad son $v_x = 2Ax$, $v_y = 2Ay$, $v_z = -4Az$. Las líneas de corriente vienen dadas por las ecuaciones (5.2), a partir de las cuales encontramos $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, es decir, las líneas de corriente son hipérbolas cúbicas.

Si el flujo es uniforme en la dirección y (por ejemplo, flujo en la dirección z que rodea un cilindro con su eje en la dirección y), deberíamos tener en (1) que $B = 0$, de modo que

$$\phi = A(x^2-z^2).$$

Las líneas de corriente son las hipérbolas $xz =$ constante.

Problema 6. Determinar el flujo potencial cerca de un ángulo formado por dos planos que se cortan.

Solución. Consideremos las coordenadas polares r, θ en el plano que forma la sección recta (perpendicular a la línea de la intersección), estando situado el origen en el vértice del ángulo; θ se mide a partir de una de las ramas del ángulo. Supongamos que el ángulo vale α radianes; para $\alpha < \pi$ el flujo tiene lugar dentro del ángulo, mientras que para $\alpha > \pi$ el flujo es exterior. La condición límite de que la componente de velocidad normal

se anule significa que $\partial\phi/\partial\theta = 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$. Puede escribirse la solución de la ecuación de Laplace que satisface estas condiciones como†

$$\phi = Ar^n \cos n\theta, \qquad n = \pi/\alpha,$$

de modo que

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \qquad v_\theta = -nAr^n \operatorname{sen} n\theta.$$

Para $n < 1$ (flujo exterior a un ángulo; figura 3), v_r se hace infinito como $1/r^{1-n}$ en el origen. Para $n > 1$ (flujo en el interior de un ángulo; figura 4), v_r tiende a cero para $r = 0$.

La función de corriente que nos da la forma de las líneas de corrientes es $\psi = Ar^n \operatorname{sen} n\theta$. Las expresiones obtenidas para ϕ y ψ son las partes real e imaginaria del potencial complejo $w = Az^n$.

Problema 7. Un hueco esférico de radio a se forma repentinamente dentro de un fluido incomprensible, que llena todo el espacio. Determinar el tiempo que tarda el fluido en rellenar dicha cavidad (RAYLEIGH, 1917).

Solución. El flujo después de la formación de la cavidad poseerá simetría esférica, estando dirigida la velocidad en todos los puntos hacia el centro de la misma. Para la velocidad radial $v_r \equiv v < 0$ tenemos la ecuación de Euler en coordenadas polares esféricas:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{1}$$

La ecuación de continuidad nos da

$$r^2 v = F(t), \tag{2}$$

en donde $F(t)$ es una función arbitraria del tiempo; esta ecuación expresa el hecho de que, puesto que el fluido es incompresible, el volumen que fluye a través de cualquier superficie esférica es independiente de su radio.

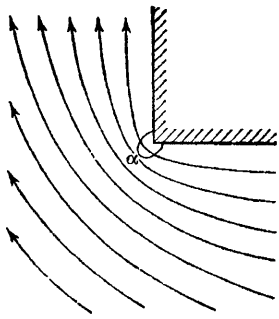

FIG. 3

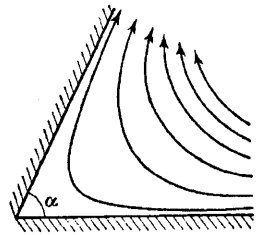

FIG. 4

† Tomaremos la solución en que aparezca la potencia positiva más pequeña de r, puesto que r es pequeño.

Sustituyendo el valor de v de (2) en (1), tenemos

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Integrando esta ecuación respecto a r para el radio instantáneo $R = R(t) \leq a$ de la cavidad hasta el infinito, obtenemos

$$-\frac{F'(t)}{R} + \tfrac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} \tag{3}$$

en donde $V = dR(t)/dt$ es la variación respecto al tiempo del radio de la cavidad y p_0 es la presión en el infinito; la velocidad del fluido en el infinito es cero, y lo mismo la presión en la superficie del orificio. A partir de la ecuación (2) para los puntos situados en la superficie del orificio, tenemos

$$F(t) = R^2(t)\,V(t),$$

y, sustituyendo esta expresión para $F(t)$ en (3), obtenemos la ecuación

$$-\frac{3V^2}{2} - \tfrac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \tag{4}$$

Integrando con la condición límite $V = 0$ para $R = a$ (el fluido está inicialmente en reposo), tenemos

$$V \equiv \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\left[\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)\right]}.$$

De aquí se encuentra para el tiempo total necesario para rellenar la cavidad la expresión

$$-\frac{F'(t)}{R} + \tfrac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

Esta integral se reduce a la función beta, y tenemos, finalmente,

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}} = 0{,}915a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

Problema 8. Una esfera sumergida en un fluido incompresible se dilata de acuerdo con una ley determinada $R = R(t)$. Determinar la presión del fluido en la superficie de la esfera.

Solución. Supongamos que la presión buscada sea $P(t)$. Cálculos exactamente semejantes a los del problema 7, excepto en que la presión en $r = R$ es $P(t)$ y no cero, dan en lugar de (3) la ecuación

$$-\frac{F'(t)}{R} + \tfrac{1}{2}V^2 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

y, de acuerdo con esto, en lugar de (4) se obtiene la ecuación

$$\frac{p_0 - P(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV\frac{dV}{dR}.$$

Recordando el hecho de que $V = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$, podemos escribir la presión correspondiente a $P(t)$ en la forma

$$P(t) = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho\left[\frac{\mathrm{d}^2(R^2)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right].$$

Problema 9. Determinar la forma de un chorro que emerge de una rendija infinitamente larga situada en una pared plana.

Solución. Supongamos que la pared está situada a lo largo del eje x en el plano xy y que la abertura corresponde al segmento $-1/2a \leq x \leq +1/2a$ de este eje, ocupando el fluido el semiplano $y > 0$. Lejos de la pared ($y \to \infty$) la velocidad del fluido es cero y la presión es p_0, por ejemplo.

En la superficie libre del chorro (BC y $B'C'$ de la figura 5a) la presión es $p = 0$, mientras que la velocidad toma el valor constante $v_1 = \sqrt{(2p_0/\rho)}$, según la ecuación de Bernoulli. Las líneas de la pared son líneas de corriente y éstas continúan dentro de los límites libres del chorro. Sea ψ cero en la línea ABC; entonces, en la línea $A'B'C'$, $\psi = -Q/\rho$, en donde $Q = \rho a_1 v_1$ es la velocidad a la cual el fluido emerge del chorro (correspondiendo a_1 y v_1 a la anchura y la velocidad en el infinito). El potencial ϕ varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$ a lo largo de ABC y de $A'B'C'$; ϕ será cero en B y B'. Entonces, en el plano de la variable compleja w, la región de flujo es una cinta infinita de anchura Q/ρ (figura 5*b*). (Los puntos de la figura 5*b*, *c* y *d* se denominan en correspondencia con los de la figura 5*a*.)

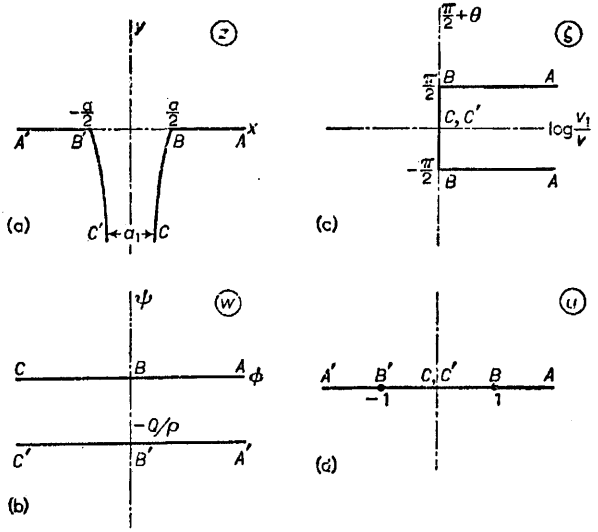

FIG. 5

Introduzcamos una nueva variable compleja, el logaritmo de la velocidad compleja:

$$\zeta = -\log\left[\frac{1}{v\,e^{\frac{1}{2}i\pi}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right] = \log\frac{v_1}{v} + i(\tfrac{1}{2}\pi + \theta); \qquad (1)$$

en donde $v_1 e^{1/2i\pi}$ es la velocidad compleja del chorro en el infinito. En $A'B'$ tenemos $\theta = 0$; en AB, $\theta = -\pi$; en BC y $B'C'$, $v = v_1$, mientras que en el infinito en el chorro $\theta = 1/2\pi$.

Por consiguiente, en el plano de la variable compleja ζ, la región de flujo es una cinta semiinfinita de anchura π en el semiplano de la derecha (figura 5*c*). Si podemos ahora encontrar una transformación conforme que transforme la cinta en el plano w en la semicinta del plano ζ (con los puntos correspondientes como en la figura 5), habremos determinado w en función de dw/dz, y entonces puede hallarse w mediante una simple cuadratura.

Con objeto de encontrar la transformación deseada, introduzcamos una variable compleja auxiliar adicional, u, tal que la región del flujo en el plano u es el semiplano superior, correspondiendo los puntos B y B' a $u = \pm 1$, los puntos C y C' a $u = 0$, y los puntos infinitamente distantes A y A' a $u = \pm \infty$ (figura 5*d*). La dependencia de w respecto a esta variable auxiliar viene dada por una transformación conforme que convierte la mitad superior del plano u en la cinta en el plano w. Con la correspondencia anterior de puntos, esta transformación es

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\log u. \tag{2}$$

Con objeto de hallar la dependencia de ζ respecto a u, hemos de encontrar una transformación conforme que convierta la semicinta del plano ζ en la mitad superior del palno u. Considerando esta semicinta como un triángulo, uno de cuyos vértices está en el infinito, podemos encontrar la transformación deseada mediante la bien conocida fórmula de Schwarz-Christoffel; ésta es

$$\zeta = -i\,\mathrm{sen}^{-1}u. \tag{3}$$

Las fórmulas (2) y (3) dan la solución del problema, puesto que proporcionan la dependencia de dw/dz con w en forma paramétrica.

Determinemos ahora la forma del chorro. En BC tenemos $w = \phi$, $\zeta = i(1/2\pi + \theta)$, mientras que u varía desde 1 a 0. A partir de (2) y (3), obtenemos

$$\phi = -\frac{Q}{\rho\pi}\log(-\cos\theta), \tag{4}$$

y a partir de (1) resulta:

$$d\phi/dz = v_1 e^{-i\theta},$$

o sea,

$$dz \equiv dx + i\,dy = \frac{1}{v_1}e^{i\theta}\,d\phi = \frac{a_1}{\pi}e^{i\theta}\ \mathrm{tg}\,\theta\,d\theta,$$

de aquí que encontremos, mediante integración y con las condiciones $y = 0$, $x = 1/2a$ para $\theta = -\pi$, la forma del chorro expresada paramétricamente. En particular, la compresión del chorro es $a_1/a = \pi/(2 + \pi) = 0{,}61$.

§ 11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

Consideremos ahora el problema del flujo potencial de un fluido ideal incompresible que rodea un cuerpo sólido. Como es natural, este problema es completamente equivalente al del movimiento de un fluido cuando el mismo cuerpo se mueve a su través. Para obtener el último caso a partir del primero necesitamos únicamente cambiar a un sistema de coordenadas en las cuales el fluido está en reposo en el infinito. De hecho, diremos en lo que sigue que el cuerpo se está moviendo a través del fluido.

Determinemos la naturaleza de la distribución de velocidades del fluido a una distancia grande del cuerpo móvil. El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace, $\Delta\phi = 0$. Hemos de considerar soluciones de esta ecuación que se anulen en el infinito, puesto que el fluido está allí en reposo. Consideraremos el origen en algún lugar en el interior del cuerpo móvil; el sistema coordenado se mueve con el cuerpo, pero consideraremos la distribución de velocidades del fluido en un instante particular. Como sabemos, la ecuación de Laplace tiene una solución $1/r$, en donde r es la distancia respecto al origen. También son soluciones el gradiente de $1/r$ y las derivadas espaciales de orden superior. Todas estas soluciones y cualquier combinación lineal de ellas, se anulan en el infinito. De aquí que la forma general de la solución requerida de la ecuación de Laplace a gran distancia del cuerpo es

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\frac{1}{r} + \ldots,$$

en donde a y $\mathbf{A}$ son independientes de las coordenadas; los términos omitidos contienen derivadas de $1/r$ de orden superior. Es fácil ver que la constante a debe ser nula. Para el potencial $\phi = -a/r$ se obtiene una velocidad

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad}(a/r) = a\mathbf{r}/r^3.$$

Calculemos el correspondiente flujo de masa a través de alguna superficie cerrada, por ejemplo, una esfera de radio R. En esta superficie la velocidad es constante e igual a a/R^2; el flujo total a su través es, por consiguiente, $\rho(a/R^2)4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Pero el flujo de un fluido incompresible a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo, como es natural. De aquí que obtengamos la conclusión de que $a = 0$.

Así pues, ϕ contiene términos del orden de $1/r^2$ y superiores. Puesto que estamos buscando la velocidad a distancias grandes, pueden despreciarse los términos de orden superior y tenemos

$$\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}(1/r) = -\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}/r^2, \tag{11.1}$$

y la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$ es

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{grad}\frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{A}}{r^3}, \tag{11.2}$$

en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{r}$. Vemos que a distancias grandes la velocidad disminuye según la función $1/r^3$. El vector $\mathbf{A}$ depende de la forma real y de la velocidad del cuerpo y puede determinarse sólo resolviendo por completo la ecuación $\Delta\phi = 0$ a todas las distancias, teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas en la superficie del cuerpo móvil.

El vector **A** que aparece en (11.2) está relacionado de un modo definido con el impulso y la energía totales del fluido en su movimiento alrededor del cuerpo. La energía cinética del fluido (la energía interna de un fluido incompresible es constante) es $E = \frac{1}{2}\int \rho v^2 dV$, tomándose la integración en todo el espacio exterior al cuerpo. Consideremos una región del espacio V limitado por una esfera de radio grande R, cuyo centro está en el origen, e integremos en primer lugar sólo respecto a V, haciendo posteriormente que R tienda hacia infinito. Tenemos idénticamente

$$\int v^2 \, dV = \int u^2 \, dV + \int (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \, dV,$$

en donde **u** es la velocidad del cuerpo. Puesto que **u** es independiente de las coordenadas, la primera integral del segundo miembro es simplemente $u^2(V - V_0)$, en donde V_0 es el volumen del cuerpo. En la segunda integral, escribiremos la suma $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ en forma de **grad** $(\phi + \mathbf{u}\cdot\mathbf{r})$; puesto que div **v** = 0 (ecuación de continuidad) y div **u** $\equiv$ 0, tenemos

$$\int v^2 \, dV = u^2(V - V_0) + \int \operatorname{div}[(\phi + \mathbf{u}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{v}-\mathbf{u})] dV.$$

La segunda integral se transforma ahora en una integral respecto a la superficie S de la esfera y la superficie S_0 del cuerpo:

$$\int v^2 \, dV = u^2(V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot d\mathbf{f}.$$

En la superficie del cuerpo, las componentes normales de **v** y **u** son iguales en virtud de las condiciones límites; puesto que el vector **df** está dirigido a lo largo de la normal a la superficie, es claro que la integral respecto a S_0 se anula idénticamente. En la superficie remota S se sustituyen las expresiones (11.1), (11.2) para ϕ y **v**, y se desprecian los términos que se anulan cuando $R \to \infty$. Escribiendo el elemento de superficie de la esfera S en la forma $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 do$, en donde do es un elemento de ángulo sólido, obtenemos

$$\int v^2 \, dV = u^2(\tfrac{4}{3}\pi R^3 - V_0) + \int [3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2 R^3] do.$$

Finalmente, efectuando la integración† y multiplicando por $\frac{1}{2}\rho$, se obtiene la expresión siguiente para la energía total del fluido:

$$E = \tfrac{1}{2}\rho(4\pi \mathbf{A}\cdot\mathbf{u} - V_0 u^2). \tag{11.3}$$

† La integración respecto a o es equivalente a promediar el integrando respecto a todas las direcciones del vector **n** y multiplicar por 4π. Para promediar expresiones del tipo $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}) \equiv A_i n_i B_k n_k$, siendo **A** y **B** vectores constantes, obsérvese que los valores medios $n_i n_k$ forman un tensor simétrico, que puede expresarse en función del tensor unidad δ_{ik}: $n_i n_k = a\delta_{ik}$. Contrayendo respecto a los sufijos i y k, y recordando que $n_i n_i = 1$, se halla que $a = 1/3$. De aquí que

$$\overline{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})} = \tfrac{1}{3}\delta_{ik}A_i B_k = \tfrac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Como ya hemos mencionado, el cálculo exacto del vector **A** exige una solución completa de la ecuación $\Delta\phi = 0$, teniendo en cuenta las condiciones límites particulares en la superficie del cuerpo. Sin embargo, puede hallarse directamente la naturaleza general de la dependencia de **A** respecto a la velocidad **u** del cuerpo, teniendo en cuenta que la ecuación es lineal en ϕ y de que las condiciones límites son lineales tanto en ϕ como en **u**. Se deduce de esto que **A** debe ser una función lineal de las componentes de **u**. La energía E dada por la fórmula (11.3) es, por consiguiente, una función cuadrática de las componentes de **u** y puede escribirse en la forma

$$E = \tfrac{1}{2} m_{ik} u_i u_k, \tag{11.4}$$

siendo m_{ik} un tensor simétrico constante, cuyos componentes pueden calcularse a partir de los de **A**; se denomina *tensor de masas asociadas.*

Conociendo la energía E, podemos obtener una expresión para el impulso total **P** del fluido. Para ello observamos que las variaciones infinitesimales en E y **P** están relacionadas mediante† $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$; se deduce de ello que si se expresa E en la forma (11.4), las componentes de **P** deben ser

$$P_i = m_{ik} u_k. \tag{11.5}$$

Finalmente, comparando las fórmulas (11.3), (11.4) y (11.5) se ve que **P** viene dado en función de **A** por

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}. \tag{11.6}$$

Señalemos que el impulso total del fluido es una magnitud finita perfectamente definida.

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo en la unidad de tiempo es $d\mathbf{P}/dt$. Cambiar el signo da evidentemente la reacción **F** del fluido, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo:

$$\mathbf{F} = -d\mathbf{P}/dt. \tag{11.7}$$

† En efecto, supongamos acelerado el cuerpo por una fuerza exterior cualquiera **F**. Irá creciendo el impulso del fluido; supongamos que aumenta en $d\mathbf{P}$ durante un tiempo dt. Este incremento está relacionado con la fuerza por $d\mathbf{P} = \mathbf{F}\,dt$, y al multiplicar escalarmente por la velocidad **u**, tenemos $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\,dt$, es decir, el trabajo realizado por la fuerza **F** actuando a lo largo de la distancia $\mathbf{u}\,dt$, que a su vez debe ser igual al aumento dE de la energía del fluido.

Debe señalarse que no será posible calcular directamente el impulso como la integral de $\rho\mathbf{v}\,dV$ extendida al volumen total del fluido. La razón es que esta integral diverge, si la velocidad **v** se distribuye de acuerdo con (11.2), en el sentido de que el resultado de la integración, aunque finito, depende de cómo se realice la operación: al efectuar la integración sobre una región grande, cuyas dimensiones se hacen tender a continuación a infinito, obtenemos un valor que depende de la forma de la región (esfera, cilindro, etc.). El método de calcular el impulso que utilizamos aquí, partiendo de la relación $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{P} = dE$, conduce a un resultado final completamente definido, dado por la fórmula (11.6), que ciertamente satisface la relación física existente entre la variación del impulso por unidad de tiempo y las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

La componente de **F** paralela a la velocidad del cuerpo se denomina *fuerza de arrastre* y la componente perpendicular se denomina *fuerza de sustentación.*

Si fuese posible tener un flujo potencial alrededor de un cuerpo moviéndose uniformemente dentro de un fluido ideal, deberíamos tener $\mathbf{P}$ = constante, puesto que $\mathbf{u}$ = constante y, por tanto, $\mathbf{F} = 0$. Es decir, no existiría ni arrastre ni sustentación; las fuerzas de presión ejercidas sobre el cuerpo por el fluido estarían equilibradas (resultado conocido como paradoja de d'Alambert). Puede verse con mayor claridad el origen de esta paradoja mediante la consideración del arrastre. La presencia de una fuerza de arrastre en un movimiento uniforme de un cuerpo significaría que, para mantener el movimiento, debe realizarse de modo continuo un trabajo por alguna fuerza externa, siendo este trabajo disipado dentro del fluido o convertido en energía cinética del mismo, de tal forma que el resultado sería un flujo continuo de energía hacia el infinito por el interior del fluido. Sin embargo, no existe por definición ninguna disipación de energía en un fluido ideal y la velocidad del fluido puesto en movimiento por el cuerpo disminuye tan rápidamente al aumentar la distancia de éste que no puede haber ningún flujo de energía hacia el infinito.

Sin embargo, debe resaltarse que todos estos argumentos se relacionan sólo con el movimiento de un cuerpo en un volumen infinito de fluido. Si, por ejemplo, el fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que tuviese un movimiento uniforme y paralelo a esta superficie experimentaría la acción de un arrastre. La aparición de esta fuerza (denominada *resistencia de onda*) se debe a la presencia de un sistema de ondas propagadas en la superficie libre, las cuales continuamente van eliminando energía hacia el infinito.

Supongamos que un cuerpo está ejecutando un movimiento oscilante bajo la acción de una fuerza externa **f**. Cuando se cumplen las condiciones estudiadas en § 10, el fluido que rodea el cuerpo se mueve con un flujo potencial y podemos utilizar las relaciones previamente obtenidas para deducir las ecuaciones del movimiento del cuerpo. La fuerza **f** debe ser igual a la derivada respecto al tiempo del impulso total del sistema y éste es la suma del impulso $M\mathbf{u}$ del cuerpo (siendo M la masa del cuerpo) y el impulso $\mathbf{P}$ del fluido:

$$M\,\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}.$$

Utilizando (11.5), se obtiene entonces

$$M\,\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t + m_{ik}\,\mathrm{d}u_k/\mathrm{d}t = f_i,$$

que puede también escribirse

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i. \tag{11.8}$$

Esta es la ecuación del movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido ideal.

Consideremos ahora lo que constituye en cierto modo el problema inverso. Supongamos que el fluido realiza algún movimiento oscilatorio producido por alguna causa externa al cuerpo. Este movimiento también pondrá al cuerpo en movimiento.† Deduciremos la ecuación de su movimiento.

Supongamos que la velocidad del fluido varía sólo ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo. Sea **v** la velocidad del fluido que existiría en la posición ocupada por el cuerpo si éste estuviese ausente; es decir, **v** es la velocidad del flujo no perturbado. De acuerdo con la hipótesis anterior, puede suponerse que **v** es constante en todo el volumen ocupado por el cuerpo. Designemos la velocidad del cuerpo por **u** como antes.

Puede determinarse la fuerza que actúa sobre el cuerpo y que lo pone en movimiento del modo siguiente. Si el cuerpo fuese totalmente transportado por el fluido (es decir, si $\mathbf{v} = \mathbf{u}$), la fuerza que actuase sobre él debería ser la misma que la fuerza que actuaría sobre el líquido en el mismo volumen, si el cuerpo estuviese ausente. El impulso de este volumen de fluido es $\rho V_0 \mathbf{v}$, y, por consiguiente, la fuerza sobre el mismo es $\rho V_0 \, \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$. Sin embargo, el cuerpo no es, en realidad, totalmente transportado con el fluido; existe un movimiento del cuerpo respecto a éste, y, en consecuencia, el propio fluido adquiere un cierto movimiento adicional. El impulso adicional resultante del fluido es $m_{ik}(u_k - v_k)$, puesto que debemos ahora sustituir **u** en (11.5) por la velocidad $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ del cuerpo respecto al fluido. La variación de este impulso con el tiempo da como resultado la aparición de una fuerza de reacción adicional sobre el cuerpo de valor $-m_{ik}\mathrm{d}(u_k - v_k)/\mathrm{d}t$. Así pues, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

$$\rho V_0 \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} - m_{ik}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_k - v_k).$$

Esta fuerza ha de igualarse a la derivada temporal del impulso del cuerpo. Así pues, obtenemos la siguiente ecuación del movimiento:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mu_i) = \rho V_0 \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} - m_{ik}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_k - v_k).$$

Integrando ambos miembros respecto al tiempo, se tiene

$$Mu_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k),$$

o sea,

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})v_k. \tag{11.9}$$

† Por ejemplo, podríamos estar considerando el movimiento de un cuerpo en un fluido a través del cual se está propagando una onda sonora, cuya longitud de onda es grande en comparación con las dimensiones del cuerpo.

Hagamos la constante de integración igual a cero, puesto que la velocidad **u** del cuerpo en su movimiento producido por el fluido debe anularse cuando **v** se hace cero. La relación obtenida determina la velocidad del cuerpo a partir de la velocidad del fluido. Si la densidad del cuerpo es igual a la del fluido ($M = \rho V_0$), tenemos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, como era de esperar.

PROBLEMAS

Problema 1. Obtener la ecuación del movimiento para una esfera que realiza un movimiento oscilante dentro de un fluido ideal y en el caso de una esfera puesta en movimiento por un fluido oscilante.

Solución. Comparando (11.1) con la expresión dada para ϕ en el caso de un flujo que rodea una esfera obtenida en § 10, problema 2, vemos que

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}R^3\mathbf{u},$$

siendo R el radio de la esfera. El impulso total transmitido al fluido por la esfera, de acuerdo con (11.6), es $\mathbf{P} = (2/3)\pi\rho R^3\mathbf{u}$, de modo que el tensor m_{ik} es

$$m_{ik} = \tfrac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ik}.$$

El arrastre sobre la esfera móvil es

$$\mathbf{F} = -\tfrac{2}{3}\pi\rho R^3\,\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t,$$

y la ecuación del movimiento de la esfera oscilando en el fluido es

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3(\rho_0 + \tfrac{1}{2}\rho)\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f},$$

siendo ρ_0 la densidad de la esfera. El coeficiente de $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t$ es la *masa virtual* de la esfera; se compone de la masa real de la misma y de la masa asociada o inducida, en este caso la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera.

Si la esfera inicia su movimiento debido al fluido, tenemos para su velocidad, a partir de (11.9),

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0}\mathbf{v}.$$

Si la densidad de la esfera supera a la del fluido ($\rho_0 > \rho$), $u < v$, es decir, la esfera «se retrasa» respecto al fluido; si $\rho_0 < \rho$ la esfera «adelanta».

Problema 2. Expresar el momento de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo móvil en un fluido en función del vector **A**.

Solución. Como sabemos de la mecánica, el momento **M** de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo viene determinado a partir de su función lagrangiana (en este caso, la energía E) mediante la relación $\delta E = \mathbf{M}\cdot\delta\theta$, siendo $\delta\theta$ el vector de una rotación infinitesimal del cuerpo y siendo δE la variación resultante en E. En lugar de hacer girar el cuerpo un ángulo $\delta\theta$ (y cambiar en correspondencia los componentes m_{ik}), podemos hacer girar el fluido un ángulo $-\delta\theta$ respecto al cuerpo (y en correspondencia modificar la velocidad **u**). Tenemos, además, $\delta\mathbf{u} = -\delta\theta\times\mathbf{u}$, de modo que

$$\delta E = \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u} = -\delta\theta\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{P}.$$

Utilizando la expresión (11.6) para **P**, obtenemos entonces la fórmula requerida:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{u}\times\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A}\times\mathbf{u}.$$

§ 12. Ondas de gravedad

La superficie libre de un líquido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si, bajo la acción de alguna perturbación externa, se mueve la superficie separándose de su posición de equilibrio en un punto determinado, aparecerá un movimiento en el líquido. Este movimiento se propagará a lo largo de toda la superficie en forma de ondas, que se denominan *ondas de gravedad,* puesto que se deben a la acción del campo gravitatorio. Las ondas de gravedad aparecen principalmente en la superficie del líquido, pero afectan también el interior aunque cada vez menos, según va aumentado la profundidad.

Consideraremos ahora las ondas de gravedad en las cuales la velocidad de las partículas del fluido móvil es tan pequeña que podemos despreciar el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en comparación con $\partial\mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación de Euler. El significado físico de esto se ve fácilmente. Durante un intervalo de tiempo del orden del período τ de las oscilaciones de las partículas del fluido en la onda, estas partículas recorren una distancia del orden de la amplitud a de la onda. Por consiguiente, su velocidad es del orden de a/τ. Varía notablemente a intervalos de tiempo del orden de τ y distancias del orden de λ en la dirección de propagación (siendo λ la longitud de onda). De aquí que la derivada temporal de la velocidad sea del orden de v/τ y las derivadas espaciales del orden de v/λ. Así pues, la condición $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$ es equivalente a

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \frac{a}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau},$$

o sea,

$$a \ll \lambda, \tag{12.1}$$

es decir, la amplitud de las oscilaciones en la onda debe ser pequeña en comparación con su longitud de onda. Hemos visto en § 9 que, si puede despreciarse el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación del movimiento, tenemos un flujo potencial. Admitiendo que el fluido es incompresible podemos utilizar, por consiguiente, las ecuaciones (10.6) y (10.7). Puede despreciarse el término $\frac{1}{2}v^2$ en la última ecuación, puesto que contiene el cuadrado de la velocidad; haciendo $f(t) = 0$ e incluyendo un término ρgz para tener en cuenta el campo gravitatorio, se obtiene

$$p = -\rho gz - \rho\partial\phi/\partial t. \tag{12.2}$$

Tomaremos el eje z verticalmente hacia arriba, como es normal, y el plano xy de modo que se corresponda con la superficie de equilibrio del fluido.

Designemos por ζ la coordenada z de un punto de la superficie; ζ es una función de x, y y t. En el equilibrio es $\zeta = 0$, de modo que ζ da el desplazamiento vertical de la superficie en sus oscilaciones. Supongamos que sobre la superficie actúa una presión constante p_0 (por ejemplo, la presión atmosférica). Entonces tenemos en la superficie, según (12.2),

$$p_0 = -\rho g\zeta - \rho \partial\phi/\partial t.$$

En lugar del potencial ϕ, podemos utilizar un potencial $\phi' = \phi + (p_0/\rho)t$; esto no constituye ninguna diferencia, puesto que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi = \mathbf{grad}\ \phi'$. Sin embargo, se elimina el término p_0 de la ecuación anterior y al prescindir del signo prima obtenemos la condición en la superficie como

$$g\zeta + (\partial\phi/\partial t)_{z=\zeta} = 0. \tag{12.3}$$

Como la amplitud de las oscilaciones de las ondas es pequeña, el desplazamiento ζ es pequeño también. De aquí que podemos suponer, con el mismo grado de aproximación, que la componente vertical de la velocidad de los puntos en la superficie es simplemente la derivada respecto al tiempo de ζ:

$$v_z = \partial\zeta/\partial t.$$

Pero $v_z = \partial\phi/\partial z$, de modo que

$$(\partial\phi/\partial z)_{z=\zeta} = \partial\zeta/\partial t.$$

Sustituyendo ζ a partir de (12.3), tenemos

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = 0.$$

Como las oscilaciones son pequeñas, podemos tomar el valor del paréntesis en $z = 0$ en lugar de $z = \zeta$. Así pues, tenemos, finalmente, el siguiente sistema de ecuaciones para determinar el movimiento en un campo gravitatorio:

$$\triangle\phi = 0, \tag{12.4}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0. \tag{12.5}$$

Consideremos aquí ondas en la superficie de un fluido cuya área es ilimitada y supondremos también que la longitud de onda es pequeña en comparación con la profundidad del fluido; podemos, por tanto, considerar el fluido como de profundidad infinita. Entonces omitiremos las condiciones límites en los bordes y en la parte inferior.

Consideremos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje x y que es uniforme en la dirección y; en dicha onda, todas las magnitudes son

independientes de y. Buscaremos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada x, es decir, haremos:

$$\phi = f(z)\cos(kx - \omega t).$$

Aquí ω es lo que se denomina *frecuencia circular* o *frecuencia angular* (la denominaremos simplemente *frecuencia*) de la onda; $2\pi/\omega$ es el período del movimiento en un punto determinado; k se denomina *número de onda*; $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda, es decir, el período del movimiento a lo largo del eje x en un tiempo determinado.

Sustituyendo en la ecuación

$$\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

tenemos

$$d^2f/dz^2 - k^2f = 0.$$

Esta ecuación tiene la solución e^{kz} y e^{-kz}. Debemos considerar la primera, puesto que la última da un aumento ilimitado de ϕ cuando pasamos al interior del fluido (recordemos que el fluido ocupa la región $z < 0$). Así pues, obtenemos para el potencial de velocidad

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{12.6}$$

También ha de satisfacerse la condición límite (12.5). Sustituyendo (12.6), obtenemos

$$k - \omega^2/g = 0,$$

o sea,

$$\omega^2 = kg. \tag{12.7}$$

Esto nos da la relación existente entre el número de onda y la frecuencia de una onda de gravedad.

La distribución de velocidades en el fluido móvil se encuentra tomando simplemente las derivadas espaciales de ϕ:

$$v_x = -Ake^{kz}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t), \qquad v_z = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{12.8}$$

Vemos que la velocidad disminuye exponencialmente al penetrar en el fluido. En un punto determinado cualquiera del espacio (es decir, para x, z dados) el vector velocidad gira uniformemente en el plano xz, permaneciendo su módulo constante e igual a Ake^{kz}.

Determinemos también las trayectorias de las partículas del fluido en la onda. Temporalmente designaremos por x, z las coordenadas de una partícula del fluido móvil (y no las de un punto fijo en el espacio) y por x_0, z_0 los valores de x y z en la posición de equilibrio de la partícula. Entonces, $v_x = dx/dt$,

$v_z = dz/dt$, y podemos aproximar el segundo miembro de (12.8) escribiendo x_0, z_0 en lugar de x, z, puesto que las oscilaciones son pequeñas. Una integración respecto al tiempo nos da entonces

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\operatorname{sen}(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \tag{12.9}$$

Así pues, las partículas del fluido describen circunferencias de radio $(Ak/\omega)e^{kz_0}$ alrededor de los puntos (x_0, z_0); este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad.

La velocidad de propagación U de la onda es, como demostraremos en § 66, $U = \partial\omega/\partial k$. Sustituyendo aquí $\omega = \sqrt{(kg)}$, vemos que la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad infinita es

$$U = \tfrac{1}{2}\sqrt{(g/k)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(g\lambda/2\pi)}. \tag{12.10}$$

Esta velocidad aumenta con la longitud de onda.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad h.

Solución. En el fondo del fluido la componente de la velocidad normal debe ser cero, es decir, $v_z = \delta\phi/\delta z = 0$ para $z = -h$. A partir de esta condición, encontramos el cociente de las constantes A y B en la solución general

$$\phi = [Ae^{kz} + Be^{-kz}]\cos(kx - \omega t).$$

El resultado es

$$\phi = A\cos(kx - \omega t)\cosh k(z + h).$$

A partir de la condición límite (12.5) vemos que la relación entre k y ω es

$$\omega^2 = gk \ \operatorname{tgh} kh.$$

La velocidad de propagación de las ondas es

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k \ \operatorname{tgh} kh}}\left[\operatorname{tgh} kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh}\right].$$

En el caso $kh \gg 1$ tenemos el resultado (12.10) y para $kh \ll 1$ el resultado (13.10) (ver a contiuación).

Problema 2. Determinar la relación existente entre la frecuencia y la longitud de onda en el caso de ondas de gravedad en la superficie que separa dos fluidos, estando limitado el fluido superior por encima mediante un plano horizontal fijo, mientras el fluido infe-

rior está limitado de modo semejante por debajo. La densidad y profundidad del fluido inferior son ρ y h y las del fluido superior son ρ' y h', siendo $\rho > \rho'$.

Solución. Consideremos el plano xy como el plano de equilibrio de separación de los dos fluidos. Busquemos una solución que posea en ambos fluidos la forma

$$\begin{aligned} \phi &= A \cosh k(z+h) \cos(kx-\omega t), \\ \phi' &= B \cosh k(z-h') \cos(kx-\omega t), \end{aligned} \tag{1}$$

de modo que las condiciones en los límites superior e inferior pueden satisfacerse; véase la solución al problema 1. En la superficie de separación, la presión debe ser continua; por (12.2), esto da la condición

$$\rho g\zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho' g\zeta + \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \quad \text{para } z = \zeta,$$

o sea

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho-\rho')} \left(\rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \tag{2}$$

Además, la componente de velocidad v_z debe ser la misma para cada fluido en la superficie de separación. Esto da la condición

$$\partial\phi/\partial z = \partial\phi'/\partial z \text{ para } z = 0. \tag{3}$$

Ahora bien, $v_z = \partial\phi/\partial z = \partial\zeta/\partial t$ y, sustituyendo (2), tenemos

$$g(\rho-\rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Sustituyendo (1) en (3) y (4) se tienen dos ecuaciones lineales homogéneas para A y B y la condición de compatibilidad nos da

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho-\rho')}{\rho \coth kh + \rho' \coth kh'}.$$

En el caso de $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$ (ambos fluidos muy profundos),

$$\omega^2 = kg \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'},$$

mientras que para $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ (ondas largas),

$$\omega = k \sqrt{\frac{g(\rho-\rho')hh'}{\rho h' + \rho' h}}.$$

Problema 3. Determinar la relación existente entre la frecuencia y la longitud de onda para ondas de gravedad que se propagan simultáneamente en la superficie de separación y en la superficie superior de dos capas fluidas, teniendo la inferior (de densidad ρ) una profundidad infinita, mientras que la superior (de densidad ρ') tiene una profundidad h' y la superficie superior libre.

Solución. Consideremos el plano xy como el plano de equilibrio de la separación de ambos fluidos. Busquemos una solución que posea para ambos fluidos las formas

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{kz}\cos(kx-\omega t), \\ \phi' &= [Be^{-kz}+Ce^{kz}]\cos(kx-\omega t). \end{aligned} \tag{1}$$

En la superficie de separación, es decir, para $z = 0$, tenemos las condiciones (ver problema 2)

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial z}, \qquad g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z} = \rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

y en la superficie superior, es decir, para $z = h'$, la condición

$$\frac{\partial\phi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

La primera ecuación (2), nos da $A = C - B$ al sustituir en (1), y las dos condiciones restantes nos dan, entonces, dos ecuaciones para B y C; a partir de la condición de compatibilidad obtenemos una ecuación cuadrática para ω^2, cuyas raíces son

$$\omega^2 = kg\frac{(\rho-\rho')(1-e^{-2kh'})}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}}, \qquad \omega^2 = kg.$$

En el caso de $h' \to \infty$, estas raíces corresponden a ondas que se propagan independientemente en la superficie de separación y en la superficie superior.

Problema 4. Determinar las frecuencias de oscilación† posibles (ondas estacionarias) de un fluido de profundidad h en un depósito o tanque rectangular de anchura a y longitud b.

Solución. Tomaremos los ejes x e y a lo largo de los dos lados del depósito. Busquemos una solución en forma de una onda estacionaria:

$$\phi = f(x,y)\cosh k(z+h)\cos\omega t.$$

Obtenemos para f la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

y la condición en la superficie libre da, como en el problema 1, la relación

$$\omega^2 = gk \ \operatorname{tgh} kh.$$

Tomaremos la solución de la ecuación correspondiente a f en la forma

$$f = \cos px\cos qy, \qquad p^2+q^2 = k^2.$$

En los lados del depósito debemos tener las condiciones

$$\begin{aligned} v_x &= \partial\phi/\partial x = 0 \ \text{ para } \ x = 0, a; \\ v_y &= \partial\phi/\partial y = 0 \ \text{ para } \ y = 0, b. \end{aligned}$$

† Ver § 68.

De aquí que encontremos $p = m\pi/a$, $q = n\pi/b$, siendo m y n números enteros. Por consiguiente, los valores posibles de k^2 son

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

§ 13. Ondas de gravedad largas

Habiendo considerado las ondas de gravedad de pequeña longitud en comparación con la profundidad del fluido, estudiemos ahora el caso límite opuesto de ondas de longitud grande en comparación con la profundidad. Estas ondas se denominan *largas*.

Examinemos primeramente la propagación de ondas largas en un canal. Se supone que el canal está dirigido a lo largo del eje x y tiene longitud infinita. La sección recta del canal puede tener cualquier forma y puede variar a lo largo de su longitud. Designaremos el área de la sección recta del fluido o del canal mediante $S = S(x, t)$. Se supone que la anchura y profundidad del canal son pequeñas en comparación con la longitud de onda.

Consideraremos aquí ondas longitudinales, en las cuales el fluido se mueve a lo largo del canal. En dichas ondas la componente de velocidad v_x a lo largo del canal es grande en comparación con las componentes v_y, v_z.

Designaremos v_x simplemente por v y omitiremos los términos pequeños. La componente x de la ecuación de Euler puede escribirse entonces en la forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

y la componente z en la forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g;$$

Omitimos los términos cuadráticos de la velocidad, puesto que se supone de nuevo que es pequeña la longitud de onda. A partir de la segunda ecuación tenemos, puesto que la presión en la superficie libre ($z = \zeta$) debe ser p_0,

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, se obtiene

$$\partial v/\partial t = -g\partial\zeta/\partial x. \tag{13.1}$$

La segunda ecuación necesaria para determinar las dos incógnitas v y ζ puede deducirse de modo semejante a la ecuación de continuidad; esencialmente es la ecuación de continuidad para el caso en cuestión. Consideremos un volumen de fluido limitado por dos secciones rectas planas del canal distantes entre sí una distancia dx. En la unidad de tiempo fluye a través de uno de los planos un volumen $(Sv)_x$ de fluido y a través del otro un volu-

men $(Sv)_{x+dx}$. De aquí que el volumen de fluido entre ambos planos varía en la cantidad

$$(Sv)_{x+dx}-(Sv)_x = \frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx.$$

Sin embargo, como el fluido es incompresible, esta variación se deberá simplemente a la variación del nivel de fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido comprendidos entre los dos planos considerados es $(\partial S/\partial t)dx$. Por consiguiente, podemos escribir

$$\frac{\partial S}{\partial t}dx = -\frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx,$$

o sea,

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0. \tag{13.2}$$

Esta es la ecuación de continuidad solicitada.

Sea S_0 el área de la sección recta de equilibrio del fluido en el canal. Entonces, $S = S_0 + S'$, siendo S' la variación en el área de la sección recta producida por la onda. Puesto que el cambio en el nivel del fluido es pequeño, podemos escribir S' en la forma $b\zeta$, siendo b la anchura del canal en la superficie del fluido. La ecuación (13.2) se transforma entonces en

$$b\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial(S_0v)}{\partial x} = 0. \tag{13.3}$$

Derivando (13.3) respecto a t y sustituyendo $\partial v/\partial t$ de (13.1), obtenemos

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = 0. \tag{13.4}$$

Si la sección recta del canal es la misma en todos los puntos, entonces S_0 = constante y

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{13.5}$$

Esta ecuación se denomina una *ecuación de onda*: como veremos en § 63, corresponde a la propagación de ondas con una velocidad U que es independiente de la frecuencia y es la raíz cuadrada del coeficiente de $\partial^2\zeta/\partial x^2$. Así pues, la velocidad de propagación de ondas de gravedad largas en canales es

$$U = \sqrt{(gS_0/b)}. \tag{13.6}$$

De un modo totalmente semejante podemos considerar ondas largas en un depósito grande, que suponemos infinito en dos direcciones (las correspondientes a x e y). Se designa por h la profundidad del fluido en el depó-

sito. La componente v_z de la velocidad es ahora pequeña. La ecuación de Euler toma una forma semejante a (13.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{13.7}$$

Se deduce la ecuación de continuidad del mismo modo que (13.2) y es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (hv_y)}{\partial y} = 0.$$

Escribamos la profundidad h como $h_0 + \zeta$, siendo h_0 la profundidad de equilibrio. Entonces,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \tag{13.8}$$

Admitamos que el depósito tiene un fondo horizontal (h_0 = constante). Derivando (13.8) respecto a t y sustituyendo el valor de (13.7), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{13.9}$$

Que es de nuevo una ecuación de onda (bidimensional); corresponde a ondas que se propagan con una velocidad

$$U = \sqrt{(gh)}. \tag{13.10}$$

§ 14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Dichas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y por consiguiente la entropía s) varía necesariamente con la altura; de aquí que cualquier desplazamiento de una partícula de fluido en altura destruye el equilibrio mecánico y, en consecuencia, produce un movimiento oscilante. En efecto, puesto que el movimiento es adiabático, la partícula transporta con ella a su nueva posición toda su entropía anterior s, que no es la misma que la correspondiente al valor de equilibrio en la nueva posición.

Supondremos a continuación que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una modificación notable en la densidad; y consideraremos al propio fluido como incompresible. Esto significa que podemos despreciar las variaciones producidas en su densidad por la variación de presión de la onda. La modificación de la densidad producida por la dilatación térmica no puede despreciarse, puesto que es la que origina el fenómeno en cuestión.

Describamos a continuación un sistema de ecuaciones hidrodinámicas para este movimiento. Utilizaremos un sufijo 0 para distinguir los valores de las

magnitudes correspondientes al equilibrio mecánico y una prima para marcar las pequeñas desviaciones de estos valores. Entonces puede escribirse la ecuación de conservación de la entropía $s = s_0 + s'$ hasta el primer orden,

$$\partial s'/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s_0 = 0, \tag{14.1}$$

en donde s_0, igual que los valores de equilibrio de otras magnitudes, es una función determinada de la coordenada vertical z.

A continuación, despreciaremos de nuevo en la ecuación de Euler el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ (puesto que las oscilaciones son pequeñas); y teniendo en cuenta además el hecho de que la distribución de presiones de equilibrio viene dada por $\mathbf{grad}\, p_0 = \rho_0\mathbf{g}$, tenemos hasta el mismo grado de exactitud

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\mathbf{grad}\, p'}{\rho_0} + \frac{\mathbf{grad}\, p_0}{\rho^2}\rho'.$$

Puesto que, según hemos visto anteriormente, la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, podemos escribir

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s',$$

y así se obtiene entonces la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \mathbf{grad}\frac{p'}{\rho_0}. \tag{14.2}$$

Podemos incluir ρ_0 bajo el operador gradiente, puesto que, como se dijo anteriormente, siempre despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de una longitud de onda. Por esta misma razón se puede suponer constante la densidad en la ecuación de continuidad, que resulta entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{14.3}$$

Buscaremos una solución de las ecuaciones (14.1)-(14.3) en la forma de una onda plana:

$$\mathbf{v} = \text{constante} \times e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

y análogamente para s' y p'. Sustituyendo la ecuación de continuidad (14.3) se tiene

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = 0, \tag{14.4}$$

es decir, la velocidad del fluido es en todas partes perpendicular al *vector de onda* $\mathbf{k}$ (onda transversal). Las ecuaciones (14.1) y (14.2) dan

$$i\omega s' = \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s_0, \qquad -i\omega\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0}p'.$$

La condición $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$, junto a la segunda de estas ecuaciones, da

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' \mathbf{g} \cdot \mathbf{k},$$

y, eliminando $\mathbf{v}$ y s' de ambas ecuaciones, obtenemos la relación deseada entre el vector de onda y la frecuencia,

$$\omega^2 = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p g \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{14.5}$$

Aquí y en lo que sigue omitiremos el sufijo cero para los valores de equilibrio de las magnitudes termodinámicas; el eje z es vertical y hacia arriba y θ es el ángulo entre este eje y la dirección de $\mathbf{k}$. Si la expresión en el segundo miembro de (14.5) es positiva, se cumple la condición para la estabilidad de la distribución de equilibrio $s(z)$ (condición de que la convección esté ausente — ver § 4).

Vemos que la frecuencia depende sólo de la dirección del vector de onda y no de su valor. Para $\theta = 0$ tenemos $\omega = 0$; esto significa que no pueden existir ondas del tipo considerado, con su vector de onda vertical.

Si el fluido está tanto en equilibrio mecánico como en equilibrio termodinámico completo, su temperatura es constante y podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

Finalmente, utilizando las relaciones termodinámicas bien conocidas

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

en donde c_p es el calor específico por unidad de masa, encontramos

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p} \operatorname{sen} \theta. \tag{14.6}$$

En particular, en el caso de un gas perfecto,

$$\omega = \frac{g}{\sqrt{(c_p T)}} \operatorname{sen} \theta. \tag{14.7}$$

CAPÍTULO II

FLUIDOS VISCOSOS

§ 15. Ecuación del movimiento de un fluido viscoso

Estudiaremos ahora el efecto producido por la disipación de energía, que se produce durante el movimiento de un fluido, sobre el propio movimiento. Este proceso es el resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento. Siempre se presenta dicha irreversibilidad en alguna cuantía y se debe a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica.

Con objeto de obtener las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso, hemos de incluir algunos términos adicionales en la ecuación del movimiento de un fluido ideal. La ecuación de continuidad, como vimos en su deducción, es válida igualmente para cualquier fluido, sea viscoso o no. Por otra parte, la ecuación de Euler exige ciertas modificaciones.

Hemos visto en § 7 que la ecuación de Euler puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

en donde Π_{ik} es el tensor de densidad de flujos del impulso. El flujo del impulso dado por la fórmula (7.2) representa una transferencia de impulso completamente reversible debida simplemente al transporte mecánico de las distintas partículas de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan en dicho fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, irreversible, de unos puntos en donde la velocidad es grande a otros puntos donde la velocidad es pequeña.

La ecuación del movimiento de un fluido viscoso puede, por consiguiente, obtenerse sumando al flujo de impulso «ideal» (7.2) un término $-\sigma'_{ik}$ que da la transferencia de impulso «viscoso» irreversible en el fluido. Así pues, escribiremos el tensor densidad de flujo del impulso en el caso de un fluido viscoso en la forma

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{15.1}$$

El tensor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{15.2}$$

se denomina *tensor de tensiones* y σ'_{ik} es el *tensor de tensiones de la viscosidad.* σ_{ik} expresa la parte del flujo del impulso que no se debe a transferencia directa de impulso con la masa del fluido móvil.†

Puede establecerse la forma general del tensor σ'_{ik} del modo siguiente. En un fluido se presentan procesos de rozamiento interno únicamente en el caso en que las distintas partículas del fluido se muevan con velocidades diferentes, de modo que exista un movimiento relativo entre las distintas partes del fluido. De aquí que σ'_{ik} dependa de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación, σ'_{ik} puede suponerse que es una función lineal de las derivadas $\partial v_i/\partial x_k$. No pueden existir términos en σ'_{ik} independientes de $\partial v_i/\partial x_k$, puesto que σ'_{ik} debe anularse para $v =$ constante. A continuación, observaremos que σ'_{ik} debe también anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, puesto que es evidente que en dicho movimiento no se produce ningún rozamiento interno en el fluido. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, la velocidad $\mathbf{v}$ es igual al producto vectorial $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial v_i/\partial x_k$, y se anulan cuando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. De aquí que σ'_{ik} deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas de las derivadas $\partial v_i/\partial x_k$.

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik},$$

siendo a y b independientes de la velocidad.‡ Sin embargo, es conveniente escribir esta expresión en una forma ligeramente distinta, en la que a y b se sustituyen por otras constantes:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{15.3}$$

La expresión entre paréntesis tiene la propiedad de anularse por contracción respecto a i y k, es decir, cuando se hace la suma de las componentes en el

† Veremos más adelante que σ'_{ik} contiene un término proporcional a δ_{ik}, es decir, de la misma forma que $p\delta_{ik}$. Por tanto, cuando el tensor del flujo de impulso se pone en dicha forma, deberemos especificar qué se entiende por presión p; ver al final del § 49.

‡ Para hacer esta afirmación hacemos uso del hecho de que el fluido es isoentrópico, de modo que sus propiedades deben describirse solamente mediante magnitudes escalares (en este caso a y b).

caso en que $i = k$. Las constantes η y ζ se denominan *coeficientes de viscosidad*. Como veremos en §§ 16 y 49, ambos son positivos:

$$\eta > 0, \qquad \zeta > 0. \tag{15.4}$$

Las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso pueden ahora obtenerse sumando simplemente las expresiones $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ en el segundo miembro de la ecuación de Euler

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Así pues, tenemos

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{15.5}$$

Esta forma de las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso es la más general de todas. Las magnitudes η y ζ son funciones de la presión y la temperatura. En general, p y T, y, por consiguiente, η y ζ, no son constantes en todo el fluido, de modo que η y ζ no puede extraerse fuera del operador gradiente.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, los coeficientes de viscosidad no varían notablemente en el fluido y pueden, por tanto, considerarse como constantes. Entonces tenemos

$$\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$
$$= \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k} + (\zeta+\tfrac{1}{3}\eta)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Pero

$$\partial v_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{v}, \qquad \partial^2 v_i/\partial x_k\partial x_k \equiv \triangle v_i.$$

De aquí que podamos escribir la ecuación del movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}\right] = -\mathbf{grad}\,p + \eta\triangle\mathbf{v} + (\zeta+\tfrac{1}{3}\eta)\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{15.6}$$

Si el fluido puede considerarse como incompresible, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, y el último término en el segundo miembro de (15.6) es cero. Así pues, la ecuación del movimiento de un fluido viscoso incompresible es

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\triangle\mathbf{v}. \tag{15.7}$$

Esta ecuación se denomina de *Navier-Stokes*. El tensor de tensiones en un fluido incompresible toma la forma sencilla

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{15.8}$$

Vemos que la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Puesto que la mayor parte de los fluidos pueden considerarse como prácticamente incompresibles, este coeficiente de viscosidad η es el que tiene, en general, importancia. El cociente

$$\nu = \eta/\rho \tag{15.9}$$

se denomina *viscosidad cinemática* (mientras que el propio η se denomina *viscosidad dinámica*). A continuación, damos los valores de η y ν para diversos fluidos a una temperatura de 20°C:

	η (g/cm s)	ν (cm^2/s)
Agua	0,010	0,010
Aire	0,00018	0,150
Alcohol	0,018	0,022
Glicerina	8,5	6,8
Mercurio	0,0156	0,0012

Conviene mencionar que la viscosidad dinámica de un gas a una temperatura determinada es independiente de la presión. Sin embargo, la viscosidad cinemática es inversalmente proporcional a la presión.

La presión puede eliminarse en la ecuación de Navier-Stokes del mismo modo que se hizo en la ecuación de Euler. Tomando el rotacional de ambos miembros de la ecuación (15.7), obtenemos, en lugar de la ecuación (2.11) correspondiente a un fluido ideal, la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot\ v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot\ v}) + \nu\Delta(\mathbf{rot\ v}). \tag{15.10}$$

También escribiremos a continuación las condiciones límites que actúan sobre las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso. Existen siempre fuerzas de atracción molecular entre un fluido viscoso y la superficie de un cuerpo sólido. Estas fuerzas dan lugar a que la capa de fluido inmediata adyacente a la superficie quede totalmente en reposo y se «adhiera» a la superficie. De acuerdo con ello, las condiciones límites en las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso exigen que la velocidad del fluido se anule en las superficies sólidas fijas:

$$\mathbf{v} = 0. \tag{15.11}$$

Puede resaltarse que tanto la componente de velocidad normal como la tangencial se deben anular, mientras que en el caso de un fluido ideal las condiciones límites exigen únicamente la anulación de v_n.†

† Podemos señalar que, en general, las ecuaciones de Euler no pueden ser satisfechas con la condición límite $\mathbf{v} = 0$.

En el caso general de una superficie móvil, la velocidad **v** debe ser igual a la velocidad de la superficie.

Es sencillo escribir a continuación una expresión para la fuerza que actúa sobre una superficie sólida que limita el fluido. La fuerza que actúa sobre un elemento de la superficie coincide con el flujo de impulso a través de dicho elemento. El flujo de impulso a través del elemento de superficie **df** es

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k.$$

Escribiendo df_k en la forma $df_k = n_k\, df$, en donde **n** es un vector unidad a lo largo de la normal y recordando que $\mathbf{v} = 0$ en una superficie† sólida, encontramos que la fuerza **P** que actúa sobre la superficie de área unidad es

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \tag{15.12}$$

El primer término es la presión ordinaria del fluido, mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento, debida a la viscosidad, que actúa sobre la superficie. Debemos resaltar que **n** en (15.12) es un vector unidad a lo largo de la normal y hacia fuera del fluido, es decir, a lo largo de la normal hacia dentro en la superficie sólida.

Si tenemos una superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos deben ser iguales en la superficie y las fuerzas que se ejercen entre sí deben ser iguales y opuestas. La última condición se escribe

$$n_{1,k}\, \sigma_{1,ik} + n_{2,k}\, \sigma_{2,ik} = 0,$$

en donde los sufijos 1 y 2 se refieren a los dos fluidos. Los vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ tienen sentidos opuestos, es decir, $n_{1,i} = -n_{2,i} = n_i$, de modo que podemos escribir

$$n_i\, \sigma_{1,ik} = n_i\, \sigma_{2,ik}. \tag{15.13}$$

En una superficie libre del fluido debe cumplirse la condición

$$\sigma_{ik}\, n_k \equiv \sigma'_{ik}\, n_k - p n_i = 0 \tag{15.14}$$

Como referencia, daremos a continuación las expresiones correspondientes a las componentes del tensor de tensiones y la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas. En coordenadas cilíndricas r, ϕ, z, los componentes del tensor de tensiones son

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma_{r\phi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}\right), \qquad \sigma_{\phi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right),$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right). \tag{15.15}$$

† Al determinar la fuerza que actúa sobre la esfera, debe considerarse cada elemento superficial en un sistema de referencia en el cual esté en reposo. La fuerza sólo es igual al flujo del impulso cuando la superficie está fija.

Los tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación de continuidad son

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\phi^2}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}-\frac{v_r}{r^2}\right),$$
$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{v_r v_\phi}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r^2}\right),$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0. \tag{15.16}$$

En coordenadas esféricas r, ϕ, θ, tenemos para el tensor de tensiones

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p+2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
\sigma_{\phi\phi} &= -p+2\eta\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\theta} &= -p+2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right),\\
\sigma_{r\theta} &= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\phi} &= \eta\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}-\frac{v_\phi\cot\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\phi r} &= \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r}\right),
\end{aligned} \tag{15.17}$$

mientras que las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right],$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\right],$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$
$$=-\frac{1}{\rho r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\phi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\right],$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0. \qquad (15.18)$$

Finalmente, damos la ecuación que debe ser satisfecha por la función de corriente $\psi(x, y)$ en un flujo bidimensional de un fluido viscoso incompresible. Se obtiene sustituyendo $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$, $v_z = 0$ en la ecuación (15.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\triangle\psi)}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\triangle\psi)}{\partial x}-\nu\triangle^2\psi=0. \qquad (15.19)$$

§ 16. Disipación de energía en un fluido incompresible

La presencia de la viscosidad da como resultado la disipación de energía que finalmente se transforma en calor. El cálculo de la disipación de energía es especialmente sencillo en el caso de un fluido incompresible.

La energía cinética total de un fluido incompresible es

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\rho \int v^2 \, \mathrm{d}V.$$

Tomemos la derivada temporal de esta energía escribiendo $\partial(\frac{1}{2}\rho v^2)/\partial t = \rho v_i \partial v_i/\partial t$ y sustituyendo $\partial v_i/\partial t$ por la expresión correspondiente que se obtiene mediante la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

El resultado es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\rho \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

$$= -\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

En esta expresión $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$ designa el vector cuyas componentes son $v_i\sigma'_{ik}$. Puesto que $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ en el caso de un fluido incompresible, podemos escribir el primer término del segundo miembro como una divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{16.1}$$

La expresión entre corchetes es exactamente la densidad de flujo de energía en el fluido: el término $\rho\mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + p/\rho)$ es el flujo de energía debido a la transferencia real de masa de fluido y equivale al flujo de energía correspondiente a un fluido ideal [ver (10.5)]. El segundo término, $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$, es el flujo de energía debido a los procesos de rozamiento interno. Pero la presencia de la viscosidad da como resultado un flujo de impulso σ'_{ik}; sin embargo, en una transferencia de impulso siempre interviene una transferencia de energía y el flujo de energía es evidentemnte igual al producto escalar del flujo de impulso por la velocidad.

Si integramos (16.1) respecto a un volumen V, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \tfrac{1}{2}\rho v^2 \, \mathrm{d}V = -\oint \left[\rho \mathbf{v}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'\right]\cdot \mathrm{d}\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}V. \tag{16.2}$$

El primer término del segundo miembro nos da la variación respecto al tiempo de la energía cinética del fluido contenido en V debido al flujo de energía a través de la superficie que limita a V. La integral del segundo término es, en consecuencia, la disminución por unidad de tiempo de la energía cinética debida a la disipación.

Si se extiende la integración al volumen total del fluido, la integral de superficie se anula (puesto que la velocidad se anula en el infinito†) y encontramos que la energía disipada por unidad de tiempo en la totalidad del fluido es

$$\dot{E}_k = -\int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,dV.$$

En fluidos incompresibles, el tensor σ'_{ik} viene dado por (15.8), de modo que

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right).$$

Es fácil de comprobar que en esta expresión puede escribirse

$$\tfrac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

Así pues, tenemos, finalmente, para la disipación de energía en un fluido incompresible

$$\dot{E}_k = -\tfrac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \tag{16.3}$$

La disipación conduce a una disminución de energía mecánica, es decir, debemos tener $E_{kin} < 0$. Sin embargo, la integral (16.3) es siempre positiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el coeficiente de viscosidad η es siempre positivo.

PROBLEMA

Transformar la integral (16.3) correspondiente a un flujo potencial en una integral extendida a la superficie que limita a la región del flujo.

Solución. Poniendo $\partial v_i/\partial x_k = \partial v_k/\partial x_i$ e integrando una vez por partes, encontramos

$$\dot{E}_k = -2\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 dV = -2\eta\int v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}df_k,$$

o sea

$$\dot{E}_k = -\eta\int \mathbf{grad}\,v^2\cdot d\mathbf{f}.$$

§ 17. Flujo en una tubería

Consideremos ahora algunos problemas sencillos de movimiento de un fluido viscoso incompresible.

Supongamos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con una velocidad relativa constante **u**. Tomemos uno de ellos

† Se considera el movimiento del fluido en un sistema de coordenadas donde el fluido se encuentra en reposo en el infinito. En este momento y en otros semejantes nos referimos para mayor precisión a vólúmenes infinitos de fluido, pero sin que esto implique pérdida de generalidad. En el caso de un fluido encerrado en un volumen finito, la integral de superficie también se anula, debido a que se hace cero la componente de la velocidad normal a la superficie.

como plano xz con el eje x en la dirección **u**. Es evidente que todas las magnitudes dependen solamente de y, y que la velocidad del fluido está siempre dirigida en la dirección x. A partir de (15.7) obtenemos para el flujo estacionario

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}y = 0, \qquad \mathrm{d}^2v/\mathrm{d}y^2 = 0.$$

(La ecuación de continuidad se satisface idénticamente.) De aquí que p = constante, $v = ay + b$. Para $y = 0$ e $y = h$ (siendo h la distancia entre los planos) resulta, respectivamente, $v = 0$ y $v = u$. Así pues,

$$v = yu/h. \tag{17.1}$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades del fluido es lineal. La velocidad media del fluido, definida como

$$\bar{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v\,\mathrm{d}y,$$

es

$$\bar{v} = \tfrac{1}{2}u. \tag{17.2}$$

Según (15.12) vemos que la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente p, como es lógico, mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano $y = 0$ es

$$\sigma_{xy} = \eta\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}y = \eta u/h; \tag{17.3}$$

y la fuerza sobre el plano $y = h$ es $-\eta u/h$.

A continuación, consideremos el flujo estacionario entre dos planos paralelos fijos en presencia de un gradiente de presión. Escojeremos las coordenadas como antes; el eje x en la dirección del movimiento del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes, puesto que la velocidad depende evidentemente sólo de y, nos dan:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

La segunda ecuación demuestra que la presión es independiente de y, es decir, que es constante a través de la profundidad del fluido situado entre dos planos. El segundo miembro de la primera ecuación es, por tanto, una función solamente de x, mientras que el primer miembro es solamente una función de y; esto únicamente puede ser cierto si ambos miembros son constantes. Así pues, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ = constante, es decir, la presión es una función lineal de la coordenada x a lo largo de la dirección del flujo. Para la velocidad obtenemos ahora

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2 + ay + b.$$

Se determinan las constantes a y b a partir de las condiciones límites, $v = 0$ para $y = 0$ e $y = h$. El resultado es

$$v = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}[\tfrac{1}{4}h^2 - (y - \tfrac{1}{2}h)^2]. \tag{17.4}$$

Así pues, la velocidad varía parabólicamente a través del fluido, alcanzando su valor máximo en la mitad. La velocidad media del fluido (promediada en toda la profundidad del mismo) es de nuevo

$$\bar{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v\, dy;$$

y al calcular esta expresión, se encuentra

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17.5}$$

Podemos también calcular la fuerza de rozamiento $\sigma_{xy} = \eta(\partial v/\partial y)_{y=0}$ que actúa sobre uno de los planos fijos. La sustitución de (17.4) da

$$\sigma_{xy} = -\tfrac{1}{2}h\, dp/dx. \tag{17.6}$$

Finalmente, consideremos el flujo estacionario en una tubería de sección recta arbitraria (que es, sin embargo, la misma a lo largo de la longitud completa de la misma). Tomaremos el eje de la tubería como el eje x. Evidentemente, la velocidad de fluido está dirigida a lo largo del eje x en todos los puntos y es una función solamente de y y z. La ecuación de continuidad se satisface idénticamente, mientras que las componentes y y z de la ecuación de Navier-Stokes nos dan de nuevo $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$, es decir, la presión es constante en toda la sección recta de la tubería. La componente x de la ecuación (15.7) nos da:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17.7}$$

De nuevo se tiene la conclusión de que $dp/dx =$ constante; el gradiente de presión puede, por consiguiente, escribirse $-\Delta p/l$, siendo Δp la diferencia de presiones entre los extremos de la tubería y l su longitud.

Así pues, la distribución de velocidades correspondiente al flujo en una tubería está determinado por una ecuación bidimensional de la forma $\Delta v =$ constante. Esta ecuación ha de resolverse con la condición límite $v = 0$ en la periferia de la sección recta de la tubería. Resolveremos la ecuación para una tubería de sección recta circular. Tomando el origen en el centro del círculo y utilizando coordenadas polares, tenemos por simetría que $v = v(r)$. Utilizando la expresión correspondiente a la laplaciana en coordenadas polares, tenemos

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

Integrando, encontramos

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \log r + b. \tag{17.8}$$

La constante a debe ponerse igual a cero, puesto que la velocidad debe permanecer finita en el centro de la tubería. Se determina la constante b a partir del requisito de que $v = 0$ para $r = R$, siendo R el radio de la tubería. Entonces se tiene

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{17.9}$$

Así pues, la distribución de velocidades a través de la tubería es parabólica.

Es sencillo determinar la masa Q de fluido que pasa cada segundo a través de una sección recta cualquiera de la tubería (denominada *caudal*). A través de un elemento anular $2\pi r\, dr$ del área de la sección recta pasa por segundo una masa $\rho \cdot 2\pi r v\, dr$. De aquí que

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v\, dr.$$

Utilizando (17.9), obtenemos

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4. \tag{17.10}$$

Por tanto, la masa de fluido es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería (*fórmula de Poiseuille*).

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo en una tubería de sección recta anular, siendo los radios interno y externo R_1 y R_2.

Solución. Determinando las constantes a y b en la función general (17.8) a partir de las condiciones de que $v = 0$ para $r = R_1$ y $r = R_2$, encontramos

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\log (R_2/R_1)} \log \frac{r}{R_2}\right].$$

El caudal es

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\log (R_2/R_1)}\right].$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero en el caso de una tubería de sección recta elíptica.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (17.7) en la forma $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Se determinan las constantes A, B y C a partir del requisito de que esta expresión debe satisfacer la condición límite $v = 0$ en la circunferencia de la elipse (es decir, $Ay^2 + Bz^2 +$

$+ C = 0$ debe ser igual que la ecuación $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, en donde a y b son los semiejes de la elipse). El resultado es

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right).$$

El caudal es

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{4\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Problema 3. Igual que el problema 1, pero en el caso de una tubería cuya sección recta sea un triángulo equilátero de lado a.

Solución. La solución de la ecuación (17.7) que se anula en los límites del triángulo es

$$v = \frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}a\eta}h_1h_2h_3,$$

en donde h_1, h_2, h_3 son las longitudes de las perpendiculares desde un punto determinado del triángulo a sus tres lados. En efecto, cada uno de los laplacianos Δh_1, Δh_2, Δh_3 (en donde $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) es nulo; esto resulta del hecho de cada una de las perpendiculares h_1, h_2, h_3 puede tomarse como eje y o z y el resultado de aplicar el laplaciano a una coordenada es cero. Por consiguiente, tenemos

$$\Delta(h_1h_2h_3) = 2(h_1\,\mathbf{grad}\,h_2\cdot\mathbf{grad}\,h_3 + h_2\,\mathbf{grad}\,h_3\cdot\mathbf{grad}\,h_1 + h_3\,\mathbf{grad}\,h_1\cdot\mathbf{grad}\,h_2).$$

Pero $\mathbf{grad}\,h_1 = \mathbf{n}_1$, $\mathbf{grad}\,h_2 = \mathbf{n}_2$, $\mathbf{grad}\,h_3 = \mathbf{n}_3$, en donde $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ son vectores unidad a lo largo de las perpendiculares h_1, h_2, h_3. Dos cualesquiera de los vectores $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$ forman entre sí un ángulo $2\pi/3$, de modo que $\mathbf{grad}\,h_1 \cdot \mathbf{grad}\,h_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$, y así sucesivamente. Obtenemos, por tanto, la relación

$$\Delta(h_1h_2h_3) = -(h_1+h_2+h_3) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}a,$$

y vemos que entonces queda satisfecha la ecuación (17.7). El caudal es

$$Q = \frac{\sqrt{3}a^4\Delta p}{320\nu l}.$$

Problema 4. Un cilindro de radio R_1 se mueve con velocidad u dentro de un cilindro coaxial de radio R_2, siendo paralelos sus ejes. Determinar el movimiento del fluido que ocupa el espacio situado entre los cilindros.

Solución. Consideremos coordenadas cilíndricas, con el eje z situado a lo largo de los ejes de los cilindros. La velocidad de todos los puntos está dirigida a lo largo del eje z y depende sólo de r (como, asimismo, la presión): $v_z = v(r)$. Obtenemos para v la ecuación

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = 0;$$

el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = v\,\partial v/\partial z$ se anula idénticamente. Utilizando las condiciones límites $v = u$ para $r = R_1$ y $v = 0$ para $r = R_2$, se tiene

$$v = u\frac{\log(r/R_2)}{\log(R_1/R_2)}.$$

La fuerza de rozamiento por unidad de longitud en cualquier cilindro es $2\pi\eta u/\log(R_2/R_1)$.

Problema 5. Una capa de fluido de espesor h está limitada por encima por una superficie libre y por debajo por un plano fijo inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Determinar el flujo debido a la gravedad.

Solución. Tomaremos el plano fijo como plano xy, con el eje x en la dirección del flujo (figura 6). Buscaremos una solución que dependa solamente de z. Las ecuaciones de Navier-Stokes con $v_x = v(z)$ en un campo gravitatorio son

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2} + \rho g \operatorname{sen}\alpha = 0, \qquad \frac{dp}{dz} + \rho g \cos\alpha = 0.$$

En la superficie libre ($z = h$) debemos tener $\sigma_{xz} = \eta dv/dz = 0$, $\sigma_{zz} = -p = -p_0$ (siendo p_0 la presión atmosférica). Para $z = 0$ debemos tener $v = 0$. La solución que satisface estas condiciones es

$$p = p_0 + \rho g(h-z)\cos\alpha, \qquad v = \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\eta} z(2h-z).$$

El caudal, por unidad de longitud en la dirección y, es

$$Q = \rho \int_0^h v\,dz = \frac{\rho g h^3 \operatorname{sen}\alpha}{3\nu}.$$

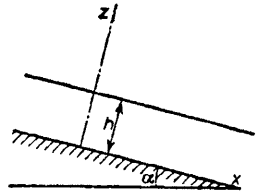

FIG. 6

Problema 6. Determinar el modo en que disminuye la presión a lo largo de un tubo de sección recta circular en el que está fluyendo isotérmicamente un gas perfecto viscoso (recordando que la viscosidad dinámica de un gas perfecto es independiente de la presión).

Solución. En una sección corta de la tubería puede suponerse que el gas es incompresible, siempre que el gradiente de presiones no sea demasiado alto, y, por consiguiente, podemos utilizar la fórmula (17.10), de acuerdo con la cual

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}.$$

Sin embargo, en distancias mayores ρ varía y la presión no es una función lineal de x. De acuerdo con la ecuación de estado, la densidad del gas es $\rho = mp/kT$, en donde m es la masa de una molécula y k la constante de Boltzmann, de modo que

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q k T}{\pi m R^4}\cdot\frac{1}{p}.$$

(El caudal Q del gas a través del tubo es evidentemente el mismo, sea o no el gas incompresible.) A partir de esta expresión encontramos

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta Q k T}{\pi m R^4} l,$$

en donde p_2 y p_1 son las presiones en los extremos de una sección de tubo de longitud l.

§ 18. Flujo entre cilindros en rotación

Consideremos ahora el movimiento de un fluido entre dos cilindros coaxiales infinitos de radio R_1, R_2 ($R_2 > R_1$), girando alrededor de sus ejes con velocidades angulares Ω_1, Ω_2. Tomaremos coordenadas cilíndricas r, ϕ, z, con el eje z a lo largo de los ejes de los cilindros. Por la simetría del problema es evidente que

$$v_z = v_r = 0, \qquad v_\phi = v(r), \qquad p = p(r).$$

La ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas da en este caso dos ecuaciones:

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = \rho v^2/r, \tag{18.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{18.2}$$

La última ecuación tiene solución en la forma r^n; sustituyendo resulta $n = \pm 1$, de modo que

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Las constantes a y b se deducen de las condiciones límites, de acuerdo con las cuales la velocidad del fluido en las superficies cilíndricas internas y externas deben ser iguales a las del cilindro correspondiente: $v = R_1\Omega_1$ para $r = R_1$, $v = R_2\Omega_2$ para $r = R_2$. Como resultado tenemos que la distribución de velocidades es

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{18.3}$$

Entonces se encuentra la distribución de presiones mediante (18.1) por una integración directa.

Para $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ tenemos simplemente que $v = \Omega r$, es decir, el fluido gira rígidamente con los cilindros. Cuando está ausente el cilindro exterior ($\Omega_2 = 0$, $R_2 \to \infty$) tenemos $v = \Omega_1 R_1^2/r$.

Determinemos también el momento de las fuerzas de rotación que actúan sobre los cilindros. La fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del cilindro interior está dirigida a lo largo de la tangente a su super-

ficie y, según (15.12), es igual a la componente $\sigma'_{r\phi}$ del tensor de tensiones. Utilizando las fórmulas (15.5), se tiene

$$[\sigma'_{r\phi}]_{r=R_1} = \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\right]_{r=R_1}$$

$$= -2\eta\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del cilindro se obtiene multiplicando por $2\pi R_1$, y el momento M_1 de esa fuerza multiplicando el resultado por R_1. Así pues, se tiene

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{18.4}$$

El momento M_2 de las fuerzas que actúan sobre el cilindro interno es evidentemente $-M_1$.†

Puede hacerse la siguiente observación general respecto a las soluciones de las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso que se han obtenido en §§ 17 y 18. En todos estos casos el término no lineal $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en las ecuaciones que determinan la distribución de velocidades es idénticamente nulo, de modo que estamos resolviendo realmente ecuaciones lineales, hecho que simplifica mucho el problema. Por esta razón, todas las soluciones satisfacen también las ecuaciones del movimiento correspondiente a un fluido ideal incompresible, por ejemplo, las que se presentan en la forma (10.2) y (10.3). Esta es la razón por la cual las fórmulas (17.1) y (18.3) no contienen en absoluto el coeficiente de viscosidad. Este coeficiente aparece solamente en las fórmulas, como la (17.9), que relaciona la velocidad con el gradiente de presiones en el fluido, puesto que la presencia de un gradiente de presión se debe a la viscosidad; un fluido ideal podría fluir por una tubería aunque no existiese ningún gradiente de presión.

§ 19. Ley de semejanza

Al estudiar el movimiento de fluidos viscosos podemos obtener un cierto número de resultados importantes a partir de razonamientos sencillos que se refieren a las dimensiones de las diversas magnitudes físicas. Consideremos un tipo cualquiera particular de movimiento, por ejemplo, el movimiento de un cuerpo de una forma definida a través de un fluido. Si el cuerpo no es una esfera, debe también especificarse su dirección de movimiento: por

† La solución del problema más complejo del movimiento de un fluido viscoso en un espacio estrecho situado entre dos cilindros cuyos ejes son paralelos, pero no coincidentes, puede encontrarse en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics (Teoreticheskaya gidromekhamika)*, parte 2, 3.ª ed., p. 419, Moscow, 1948; A. SOMMERFELD, *Mechanics of Deformable Bodies*, § 36, Academic Press, New York, 1950.

ejemplo, el movimiento de un elipsoide en la dirección de su eje mayor o menor. O bien, podemos estar considerando el flujo en una región con límites de una forma definida (una tubería de sección recta determinada, etc.).

En estos casos decimos que los cuerpos de la misma forma son geométricamente semejantes; pueden obtenerse uno del otro cambiando todas las dimensiones lineales en la misma relación. De aquí que, si se da la forma del cuerpo, basta con especificar cualquiera de sus dimensiones lineales (el radio de una esfera o de una tubería cilíndrica, un semieje de un esferoide de una excentricidad determinada, y así sucesivamente) con objeto de determinar por completo sus dimensiones.

Consideremos en el momento actual el flujo estacionario. Si estamos discutiendo, por ejemplo, el flujo que rodea a un cuerpo sólido (que es el caso que analizaremos a continuación, para ser más concretos), debe ser constante la velocidad de la corriente principal. Supondremos que el fluido es incompresible.

De los parámetros que caracterizan al propio fluido, solamente aparece en las ecuaciones de la hidrodinámica (ecuación de Navier-Stokes) la viscosidad cinemática $\nu = \eta/\rho$; las funciones incógnitas que han de determinarse resolviendo las ecuaciones son la velocidad $\mathbf{v}$ y el cociente p/ρ entre la presión p y la densidad constante ρ. Además, el flujo depende, a través de las condiciones límites, de la forma y dimensiones del cuerpo que se mueve a través del fluido y de su velocidad. Puesto que se supone que la forma del cuerpo es conocida, quedan determinadas sus propiedades geométricas mediante una sola dimensión lineal, que designaremos por l. Supongamos que la velocidad de la corriente principal es u. Entonces cualquier flujo viene especificado por tres parámetros, ν, u y l. Estas magnitudes tienen las siguientes dimensiones:

$$\nu = \text{cm}^2/\text{s}, \qquad l = \text{cm}, \qquad u = \text{cm/s}.$$

Es sencillo de comprobar que sólo puede formarse una magnitud adimensional con las tres anteriores, a saber, ul/ν. Esta combinación se denomina *número de Reynolds* y se designa por R:

$$\mathrm{R} = \rho ul/\eta = ul/\nu. \tag{19.1}$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse en función de R.

A continuación, mediremos las longitudes en función de l y la velocidad en función de u, es decir, introduciremos las magnitudes adimensionales $\mathbf{r}/l$, $\mathbf{v}/u$. Puesto que el único parámetro adimensional es el número de Reynolds, es evidente que la distribución de velocidad obtenida resolviendo las ecuaciones del flujo incompresible viene dada por una función de la forma

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}(\mathbf{r}/l, \mathrm{R}). \tag{19.2}$$

A partir de esta expresión se ve que, en dos flujos diferentes del mismo tipo (por ejemplo, flujo que rodea a esferas de radios distintos siendo los fluidos de viscosidades diferentes), las velocidades $\mathbf{v}/u$ son las mismas funciones del cociente $\mathbf{r}/l$ si el número de Reynolds es el mismo para cada flujo. Los flujos que pueden obtenerse unos de otros, cambiando simplemente la unidad de medida de las coordenadas de velocidades, se dice que son *semejantes*. Así pues, los flujos del mismo tipo con los mismos números de Reynolds son semejantes. Esto se denomina *ley de semejanza* (O. REYNOLDS, 1883).

Puede escribirse una fórmula semejante a (19.2) para la distribución de presiones de los fluidos. Para ello, debemos construir a partir de los parámetros ν, l, u, alguna magnitud con las dimensiones de presión dividida por densidad; esta magnitud puede ser u^2, por ejemplo. Entonces podemos decir que $p/\rho u^2$ es una función de la variable adimensional $\mathbf{r}/l$ y del parámetro adimensional R. Así pues,

$$p = \rho u^2 f(\mathbf{r}/l, \mathrm{R}). \tag{19.3}$$

Finalmente, pueden también aplicarse consideraciones análogas a magnitudes que caracterizan el flujo pero que no sean funciones de las coordenadas. Una magnitud de este tipo es, por ejemplo, la fuerza de arrastre F que actúa sobre el cuerpo. Podemos decir que el cociente adimensional de F con alguna magnitud formada con ν, u, l, ρ y que tengan las dimensiones de fuerza debe ser una función del número de Reynolds solamente. Dicha combinación de ν, u, l, ρ puede ser $\rho u^2 l^2$, por ejemplo. Entonces,

$$F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R}). \tag{19.4}$$

Si la fuerza de la gravedad tiene un efecto importante sobre el flujo, entonces este último está determinado no por tres parámetros, sino por cuatro, l, u, ν y la aceleración debida a la gravedad g. Con estos parámetros podemos construir, no una, sino dos magnitudes independientes adimensionales. Éstas pueden ser, por ejemplo, el número de Reynolds y el *número de Froude*, que es

$$\mathrm{F} = u^2/lg. \tag{19.5}$$

En las fórmulas (19.2)-(19.4) la función f dependerá ahora, no de un parámetro, sino de dos (R y F) y dos flujos serán semejantes únicamente si los dos números poseen los mismos valores.

Finalmente, diremos algo respecto a los flujos no estacionarios. Un flujo no estacionario de un determinado tipo está caracterizado no sólo por las magnitudes ν, u, l, sino también por algún intervalo de tiempo τ característico de flujo que determina la variación de flujo respecto al tiempo. Por ejemplo, en las oscilaciones, de acuerdo con una ley determinada, de un cuerpo sólido de una forma determinada y sumergida en un fluido, τ puede ser el período de oscilación. A partir de las cuatro magnitudes ν, u, l, τ, podemos

construir de nuevo dos magnitudes adimensionales independientes, que pueden ser el número de Reynolds y el número

$$S = u\tau/l, \tag{19.6}$$

a veces denominado *número de Strouhal*. En estos casos tiene lugar un movimiento semejante sólo si todos estos números tienen los mismos valores.

Si las oscilaciones del fluido se presentan espontáneamente (y no bajo la acción de una fuerza excitadora externa determinada), entonces el movimiento de un tipo determinado S será una función definida de R:

$$S = f(R).$$

§ 20. Fórmula de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes se simplifica considerablemente en el caso de flujos con números de Reynolds pequeños. En el caso de flujo estacionario de un fluido incompresible esta ecuación es

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p + (\eta/\rho)\,\Delta\mathbf{v}.$$

El término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ es del orden de magnitud de u^2/l, teniendo u y l el mismo significado que en § 19. La magnitud $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v}$ es del orden de magnitud de $\eta u/\rho l^2$. El cociente de las dos es precisamente el número de Reynolds. De aquí que pueda despreciarse el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ si es pequeño el número de Reynolds y entonces la ecuación del movimiento se reduce a una ecuación lineal

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \mathbf{grad}\,p = 0. \tag{20.1}$$

Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{20.2}$$

determina por completo el movimiento. Es interesante señalar también la ecuación

$$\Delta\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0, \tag{20.3}$$

que se obtiene tomando el rotacional de la ecuación (20.1).

Como ejemplo, consideremos el movimiento rectilíneo y uniforme de una esfera en un fluido viscoso. El problema del movimiento de una esfera es exactamente equivalente, como es obvio, al del flujo que pasa alrededor de una esfera fija, teniendo el fluido una velocidad determinada $\mathbf{u}$ en el infinito. La distribución de velocidades en el primer problema se obtiene respecto a la del segundo problema restando simplemente la velocidad $\mathbf{u}$; el fluido entonces está en reposo en el infinito, mientras que la esfera se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$. Si consideramos el flujo como estacionario debemos, como es natural, hablar del flujo que pasa rodeando una esfera fija, puesto

que cuando la esfera se mueve, la velocidad del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo.

Así pues, debemos tener $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en el infinito; haremos $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$, de modo que $\mathbf{v}'$ sea cero en el infinito. Puesto que $\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$, $\mathbf{v}'$ puede escribirse como rotacional de un vector dado: $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} + \mathbf{u}$. El rotacional de un vector polar se sabe bien que es un vector axial y viceversa. Puesto que la velocidad es un vector polar ordinario, $\mathbf{A}$ debe ser un vector axial. Ahora bien, $\mathbf{v}$, y por consiguiente $\mathbf{A}$, depende sólo del radio vector $\mathbf{r}$ (tomamos el origen en el centro de la esfera) y del parámetro $\mathbf{u}$; ambos vectores son polares. Además, $\mathbf{A}$ debe, evidentemente, ser una función lineal de $\mathbf{u}$. El único vector axial que puede construirse para un cuerpo con simetría total (la esfera) con dos vectores polares es el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$. De aquí que $\mathbf{A}$ deba tener la forma $f'(r)\mathbf{n} \times \mathbf{u}$, en donde $f'(r)$ es una función escalar de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección del radio vector. El producto $f'(r)\mathbf{n}$ puede escribirse como un gradiente, $\mathbf{grad}\, f(r)$, de una determinada función $f(r)$, de modo que la forma general de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{grad}\, f \times \mathbf{u}$. De aquí que podamos escribir la velocidad $\mathbf{v}'$ como

$$\mathbf{v}' = \mathbf{rot}\,[\mathbf{grad}\, f \times \mathbf{u}].$$

Puesto que $\mathbf{u}$ es constante, $\mathbf{grad}\, f \times \mathbf{u} = \mathbf{rot}\,(f\mathbf{u})$, de modo que

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,(f\mathbf{u}) + \mathbf{u}. \tag{20.4}$$

Para determinar la función f, utilizaremos la ecuación (20.3). Puesto que

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(f\mathbf{u}) = (\mathbf{grad}\,\operatorname{div} - \Delta)\mathbf{rot}(f\mathbf{u}) = -\Delta\,\mathbf{rot}(f\mathbf{u}),$$

(20.3) toma la forma $\Delta^2\,\mathbf{rot}(f\mathbf{u}) = 0$, o sea, puesto que $\mathbf{u}$ = constante,

$$\Delta^2(\mathbf{grad} f \times \mathbf{u}) = (\Delta^2\,\mathbf{grad} f) \times \mathbf{u} = 0.$$

deduciéndose de esto que

$$\Delta^2\,\mathbf{grad} f = 0. \tag{20.5}$$

Una primera integración da

$$\Delta^2 f = \text{constante},$$

Es fácil ver que la constante debe ser nula, puesto que la velocidad $\mathbf{v}$ debe anularse en el infinito y lo mismo debe ocurrir con sus derivadas. La expresión $\Delta^2 f$ contiene cuatro derivadas de f, mientras que la velocidad se da en función de las derivadas segundas de f. Así pues, tenemos

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Delta f = 0.$$

De aquí

$$\Delta f = 2a/r + A.$$

La constante A debe ser nula si la velocidad ha de anularse en el infinito. A partir de $\Delta f = 2a/r$ obtenemos

$$f = ar + b/r. \tag{20.6}$$

Se omite la constante aditiva, puesto que carece de importancia (ya que la velocidad viene dada por las derivadas de f).

Al sustituir en (20.4), tenemos, después de un cálculo sencillo,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u}+\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{r} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{u}}{r^3}. \tag{20.7}$$

Las constantes a y b han de determinarse mediante las condiciones límites: en la superficie de la esfera ($r = R$), $\mathbf{v} = 0$, es decir,

$$\mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u}+\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{R} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{u}}{R^3} = 0.$$

Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo $\mathbf{n}$, los coeficientes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})$ deben todos ellos anularse:

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1 = 0, \qquad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0.$$

De aquí que $a = 3R/4$, $b = R^3/4$. Así pues, tenemos finalmente

$$f = \tfrac{3}{4}Rr + \tfrac{1}{4}R^3/r, \tag{20.8}$$

$$\mathbf{v} = -\tfrac{3}{4}R\frac{\mathbf{u}+\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{r} - \tfrac{1}{4}R^3\frac{\mathbf{u}-3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{r^3} + \mathbf{u}, \tag{20.9}$$

o bien, en componentes esféricas,

$$\begin{aligned} v_r &= u\cos\theta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right], \\ v_\theta &= -u\,\mathrm{sen}\,\theta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]. \end{aligned} \tag{20.10}$$

Esto da la distribución de velocidades alrededor de la esfera móvil. Para determinar la presión, sustituiremos (20.4) en (20.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\,p = \eta\triangle\mathbf{v} &= \eta\triangle\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\ (f\mathbf{u}) \\ &= \eta\triangle(\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,(f\mathbf{u}) - \mathbf{u}\triangle f). \end{aligned}$$

Pero $\triangle^2 f = 0$, y, por tanto,

$$\mathbf{grad}\,p = \mathbf{grad}[\eta\triangle\mathrm{div}(f\mathbf{u})] = \mathbf{grad}(\eta\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\triangle f).$$

De aquí que

$$p = \eta\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\triangle f + p_0, \tag{20.11}$$

siendo p_0 la presión del fluido en el infinito. Sustituyendo f se tiene como expresión final

$$p = p_0 - \tfrac{3}{2}\eta \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{r^2} R. \tag{20.12}$$

Utilizando las fórmulas anteriores podemos calcular la fuerza **F** ejercida sobre la esfera por el fluido móvil (o lo que es lo mismo, el arrastre sobre la esfera cuando se mueve a través del fluido). Para ello, tomaremos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a **u**; por simetría, todas las magnitudes son funciones únicamente de r y del ángulo polar θ. La fuerza **F** es, evidentemente, paralela a la velocidad **u**. Puede determinarse el valor de esta fuerza mediante (15.12). Tomando de esta fórmula las componentes normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de la superficie de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección de **u**, encontramos

$$F = \oint (-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\operatorname{sen}\theta)\mathrm{d}f, \tag{20.13}$$

en donde la integración ha de realizarse sobre la totalidad de la superficie de la esfera.

Sustituyendo las expresiones (20.10) en las fórmulas

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

[ver (15.17)], encontramos que en la superficie de la esfera

$$\sigma'_{rr} = 0, \qquad \sigma'_{r\theta} = -(3\eta/2R)u\operatorname{sen}\theta,$$

mientras que la presión (20.12) es $p = p_0 - (3\eta/2R)u\cos\theta$. De aquí que la integral (20.13) se reduzca a $F = (3\eta u/2R)\ \mathrm{d}f$, o sea, finalmente,†

$$F = 6\pi R\eta u. \tag{20.14}$$

Esta fórmula (denominada *fórmula de Stokes*) da el arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve lentamente en un fluido. Podemos observar que el arrastre es proporcional a la primera potencia de la velocidad y de la dimensión lineal del cuerpo.‡

† Previendo algunas aplicaciones posteriores, podemos mencionar que si se hacen los cálculos con la fórmula (20.7) para la velocidad (estando indeterminadas las constantes a y b), se tiene

$$F = 8\pi a\eta u. \tag{20.14a}$$

‡ También puede calcularse el arrastre en el caso de un elipsoide de forma cualquiera y en movimiento lento. Las fórmulas correspondientes vienen dadas por H. LAMB, *Hidrodynamics*, 6.ª ed., § 339, Cambridge, 1932. Damos a continuación las expresiones límites correspondientes a un disco circular plano de radio R moviéndose perpendicularmente a su plano:

$$F = 16\eta R u$$

y para un disco análogo moviéndose en su plano:

$$F = 32\eta R u/3.$$

Esta dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas. La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad; la forma general de la relación entre **F** y **u** puede escribirse

$$F_i = a_{ik} u_k, \tag{20.15}$$

en donde a_{ik} es un tensor de rango dos independiente de la velocidad. Es importante señalar que este tensor es simétrico ($a_{ik} = a_{ki}$), resultado que es válido en la proximación lineal respecto a la velocidad y que es un caso particular de una ley general válida para el movimiento lento acompañado por procesos disipativos.†

La solución que acabamos de obtener para el flujo que rodea a una esfera no es válida a grandes distancias de ella, aunque el número de Reynolds sea pequeño. Con objeto de darse cuenta de esto estimaremos el valor del término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$, que despreciamos en (20.1). A grandes distancias la velocidad es **u**. Se ve a partir de (20.9) que las derivadas de la velocidad a estas distancias son del orden de uR/r^2. Así pues, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ es del orden de u^2R/r^2. Los términos retenidos en la ecuación (20.1), por ejemplo $(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p$, son del orden de $\eta Ru/\rho r^3$ [ver ecuación (20.12)]. La condición

$$u\eta R/\rho r^3 \gg u^2R/r^2$$

es válida únicamente a distancias $r \ll \nu/u$, siendo $\nu = \eta/\rho$. A distancias mayores, los términos que hemos omitido no pueden despreciarse legítimamente y la distribución de velocidades obtenida es incorrecta.

Para obtener la distribución de velocidades a distancias grandes del cuerpo, hemos de tener el cuenta el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ omitido en (20.1). Puesto que la velocidad **v** es casi igual a **u** a esta distancia, podemos poner aproximadamente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}$ en lugar de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$. Entonces encontramos para la velocidad, a distancias grandes, la ecuación lineal

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p + \nu \triangle \mathbf{v} \tag{20.16}$$

(C. W. OSEEN, 1910).

No nos detendremos aquí para dar la solución de esta ecuación en el caso de un flujo que rodea a una esfera,‡ sino que simplemente mencionaremos el hecho de que la distribución de velocidades así obtenida puede utilizarse para deducir una fórmula más exacta para el arrastre sobre la esfera, en la

† Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 120, Ed. Reverté, Barcelona.

‡ Una descripción detallada de los cálculos en el caso de una esfera y un cilindro vienen dados en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics (Teoreticheskaya gidromekhamika)*, parte 2, 3.ª ed., capítulo II, §§ 25-26, Moscow, 1948; H. LAMB, *Hydrodinamics*, 6.ª ed., §§ 342-3, Cambridge, 1932.

que se incluye el término siguiente del desarrollo del arrastre en potencias del número de Reynolds uR/ν. Esta fórmula es†

$$F = 6\pi\eta uR\left(1 + \frac{3uR}{8\nu}\right). \tag{20.17}$$

Finalmente, mencionaremos que, al resolver el problema del flujo que rodea a un cilindro infinito con la corriente principal perpendicular al eje del mismo, se ha utilizado la ecuación de Oseen desde el principio; en este caso, la ecuación (20.1) no tiene ninguna solución que satisfaga las condiciones límites en la superficie de cilindro y que al mismo tiempo se anule en el infinito. El arrastre por unidad de longitud del cilindro resulta ser

$$F = \frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - \gamma - \log(uR/4\nu)}, \tag{20.18}$$

en donde $\gamma \fallingdotseq 0{,}577$ es la constante de Euler.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el movimiento de un fluido que ocupa el espacio situado entre dos esferas concéntricas de radio R_1, R_2 ($R_2 > R_1$), y que giran uniformemente alrededor de diámetros diferentes con velocidades angulares Ω_1, Ω_2; los números de Reynolds $\Omega_1 R_1^2/\nu$, $\Omega_2 R_2^2/\nu$ son pequeños en comparación con la unidad.

Solución. Para tener en cuenta la linealidad de las ecuaciones, puede considerarse el movimiento entre dos esferas en rotación como la superposición de dos movimientos obtenidos cuando una esfera está en reposo y la otra gira. Primero supondremos $\Omega_2 = 0$, es decir, que únicamente está girando la esfera interior. Es razonable suponer que la velocidad del fluido en todo punto está dirigida a lo largo de la tangente a una circunferencia contenida en un plano perpendicular al eje de rotación y con su centro sobre el eje. Para tener en cuenta la simetría axial, el gradiente de presiones en esta dirección es cero. De aquí que la ecuación del movimiento (20.10) resulte $\Delta\mathbf{v} = 0$. El vector velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_1$ es un vector axial. Razonamientos semejantes a los dados previamente muestran que la velocidad puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{\Omega}_1] = \mathbf{grad} f \times \boldsymbol{\Omega}_1.$$

La ecuación del movimiento da entonces $\mathbf{grad}\,\Delta f \times \boldsymbol{\Omega}_1 = 0$. Puesto que el vector $\mathbf{grad}\,\Delta f$ es paralelo al radio vector, y el producto vectorial $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_1$ no puede ser nulo para un $\boldsymbol{\Omega}_1$ determinado y un radio $\mathbf{r}$ arbitrario, debemos tener $\mathbf{grad}\,\Delta f = 0$, de modo que

$$\Delta f = \text{constante}.$$

† A primera vista podría parecer que la ecuación de OSEEN, que no da correctamente la distribución de velocidades cerca de la esfera, no podría utilizarse para calcular la corrección al arrastre. Sin embargo, de hecho, la contribución a $\mathbf{F}$, debida al movimiento del fluido próximo (en donde $u \ll \nu/r$), debe desarrollarse en potencias del vector $\mathbf{u}$. El primer término de corrección no nulo en $\mathbf{F}$ que procede de esta contribución es, entonces, proporcional a $u^2\mathbf{u}$, es decir, resulta de segundo orden respecto al número de Reynolds; por tanto, no afecta a la corrección de primer orden de la fórmula (20.17). Con la fórmula de Oseen no pueden calcularse correcciones adicionales a la fórmula de Stokes.

Integrando, tenemos

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a\right)\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}.$$

Se encuentran las constantes a y b mediante las condiciones de que $\mathbf{v} = 0$ para $r = R_2$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $r = R_1$, en donde $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}$ es la velocidad de los puntos situados sobre la esfera en rotación. El resultado es

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}.$$

La presión del fluido es constante ($p = p_0$). Análogamente, tenemos para el caso en el que la esfera exterior gira y la interior está en reposo ($\Omega_1 = 0$)

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}.$$

En el caso general en que ambas esferas giran, tenemos

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left\{\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r} + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}\right\}.$$

Si no existe la esfera exterior ($R_2 = \infty$, $\Omega_2 = 0$), es decir, si tenemos simplemente una esfera de radio R que gira en un fluido infinito, entonces

$$\mathbf{v} = (R^3/r^3)\,\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Calculemos el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre la esfera en este caso. Si tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, tenemos $v_r = v_\theta = 0$, $v_\phi = v = (R^3\Omega/r^2)\,\mathrm{sen}\,\theta$. La fuerza de rozamiento sobre la unidad de área de la esfera es

$$\sigma'_{r\phi} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)_{r=R} = -3\eta\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

El momento total sobre la esfera es

$$M = \int_0^\pi \sigma'_{r\phi}\, R\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot 2\pi R^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

de aquí que encontremos

$$M = -8\pi\eta R^3\Omega.$$

Si no existe la esfera interior, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}$, es decir, el fluido gira rígidamente con la esfera que lo rodea.

Problema 2. Determinar la velocidad de una gota esférica de fluido (de viscosidad η') moviéndose bajo la gravedad en un fluido de viscosidad η (W. RYBCZYNSKI, 1911).

Solución. Utilicemos un sistema de coordenadas en el cual esté en reposo la gota. Para el fluido exterior a la gota buscaremos de nuevo una solución de la ecuación (20.5) en la forma (20.6), de modo que la velocidad tenga la forma (20.7). Para el fluido en el interior de la gota, hemos de encontrar una solución que no tenga una singularidad en $r = 0$ (y deben también permanecer finitas las segundas derivadas de f, que determinan la velocidad). Esta solución es

$$f = \tfrac{1}{4}Ar^2 + \tfrac{1}{8}Br^4,$$

y la velocidad correspondiente es

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - 2\mathbf{u}].$$

En la superficie de la esfera † deben satisfacerse las condiciones siguientes. Deben ser cero las componentes de la velocidad normal hacia el exterior ($\mathbf{v}_e$) y hacia el interior ($\mathbf{v}_i$) de la gota:

$$v_{i,r} = v_{e,r} = 0.$$

Debe ser continua la componente tangencial de la velocidad:

$$v_{i,\theta} = v_{e,\theta},$$

lo mismo debe ocurrir con las componentes $\sigma_{r\theta}$ del tensor de tensiones:

$$\sigma_{i,r\theta} = \sigma_{e,r\theta}.$$

La condición de que las componentes del tensor de tensiones σ_{rr} sean iguales no es necesario escribirlas; simplemente servirían para determinar la velocidad requerida u, que se encuentra de modo más simple del modo indicado a continuación. A partir de las cuatro condiciones anteriores obtenemos cuatro ecuaciones para las constantes a, b, A, B, cuyas soluciones son

$$a = R\frac{2\eta+3\eta'}{4(\eta+\eta')}, \qquad b = R^3\frac{\eta'}{4(\eta+\eta')}, \qquad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta+\eta')}.$$

Según (20.14a), tenemos para el arrastre

$$F = 2\pi u\eta R(2\eta+3\eta')/(\eta+\eta').$$

Cuando $\eta' \to \infty$ (lo que corresponde a una esfera maciza o sólida) esta fórmula se transforma en la de Stokes. En el límite $\eta' \to 0$ (que corresponde a una burbuja gaseosa) tenemos $F = 4\pi u\eta R$, es decir, el arrastre es dos tercios del correspondiente a una esfera sólida.

Igualando F a la fuerza de la gravedad que actúa sobre la gota, $4/3\pi R^3(\rho - \rho')g$, tenemos

$$u = \frac{2R^2g(\rho-\rho')(\eta+\eta')}{3\eta(2\eta+3\eta')}.$$

Problema 3. Dos discos circulares planos paralelos (de radio R) están uno sobre el otro separados una pequeña distancia; el espacio entre ellos está lleno con un cierto fluido. Los discos se aproximan a una velocidad constante u, desplazando al fluido Determinar la resistencia a su movimiento (O. REYNOLDS).

Solución. Tomemos coordenadas cilíndricas con el origen en el centro del disco inferior, que se supone fijo. El flujo es simétrico axialmente, y puesto que la capa de fluido es delgada, predominantemente radial: $v_z \ll v_r$ y también $\partial v_r/\partial r \ll \partial v_r/\partial z$. De aquí que las ecuaciones del movimiento se conviertan en

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

† Podemos despreciar la variación de forma de la gota durante su movimiento, puesto que esta variación es de un orden superior de una magnitud pequeña. Sin embargo, debe recordarse que, con objeto de que la gota móvil sea de hecho esférica, las fuerzas debidas a la tensión superficial en su periferia deben superar a las fuerzas producidas por las diferencias de presión, que tienden a hacer que la gota deje de ser esférica. Esto significa que debemos tener $\eta u/R \ll \alpha/R$, en donde α es el coeficiente de tensión superficial, o sea, al sustituir $u \sim R^2g\rho/\eta$,

$$R \ll \sqrt{(\alpha/\rho g)}.$$

con las condiciones límites

$$\text{en } z = 0: \qquad v_r = v_z = 0;$$

$$\text{en } z = h: \qquad v_r = 0, \qquad v_z = -u;$$

$$\text{en } r = R: \qquad p = p_0,$$

en donde h es la distancia entre dos discos y p_0 la presión externa. A partir de las ecuaciones (1) tenemos

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} z(z-h).$$

Integrando la ecuación (2) respecto a z, obtenemos

$$u = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^h r v_r \,\mathrm{d}z = -\frac{h^3}{12\eta r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right),$$

de aquí que

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}(R^2 - r^2).$$

La resistencia total al disco móvil es

$$F = 3\pi\eta u R^4/2h^3.$$

§ 21. Estela laminar

Cuando tenemos un flujo estacionario de un fluido alrededor de un cuerpo sólido, el flujo a distancias elevadas detrás del cuerpo tiene determinadas características que pueden estudiarse independientemente de la forma particular del cuerpo.

Designemos mediante **U** la velocidad constante de la corriente incidente; tomemos la dirección de **U** como eje x, con el origen dentro del cuerpo. La velocidad del fluido real en un punto cualquiera puede escribirse como $\mathbf{U} + \mathbf{v}$; **v** se anula en el infinito.

Resulta que, a distancias grandes detrás del cuerpo, la velocidad **v** es notablemente diferente de cero sólo en una región relativamente estrecha cercana al eje x. Esta región, denominada *estela laminar*,† es alcanzada por partículas del fluido que se mueven a lo largo de líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo. De aquí que el flujo en la estela sea esencialmente rotacional. Por otra parte, la viscosidad apenas tiene influencia en los puntos de las líneas de corriente que no pasan cerca del cuerpo, y la vorticidad, que es cero en la corriente incidente, permanece prácticamente nula sobre esta línea de corriente como si se tratase de un fluido ideal. Así pues, el flujo a distancias grandes del cuerpo puede considerarse como un flujo potencial en todas partes, excepto en la estela.

† En contraposición a la estela turbulenta; ver § 36.

Deduciremos a continuación unas fórmulas que relacionan las propiedades del flujo en la estela con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. El impulso total transportado por el fluido a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea el cuerpo es igual a la integral del tensor densidad de flujo del impulso extendida a dicha superficie, $\oint \Pi_{ki} df_k$. Las componentes del tensor Π_{ik} son

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k).$$

Escribamos la presión en la forma $p = p_0 + p'$, en donde p_0 es la presión en el infinito. La integración del término constante $p_0\delta_{ik} + \rho U_i U_k$ da cero, puesto que la integral vectorial $\oint \mathbf{df}$ respecto a una superficie cerrada es nula. También se anula la integral $U_i \oint \rho v_k df_k$: como la masa total del fluido en el volumen considerado es constante, el flujo de masa total $\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{df}$ a través de la superficie que rodea el volumen debe ser cero. Finalmente, la velocidad $\mathbf{v}$ cuando estamos lejos del cuerpo es pequeña en comparación con $\mathbf{U}$. De aquí puede despreciarse el término $\rho v_i v_k$ en Π_{ik} en comparación con $\rho U_k v_i$ si la superficie en cuestión está suficientemente lejos del cuerpo. Así pues, el flujo del impulso total es

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k.$$

Supongamos ahora que el volumen de fluido que nos concierne es el volumen comprendido entre dos planos infinitos $x =$ constante, uno de ellos lejos delante del cuerpo y el otro lejos detrás de él. Cuando se calcula el flujo total del impulso, la integral sobre la superficie «lateral» en el infinito es nula (puesto que $p' = \mathbf{v} = 0$ en el infinito) y, por consiguiente, es suficiente integrar sólo en los dos planos indicados. El flujo del impulso obtenido así es evidentemente la diferencia entre el flujo del impulso total que entra a través del plano delantero y el que sale a través del plano trasero. Pero esta diferencia es también la cantidad de impulso que pasa en la unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo, es decir, la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre dicho cuerpo.

Así pues, las componentes de la fuerza $\mathbf{F}$ son

$$F_x = \left(\int\int_{x=x_2} - \int\int_{x=x_1} \right)(p' + \rho U v_x) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

$$F_y = \left(\int\int_{x=x_2} - \int\int_{x=x_1} \right) \rho U v_y \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

$$F_z = \left(\int\int_{x=x_2} - \int\int_{x=x_1} \right) \rho U v_z \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

en donde la integración se extiende a los planos infinitos $x = x_1$ (bastante detrás del cuerpo) y $x = x_2$ (muy delante de él). Consideremos primero la expresión correspondiente a F_x.

En el exterior de la estela tenemos un flujo potencial y, por consiguiente, es válida la ecuación de Bernoulli

$$p+\tfrac{1}{2}\rho(\mathbf{U}+\mathbf{v})^2 = \text{constante} \equiv p_0+\tfrac{1}{2}\rho U^2$$

o sea, despreciando el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ en comparación con $\rho\mathbf{U}\cdot\mathbf{v}$,

$$p' = -\rho U v_x.$$

Vemos que en esta aproximación se anula el integrando en F_x en todos los puntos en el exterior de la estela. En otras palabras, la integral respecto al plano $x = x_2$ (que está delante del cuerpo y que no corta a la estela) es nula y la integral extendida al plano $x = x_1$ sólo es necesario realizarla en el área cubierta por la sección recta de la estela. Sin embargo, dentro de ésta la variación de presión p' es del orden de ρv^2, es decir, pequeña en comparación con $\rho U v_x$. Así pues, obtenemos, en definitiva, el resultado de que el arrastre que actúa sobre el cuerpo es

$$F_x = -\rho U \iint v_x \, dy \, dz, \tag{21.1}$$

en donde la integración se extiende al área de la sección recta de la estela bastante detrás del cuerpo. Como es natural, la velocidad v_x de la estela es negativa: el fluido se mueve más lentamente que si estuviese ausente el cuerpo. Debe llamarse la atención al hecho de que la integral en (21.1) da el déficit del caudal de fluido a través de la sección de la estela respecto al valor que tendría en ausencia del cuerpo.

Consideremos ahora la fuerza (cuyas componentes son F_y, F_z) que tiende a mover transversalmente el cuerpo. Esta fuerza se denomina *sustentación*. En el exterior de la estela, en donde tenemos flujo potencial, podemos escribir $v_y = \partial\phi/\partial y$, $v_z = \partial\phi/\partial z$; siendo cero la integral extendida al plano $x = x_2$, que no corta a la estela:

$$\iint v_y \, dy \, dz = \iint \frac{\partial\phi}{\partial y} \, dy \, dz = 0, \qquad \iint \frac{\partial\phi}{\partial z} \, dy \, dz = 0,$$

puesto que $\phi = 0$ en el infinito. Por consiguiente, encontramos para la sustentación

$$F_y = -\rho U \iint v_y \, dy \, dz, \qquad F_z = -\rho U \iint v_z \, dy \, dz. \tag{21.2}$$

De nuevo hay que realizar las integraciones en estas fórmulas sólo respecto al área de la sección recta de la estela. Si el cuerpo tiene un eje de simetría (que no necesariamente debe ser una simetría axial completa), y si el flujo es paralelo a este eje, entonces el flujo que rodea el cuerpo tiene también un eje de simetría. En este caso, la sustentación es cero, como es natural.

Volvamos al flujo de la estela. Una estimación de los valores de los diversos términos de la ecuación de Navier-Stokes muestra que el término $\nu\Delta\mathbf{v}$ puede despreciarse, en general, a una distancia r del cuerpo tal que $rU/\nu \gg 1$ (comparar con la deducción de la condición opuesta que se estableció al principio del § 20); estas son las distancias en las que el flujo en el interior de la estela puede considerarse como un flujo potencial. Sin embargo, no es posible despreciar este término en el interior de la estela ni siquiera a esta distancia, puesto que las derivadas transversales $\partial^2\mathbf{v}/\partial y^2$, $\partial^2\mathbf{v}/\partial z^2$ son grandes en comparación con $\partial^2\mathbf{v}/\partial x^2$.

El término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación de Navier-Stokes es del orden de magnitud $(U+v)\,\partial v/\partial x \sim Uv/x$ en la estela. El término $\nu\Delta\mathbf{v}$ es del orden de $\nu\partial^2 v/\partial y^2 \sim \nu v/Y^2$, en donde Y designa la anchura de la estela, es decir, es del orden de magnitud de la distancia respecto al eje x, en la cual la velocidad $\mathbf{v}$ tiende marcadamente a cero. Si son comparables ambas magnitudes, tenemos

$$Y \sim \sqrt{(\nu x/U)}. \tag{21.3}$$

Esta cantidad es, de hecho, pequeña en comparación con x, por la condición supuesta $Ux/\nu \gg 1$. Así pues, la anchura de la estela laminar aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia respecto al cuerpo.

Con objeto de determinar cómo disminuye la velocidad al aumentar x en la estela, volvamos a la fórmula (21.1). La región de integración tiene un área del orden de Y^2. De aquí que pueda estimarse la integral como $F_x \sim \rho UvY^2$, y utilizando la relación (21.3) obtenemos

$$v \sim F_x/\rho\nu x. \tag{21.4}$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo en la estela laminar cuando existe tanto arrastre como sustentación.

Solución. Escribiendo en la ecuación de Navier-Stokes la velocidad en la forma $\mathbf{U}+\mathbf{v}$ y omitiendo los términos cuadráticos en $\mathbf{v}$ (lejos del cuerpo), obtenemos

$$U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right);$$

también hemos despreciado el término $\partial^2\mathbf{v}/\partial x^2$ en $\Delta\mathbf{v}$. Busquemos una solución de la forma $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, en donde $\mathbf{v}_1$ satisfaga a

$$U\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right).$$

El término $\mathbf{v}_2$, que aparece debido al término $-\mathbf{grad}(p/\rho)$ de la ecuación original, puede tomarse como el gradiente $\mathbf{grad}\,\Phi$ de un escalar. Puesto que las derivadas respecto a x, lejos del cuerpo, son pequeñas en comparación con las derivadas respecto a y y z,

podemos con la misma aproximación despreciar el término $\partial\Phi/\partial x$ en v_x, es decir, considerar que $v_x = v_{1x}$.

Así pues, tenemos para v_x la ecuación

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right).$$

Esta ecuación es formalmente la misma que la ecuación bidimensional de la conducción térmica, teniendo en lugar del tiempo la expresión x/U, y habiendo sustituido la conductividad termométrica por la viscosidad ν. La solución que disminuye al aumentar y y z (para un x fijo) y que da una estela infinitamente estrecha cuando $x \to 0$ (en esta aproximación se consideran las dimensiones del cuerpo como pequeñas) es (ver § 51)

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu}\frac{1}{x}e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x}. \tag{1}$$

El coeficiente constante en esta fórmula se expresa en función del arrastre mediante la fórmula (21.1), en la cual la integración respecto a y y z puede extenderse hasta $\pm\infty$ para tener en cuenta la disminución rápida de v_x. Si sustituimos las coordenadas cartesianas por coordenadas esféricas r, θ, ϕ con el eje polar a lo largo del eje x, entonces la región de la estela [$\sqrt{(y^2+z^2)} \ll x$] corresponde a $\theta \ll 1$. En estas coordenadas la fórmula (1) se transforma en

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu}\frac{1}{r}e^{-Ur\theta^2/4\nu}. \tag{1'}$$

El término $\partial\Phi/\partial x$ [con Φ dado por la fórmula (3) que veremos a continuación], que hemos omitido, daría un término en v_x, que disminuye más rápidamente, según $1/r^2$.

v_{1y} y v_{1z} deben tener la misma forma que (1). Tomemos la dirección de la sustentación como el eje y (de modo que $F_z = 0$). De acuerdo con (21.2) tenemos, puesto que $\Phi = 0$ en el infinito,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_y\,dy\,dz = \iint\left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy\,dz$$

$$= \iint v_{1y}\,dy\,dz = -F_y/\rho U,$$

$$\iint v_{1z}\,dy\,dz = 0.$$

Determinando las constantes en v_{1y} y v_{1z} a partir de estas condiciones, tenemos

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu}\frac{1}{x}e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{2}$$

Para determinar la función Φ procederemos del modo siguiente. Según la ecuación de continuidad,

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \approx \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0;$$

y al sustituir en (2), tendremos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = -\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Derivando esta ecuación respecto a x y utilizando la ecuación que satisface v_{1y}, se obtiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

De aquí que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión correspondiente a v_{1y} e integrando respecto a x, tenemos

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}[e^{-U(y^2+z^2)/4\nu x}-1]. \tag{3}$$

La constante de integración se escoge de modo que Φ permanece finita cuando $y = z = 0$. En coordenadas esféricas (medido el ángulo acimutal ϕ respecto al plano xy)

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\phi}{r\theta}[e^{-Ur\theta^2/4\nu}-1]. \tag{3'}$$

Se ve de (2) y (3) que v_y y v_z, a diferencia de v_x, contienen términos que disminuyen sólo como $1/\theta^2$ cuando se mueven alejándose del «eje» de la estela, en comparación con aquéllos que disminuyen con mayor rapidez exponencialmente con θ (para un r dado).

Los resultados cualitativos (21.3) y (21.4) están de acuerdo con las fórmulas anteriores como era de esperar. Si no existe sustentación, el flujo en la estela tiene simetría axial.

Problema 2. Determinar el flujo en el exterior de una estela lejos del cuerpo.

Solución. Fuera de la estela podemos suponer que el flujo es potencial. Puesto que solamente estamos interesados en los términos del potencial Φ que disminuyen con menor rapidez con la distancia, buscaremos una solución de la ecuación de Laplace $\Delta\Phi = 0$ en forma de suma de dos términos:

$$\Phi = \frac{a}{r}+\frac{\cos\phi}{r}f(\theta),$$

de los cuales el primero tiene una simetría central y pertenece a la fuerza F_x, mientras que el segundo tiene simetría respecto al plano xy y pertenece a la fuerza F_y.

Utilizando la expresión correspondiente a $\Delta\Phi$ en coordenadas esféricas, obtenemos para la función $f(\theta)$ la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{f}{\operatorname{sen}\theta} = 0.$$

La solución de esta ecuación finita cuando $\theta \to \pi$ es $f = b \operatorname{cotg} 1/2\theta$. Debe determinarse el coeficiente b de modo que nos dé el valor correcto de F_y. Sin embargo, es más sencillo utilizar el hecho de que en el intervalo $\sqrt{(\nu/Ur)} \ll \theta \ll 1$, esta parte de Φ debe ser la misma que la expresión

$$\Phi = \frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\phi}{r\theta},$$

obtenida de la fórmula (3'), problema 1, para Φ dentro de la estela. De aquí que $b = F_y/4\pi\rho U$.

Para determinar el coeficiente a, observemos que el flujo de masa total que atraviesa una esfera S de radio grande r es igual a cero, como sucede para cualquier superficie cerrada. El flujo de entrada por unidad de tiempo a través de la parte S_0 de S que intersecta a la estela es

$$-\iint_{S_0} v_x \, dy \, dz = F_x/\rho U.$$

De aquí que la misma cantidad del líquido debe estar saliendo del resto de la superficie de la esfera, es decir, debemos tener

$$\oint_{S-S_0} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = F_x/\rho U.$$

Como S_0 es pequeño en comparación con S, podemos poner

$$\oint_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \oint_S \mathbf{grad}\,\Phi\cdot d\mathbf{f} = -4\pi a = F_x/\rho U,$$

de aquí que $a = -F_x/4\pi\rho U$.

La solución completa viene dada por la suma de ambas expresiones:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r}(-F_x + F_y \cos\phi \cot\tfrac{1}{2}\theta), \tag{1}$$

que da el flujo en todo punto exterior a la estela y lejos del cuerpo. El potencial disminuye al aumentar la distancia proporcionalmente a $1/r$; la velocidad $\mathbf{v}$, por tanto, disminuye como $1/r^2$. Si no existe sustentación, el flujo en el exterior de la estela tiene simetría esférica.

§ 22. La viscosidad de las suspensiones

Un fluido en el que están suspendidas numerosas partículas sólidas finas (formando una suspensión) puede considerarse como un medio homogéneo, si nos referimos a fenómenos cuyas longitudes características son grandes en comparación con el tamaño de las partículas. Dicho medio tiene una viscosidad efectiva η que es diferente de la viscosidad η_0 del fluido en que están las partículas en suspensión. El valor de η puede calcularse para el caso en que la concentración de las partículas es pequeña (es decir, su volumen total es pequeño en comparación con el del fluido). Los cálculos son relativamente sencillos en el caso de partículas esféricas (A. EINSTEIN, 1906).

En primer lugar es necesario considerar el efecto que tendrá sobre un flujo o corriente con gradiente de velocidad constante la acción de un solo glóbulo sólido, sumergido en dicho fluido. Supongamos que el fluido sin perturbar está descrito por una distribución de velocidades lineal

$$v_{0i} = \alpha_{ik} x_k, \tag{22.1}$$

siendo α_{ik} un tensor simétrico constante. La presión del fluido es constante:

$$p_0 = \text{constante},$$

y en el futuro tomaremos p_0 como cero, es decir, mediremos únicamente las desviaciones respecto a este valor constante. Si el fluido es incompresible (div $\mathbf{v}_0 = 0$), la suma de los elementos diagonales del tensor α_{ik} debe ser nula:

$$\alpha_{ll} = 0. \tag{22.2}$$

Supongamos ahora que tenemos una pequeña esfera de radio R situada en el origen. Designaremos la velocidad alterada del fluido por $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_1$ debe anularse en el infinito, pero cerca de la esfera $\mathbf{v}_1$ no es pequeña en comparación con $\mathbf{v}_0$. Resulta obvio que, debido a la simetría de la corriente, la esfera permanecerá en reposo, de modo que la condición límite es $\mathbf{v} = 0$ para $r = R$.

La solución buscada de las ecuaciones del movimiento (20.1) a (20.3) puede obtenerse de una vez a partir de la solución (20.4), con la función f dada por (20.6), si observamos que las derivadas espaciales de esta solución son también soluciones. En el caso presente buscamos una solución que dependa de las componentes del tensor α_{ik} de modo paramétrico (y no del vector $\mathbf{u}$ como en el caso del § 20). Dicha solución es

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{grad})f], \qquad p = \eta_0\alpha_{ik}\partial^2\triangle f/\partial x_i\partial x_k,$$

en donde $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{grad})f$ designa un vector cuyas componentes son $\alpha_{ik}\partial f/\partial x_k$. Desarrollando estas expresiones y determinando las constantes a y b en la función $f = ar + b/r$ de modo que satisfaga las condiciones límites en la superficie de la esfera, obtenemos las fórmulas siguientes para la velocidad y la presión:

$$v_{1l} = \frac{5}{2}\left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2}\right)\alpha_{kl}n_in_kn_l - \frac{R^5}{r^4}\alpha_{ik}n_k, \tag{22.3}$$

$$p = -5\eta_0\frac{R^5}{r^3}\alpha_{ik}n_in_k, \tag{22.4}$$

siendo $\mathbf{n}$ un vector unidad en la dirección del radio vector.

Volviendo ahora al problema de determinar la viscosidad efectiva de una suspensión, calcularemos el valor medio (promediado respecto al volumen) del tensor de densidad de flujo del impulso Π_{ik}, el cual, en la aproximación lineal respecto a la velocidad, es el mismo que el tensor de tensiones $-\sigma_{ik}$:

$$\bar{\sigma}_{ik} = (1/V)\int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V.$$

En este caso la integración puede realizarse sobre el volumen V de una esfera de radio grande, que luego se amplía hasta el infinito.

En primer lugar, tenemos la identidad

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) - \bar{p}\delta_{ik} + \frac{1}{V}\int\left\{\sigma_{ik} - \eta_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + p\delta_{ik}\right\}\mathrm{d}V. \tag{22.5}$$

El integrando del segundo miembro es cero, excepto dentro de las esferas sólidas; puesto que se supone pequeña la concentración de la suspensión, puede calcularse la integral para una sola esfera como si las otras estuvieran ausentes y luego multiplicar por la concentración c de la suspensión (que es el número de esferas por unidad de volumen). El cálculo directo de esta integral exigiría un estudio de las tensiones internas en las esferas. Sin embargo, podemos soslayar esta dificultad transformando la integral de volumen en una integral de superficie extendida sobre una esfera infinitamente alejada, que está totalmente dentro del fluido. Para ello, observemos que la ecuación del movimiento $\partial\sigma_{il}/\partial x_l = 0$ conduce a la identidad

$$\sigma_{ik} = \partial(\sigma_{il}x_k)/\partial x_l;$$

de aquí que la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie dé

$$\sigma_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + c\oint\{\sigma_{il}x_k\mathrm{d}f_l - \eta_0(v_i\mathrm{d}f_k + v_k\mathrm{d}f_i)\}.$$

Hemos omitido el término en $\bar{p}$, puesto que la presión media es necesariamente cero; $\bar{p}$ es un escalar que debe venir dado por una combinación lineal de las componentes α_{ik}, y el único escalar que cumple esta condición es $\alpha_{ii} = 0$.

Al calcular la integral extendida a una esfera de radio muy grande, sólo necesitan retenerse en la expresión (22.3) los términos del orden de $1/r^2$ para obtener la velocidad. Un cálculo sencillo da el valor de la integral que es

$$c\eta_0 \cdot 20\pi R^3\{5\alpha_{lm}\overline{n_in_kn_ln_m} - \alpha_{il}\overline{n_kn_l}\},$$

en donde la barra designa un promedio respecto a las direcciones del vector unidad $\mathbf{n}$. Efectuando la operación de promediar,† se obtiene, finalmente,

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + 5\eta_0\alpha_{ik}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3c. \qquad (22.6)$$

El cociente del segundo término al primero determina la corrección relativa requerida para dar la viscosidad efectiva de la suspensión. Si estamos interesados únicamente en correcciones del primer orden, podemos tomar el primer término como si fuese $2\eta_0\alpha_{ik}$. Entonces se obtiene como valor de la viscosidad efectiva de la suspensión

$$\eta = \eta_0(1 + \tfrac{5}{2}\phi), \qquad (22.7)$$

en donde $\phi = 4/3\pi R^3c$ es el cociente del volumen total de las esferas al volumen total de la suspensión, que es pequeño.

† Los valores medios de los productos de los componentes del vector unidad son tensores simétricos que sólo pueden formarse a partir del tensor unidad δ_{ki}. Se obtiene fácilmente

$$\overline{n_in_k} = \delta_{ik},$$

$$\overline{n_in_kn_ln_m} = \tfrac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

§ 23. Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso

Si los términos no lineales en las ecuaciones del movimiento de un fluido viscoso no se anulan idénticamente, la resolución de estas ecuaciones ofrece graves dificultades, y solamente pueden obtenerse soluciones exactas en un número muy pequeño de casos. Además, todavía no resulta posible el llevar a cabo un estudio completo del flujo estacionario en el caso de un fluido viscoso en todo el espacio que rodea a un cuerpo en el límite de números de Reynolds muy grandes. Aunque dicho flujo no permanece estacionario en la práctica, como veremos, la solución del problema resulta ser de gran interés metodológico.†

Daremos a continuación varios ejemplos de soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso.

(1) Un disco plano infinito sumergido en un fluido viscoso gira uniformemente alrededor de su eje. Determinar el movimiento del fluido producido por este movimiento del disco (T. VON KÁRMÁN, 1921).

Tomemos coordenadas cilíndricas, escogiendo el plano del disco como plano $z = 0$. Supongamos que el disco gira alrededor del eje z con una velocidad angular Ω. Consideremos el volumen ilimitado de fluido en el semiespacio $z > 0$. Las condiciones límites son

$$v_r = 0, \quad v_\phi = \Omega r, \quad v_z = 0 \text{ para } z = 0,$$
$$v_r = 0, \quad v_\phi = 0 \qquad\qquad \text{para } z = \infty.$$

La velocidad axial v_z no se anula cuando $z \to \infty$, pero tiende hacia un valor negativo constante determinado por las ecuaciones del movimiento. La razón es que, como el fluido se mueve radialmente alejándose del eje de rotación, especialmente cerca del disco, debe existir un flujo vertical constante desde el infinito con objeto de satisfacer la ecuación de continuidad. Busquemos una solución de las ecuaciones del movimiento de la forma

$$v_r = r\Omega F(z_1); \quad v_\phi = r\Omega G(z_1); \quad v_z = \sqrt{(\nu\Omega)}H(z_1);$$
$$p = -\rho\nu\Omega P(z_1), \quad \text{donde} \quad z_1 = \sqrt{(\Omega/\nu)}z. \tag{23.1}$$

En esta distribución de velocidades, las velocidades radial y azimutal son proporcionales a la distancia respecto al eje de rotación, mientras que v_z es constante en cada plano horizontal.

Sustituyendo en la ecuación de Navier-Stokes y en la ecuación de continuidad, obtenemos las ecuaciones siguientes para las funciones F, G, H y P:

$$F^2 - G^2 + F'H = F'', \qquad 2FG + G'H = G'',$$
$$HH' = P' + H'', \qquad 2F + H' = 0; \tag{23.2}$$

† Oseen ha desarrollado para este problema la «teoría de la viscosidad evanescente», pero resulta insatisfactoria porque se basa en una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por lo que se refiere a la teoría de Prandtl de la capa límite (§ 39), ésta no resuelve el problema en todo el fluido.

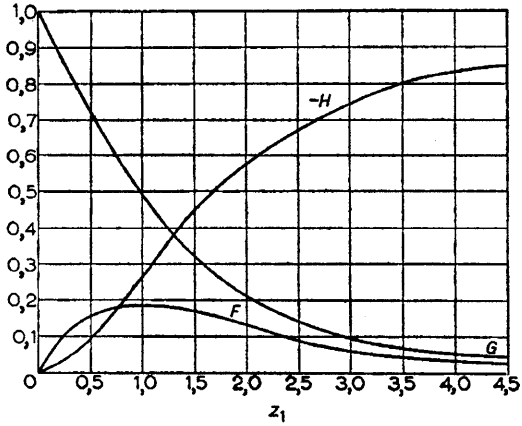

FIG. 7

el símbolo prima designa derivación respecto a z_1. Las condiciones límites son

$$\begin{aligned} &F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0 \quad \text{para } z_1 = 0. \\ &F = 0, \quad G = 0 \qquad\quad \text{para } z_1 = \infty. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Por tanto, hemos reducido la resolución del problema a la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con una sola variable; esto puede conseguirse numéricamente.† La figura 7 muestra las funciones F, G y $-H$ obtenidas de este modo. El valor límite de H cuando $z_1 \to \infty$ es $-0{,}886$; en otras palabras, la velocidad del fluido en el infinito es $v_z(\infty) = -0{,}886\sqrt{(\nu\Omega)}$.

La fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del disco perpendicularmente a su radio es $\sigma_{z\phi} = \eta(\partial v_\phi/\partial z)_{z=0}$. Despreciando los efectos de los bordes, podemos escribir el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre un disco de radio R grande, pero finito, como

$$M = 2\int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\phi}\, dr = \pi R^4 \rho\sqrt{(\nu\Omega^3)}G'(0).$$

El factor 2 delante de la integral aparece debido a que el disco tiene dos caras expuestas al fluido. Un cálculo numérico de la función G conduce a la fórmula

$$M = -1{,}94\, R^4 \rho\sqrt{(\nu\Omega^3)}. \tag{23.4}$$

† También se ha llevado a cabo la integración numérica en otro problema semejante, en el que el fluido gira uniformemente en el infinito y el disco está en reposo (U. T. BÖDEWADT, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **20**, 241, 1940).

(2) Determinar el flujo estacionario que se produce entre dos paredes planas que intersectan formando un ángulo α (la figura 8 muestra una sección recta de los planos); el fluido fluye hacia fuera procedente de la línea de intersección de ambos planos (G. HAMEL, 1916).

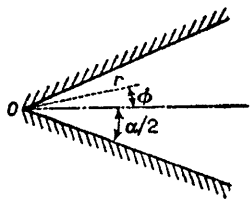

FIG. 8

Tomemos coordenadas cilíndricas r, z, ϕ, con el eje z a lo largo de la línea de intersección de los planos (el punto O en la figura 8) y midiendo el ángulo ϕ como se ve en la figura 8. El flujo es uniforme en la dirección z y como es natural supondremos que es totalmente radial, es decir,

$$v_\phi = v_z = 0, \qquad v_r = v(r, \phi).$$

Las ecuaciones (15.16) dan

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{23.5}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \phi} = 0, \tag{23.6}$$

$$\partial(rv)/\partial r = 0.$$

Se ve a partir de la última de estas ecuaciones que rv es una función solamente de ϕ. Introduciendo la función

$$u(\phi) = rv/6\nu, \tag{23.7}$$

obtenemos a partir de (23.6)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\phi},$$

de aquí que

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2}u(\phi) + f(r).$$

Sustituyendo esta expresión en (23.5), tenemos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2}r^3 f'(r),$$

de la cual vemos que, puesto que el segundo miembro depende sólo de ϕ y el primero únicamente de r, cada uno de ellos debe ser una constante que llamaremos $2C_1$. Así pues, $f'(r) = 12\nu^2 C_1/r^3$, de aquí que $f(r) = -6\nu^2 C_1/r^2 + +$ constante, y así tenemos para la presión

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2}(2u - C_1) + \text{constante}. \tag{23.8}$$

Para $u(\phi)$ resulta la ecuación

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

que, al multiplicar por u' y realizar una integración, nos da

$$\tfrac{1}{2}u'^2 + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0.$$

A partir de ella resulta la expresión

$$2\phi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{(-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2)}} + C_3, \tag{23.9}$$

que nos da la dependencia pedida de la velocidad respecto a ϕ; la función $u(\phi)$ puede expresarse mediante funciones elípticas. Se determinan las tres constantes C_1, C_2 y C_3 a partir de las condiciones límites

$$u(\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = 0 \tag{23.10}$$

y de la condición según la cual pasa la misma masa de fluido Q en la unidad de tiempo a través de cualquier sección en la que r = constante:

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v r \, d\phi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} u \, d\phi. \tag{23.11}$$

Q puede ser positivo o negativo. Si $Q > 0$, la línea de intersección de los planos es una fuente, es decir, el fluido emerge del vértice del ángulo: se denomina *flujo en un canal divergente*. Si $Q < 0$, la línea de corte es un sumidero y tenemos *flujo en un canal convergente*. El cociente $|Q|/\nu\rho$ es adimensional y juega el papel del número de Reynolds en el problema que se trata.

Estudiaremos en primer lugar el flujo convergente ($Q < 0$). Para analizar la solución (23.9)-(23.11) haremos las hipótesis, que justificaremos posteriormente, de que el flujo es simétrico respecto al plano $\phi = 0$ [es decir, $u(\phi) = u(-\phi)$], y que la función $u(\phi)$ es negativa en todos los puntos (es decir, la velocidad está dirigida siempre hacia el vértice) y disminuye monótonamente desde $u = 0$ para $\phi = \pm \frac{1}{2}\alpha$ hasta $u = -u_0 < 0$ para $\phi = 0$, de modo que u_0 es el valor máximo de $|u|$. Entonces para $u = -u_0$ debemos tener $du/d\phi = 0$; de aquí se deduce que $u = -u_0$ es un cero de la expresión cúbica bajo el radical contenido en el integrando de (23.9). Por consiguiente, podemos escribir

$$-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2 = (u + u_0)\{-u^2 - (1 - u_0)u + q\},$$

siendo q otra constante. Así pues,

$$2\phi = \pm \int_{-u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}}, \tag{23.12}$$

Las constantes u_0 y q vienen determinadas mediante las condiciones

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-u_0}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}}, \\ \tfrac{1}{6}\mathrm{R} &= \int_{-u_0}^{0} \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}} \end{aligned} \tag{23.13}$$

($\mathrm{R} = |Q|/\nu\rho$); la constante q debe ser positiva, puesto que en otro caso estas integrales serían complejas. Puede demostrarse que las dos ecuaciones que acabamos de exponer tienen soluciones u_0 y q para cualquier valor de R y $\alpha < \pi$. En otras palabras, el flujo simétrico convergente (figura 9) es posible para cualquier ángulo de apertura α y cualquier número de Reynolds. Consideremos con más detalle el flujo correspondiente a un valor muy grande de R. Este valor corresponde a u_0 grande. Escribiendo (12.12) (para $\phi > 0$) como

$$2(\tfrac{1}{2}\alpha - \phi) = \int_{u}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{[(u+u_0)\{-u^2-(1-u_0)u+q\}]}},$$

vemos que el integrando es pequeño en todo el intervalo de integración si u no es próximo a u_0. Esto significa que $|u|$ puede diferir apreciablemente de u_0 solamente en el caso de que ϕ esté cercano a $\pm\,\alpha/2$, es decir, en la proximi-

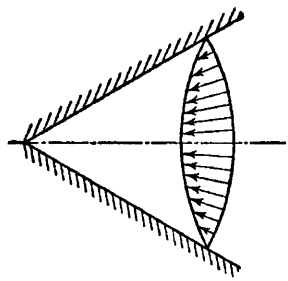

FIG. 9

dad inmediata de las paredes.† En otras palabras, tenemos $u \approx$ constante $= -u_0$ para casi todos los ángulos ϕ, y además $u_0 = R/6\alpha$, como vemos a partir de las ecuaciones (23.13). La propia velocidad v es $|Q|/\rho\alpha r$, dando un flujo potencial no viscoso con una velocidad independiente del ángulo e inversamente proporcional a r. Así pues, para números de Reynolds grandes, el flujo en un canal convergente difiere muy poco del flujo potencial de un fluido ideal. El efecto de la viscosidad aparece sólo en una capa muy estrecha cerca de las paredes, en donde la velocidad disminuye rápidamente hacia cero a partir del valor correspondiente al flujo potencial (figura 10).

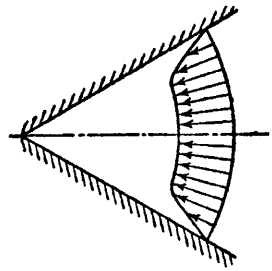

FIG. 10

Supongamos ahora que $Q > 0$, de modo que tenemos un flujo divergente. En principio, podemos suponer de nuevo que el flujo es simétrico respecto al plano $\phi = 0$, y que $u(\phi)$ (en donde ahora $u > 0$) varía monótonamente desde cero para $\phi = \pm \alpha/2$ hasta $u_0 > 0$ para $\phi = 0$. En lugar de (23.13) tenemos ahora

$$\alpha = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{[(u_0-u)\{u^2+(1+u_0)u+q\}]}},$$
$$\tfrac{1}{6}R = \int_0^{u_0} \frac{u\,du}{\sqrt{[(u_0-u)\{u^2+(1+u_0)u+q\}]}}. \tag{23.14}$$

Si consideramos que u está determinado, entonces α incrementa monótonamente cuando q disminuye y toma su valor mayor para $q = 0$:

$$\alpha_{max} = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{[u(u_0-u)(u+u_0+1)]}}.$$

† La cuestión que puede plantearse es cómo puede dejar de ser pequeña la integral, aunque $u \approx -u_0$. La respuesta es que, para u_0 muy grande, una de las raíces de $-u^2-(1-u_0)u+q=0$ está próxima a $-u_0$, de modo que el radicando tiene dos ceros casi coincidentes, siendo, por tanto, «casi divergente» la integral completa para $u = -u_0$.

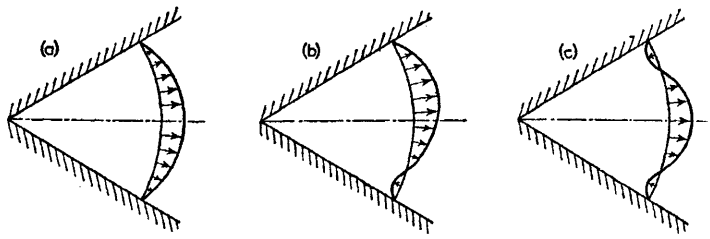

FIG. 11

Por otra parte, es fácil ver que para q dado, α es una función de u_0 con disminución monótona. De aquí se deduce que u_0 es una función decreciente monótonamente de q para un α dado, de modo que su mayor valor corresponde a $q = 0$ y viene expresado por la ecuación anterior. El máximo $R = R_{max}$ corresponde al máximo u_0. Utilizando las sustituciones $k^2 = u_0/(1 + 2u_0)$, $u = u_0 \cos^2 x$, podemos escribir la relación entre R_{max} y α en la forma paramétrica

$$\alpha = 2\sqrt{(1-2k^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 x)}},$$

$$R_{max} = -6\alpha \frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{(1-2k^2)}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 x)}\, dx. \tag{23.15}$$

Así pues, el flujo simétrico divergente en todos los puntos (figura 11*a*) para un ángulo en la apertura dado, es posible únicamente en el caso en que los números de Reynolds no superen un valor definido. Cuando $\alpha \to \pi$ $(k \to 0)$, $R_{max} \to 0$; cuando $\alpha \to 0$ $(k \to 1/\sqrt{2})$, R_{max} tiende a infinito como $18{,}8/\alpha$.

Para $R > R_{max}$ la hipótesis del flujo simétrico, divergente en todas partes, resulta sin justificar, puesto que las condiciones (23.14) no pueden ser satisfechas. En el margen de ángulos $-\alpha/2 \leqslant \phi \leqslant \alpha/2$ la función $u(\phi)$ debe ahora tener o máximos o mínimos. Los valores de $u(\phi)$ correspondientes a estos extremos deben ser de nuevo ceros del polinomio que está bajo el signo radical. Por consiguiente, resulta claro que el trinomio $u^2 + (1 + u_0)u + q$ (con $u_0 > 0$, $q > 0$) debe tener dos raíces negativas reales en el margen mencionado, de modo que el radicando puede escribirse como $(u_0 - u)(u + u_0')(u + u_0'')$, en donde $u_0 > 0$, $u_0' > 0$, $u_0'' > 0$; supongamos $u_0' < u_0''$. La función $u(\phi)$ puede variar en el intervalo $u_0 \geqslant u \geqslant -u_0'$, correspondiendo el valor $u = u_0$ a un máximo positivo de $u(\phi)$, y $u = -u_0'$ a un mínimo negativo. Sin hacer ningún estudio detallado de las soluciones obtenidas por este procedimiento, conviene mencionar que para $R > R_{max}$ aparece una solución en la cual la velocidad tiene un máximo y un mínimo, siendo el flujo asimétrico respecto al plano $\phi = 0$ (figura 11*b*). Cuando R aumenta aún más, aparece una solu-

ción simétrica con un mínimo y dos máximos (figura 11*c*), y así sucesivamente. Por consiguiente, en todas estas soluciones existen regiones tanto de flujo hacia dentro como hacia fuera (aunque, como es natural, el caudal total Q es positivo). Cuando $R \to \infty$, el número de máximos y mínimos alternativos aumenta sin límite, de modo que no existe una solución límite definida. Podemos resaltar que en el caso de flujo divergente cuando $R \to \infty$ la solución no tiende, por consiguiente, a la solución de las ecuaciones de Euler, como ocurría en el caso del flujo convergente. Finalmente, puede mencionarse que cuando R aumenta, el flujo divergente estacionario del tipo descrito resulta inestable en cuanto R supera a R_{max}, y en la práctica se produce un flujo no estacionario o turbulento (capítulo III).

(3) Determinar el flujo de un chorro que emerge del extremo de un tubo estrecho y se introduce en un espacio infinito lleno con el fluido — *chorro sumergido* (L. LANDAU, 1943).

Tomemos coordenadas esféricas r, θ, ϕ, con el eje polar en la dirección del chorro en su punto de emergencia y con este punto como origen. El flujo es simétrico respecto al eje polar, de modo que $v_\phi = 0$ y v_θ, v_r son funciones de r y θ solamente. A través de cualquier superficie cerrada que rodea el origen debe pasar el mismo flujo de impulso total (el «impulso del chorro») y eso en particular debe ocurrir también a través de superficies que estén infinitamente alejadas. Para que esto sea así, la velocidad debe ser inversamente proporcional a r, de modo que

$$v_r = F(\theta)/r, \qquad v_\theta = f(\theta)/r, \tag{23.16}$$

en donde F y f son unas funciones determinadas de θ únicamente. La ecuación de continuidad es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \,\mathrm{sen}\,\theta) = 0.$$

De aquí que

$$F(\theta) = -\mathrm{d}f/\mathrm{d}\theta - f\cot\theta. \tag{23.17}$$

Las componentes $\Pi_{r\phi}$, $\Pi_{\theta\phi}$ del tensor de densidad de flujo del impulso en el chorro se anulan idénticamente por simetría. Admitamos que las componentes $\Pi_{\theta\theta}$ y $\Pi_{\phi\phi}$ también se anulan; se justificará esta hipótesis cuando obtengamos una solución que satisfaga todas las condiciones necesarias. Utilizando las expresiones (15.17) para el componente del tensor σ_{ik}, y las fórmulas (23.16), (23.17), podemos ver fácilmente que la relación

$$\mathrm{sen}^2\theta\,\Pi_{r\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}[\mathrm{sen}^2\theta(\Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta})]$$

es válida entre los componentes del tensor de densidad de flujo del impulso en el chorro. De aquí se deduce que $\Pi_{r\theta} = 0$. Por tanto, solamente el compo-

nente Π_{rr} es no nulo, variando en la forma $1/r^2$. Es fácil ver que se satisfacen automáticamente las ecuaciones del movimiento $\partial\Pi_{ik}/\partial x_k = 0$.

A continuación, escribamos

$$(\Pi_{\theta\theta}-\Pi_{\phi\phi})/\rho = (f^2+2\nu f\cot\theta-2\nu f')/r^2 = 0,$$

o sea,

$$\mathrm{d}(1/f)/\mathrm{d}\theta+(1/f)\cot\theta+1/2\nu = 0.$$

La solución de esta ecuación es

$$f = -2\nu\,\mathrm{sen}\,\theta/(A-\cos\theta), \tag{23.18}$$

y entonces a partir de (23.17)

$$F = 2\nu\left\{\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2}-1\right\}. \tag{23.19}$$

Se encuentra la distribución de presiones mediante la ecuación

$$\Pi_{\theta\theta}/\rho = p/\rho+f(f+2\nu\cot\theta)/r^2 = 0,$$

que da

$$p = \frac{4\rho\nu^2(A\cos\theta-1)}{r^2(A-\cos\theta)^2}. \tag{23.20}$$

Puede calcularse la constante A en función del impulso del chorro, es decir, del flujo del impulso total del mismo. Este flujo es igual a la integral extendida a la superficie de una esfera

$$P = \oint \Pi_{rr}\cos\theta\,\mathrm{d}f = 2\pi\int_0^{\pi} r^2\,\Pi_{rr}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

El valor de Π_{rr} viene dado por

$$\frac{1}{\rho}\Pi_{rr} = \frac{4\nu^2}{r^2}\left\{\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4}-\frac{A}{A-\cos\theta}\right\},$$

y un cálculo de la integral nos da

$$P = 16\pi\nu^2\rho A\left\{1+\frac{4}{3(A^2-1)}-\tfrac{1}{2}A\log\frac{A+1}{A-1}\right\}. \tag{23.21}$$

Las fórmulas (23.16)-(23.21) dan la solución del problema.†

† La solución obtenida es exacta para un chorro que se considera que procede de una fuente puntual. Si se tienen en cuenta las dimensiones finitas de la boca del tubo, la solución resulta ser el primer término de un desarrollo en potencias del cociente entre estas dimensiones y la distancia r a la boca del tubo. Esta es la razón por la que el resultado es cero, si se calcula mediante la solución anterior el flujo de masa total que atraviesa una superficie cerrada que rodea al origen. Cuando se consideran en el desarrollo mencionado otros términos se obtiene un flujo de masa no nulo; ver Yu. B. Rumer, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **16**, 255, 1952.

El chorro laminar sumergido con momento angular no nulo ha sido estudiado por L. G. Loytsianski (*ibid.*, **17**, 3, 1953).

Las líneas de corriente se determinan mediante la ecuación $dr/v_r = rd\theta/v_\theta$, cuya integración nos da $r \operatorname{sen}^2\theta/(A - \cos\theta) =$ constante. La figura 12 muestra las líneas de corriente del chorro (para $A > 1$).

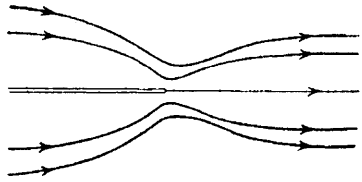

FIG. 12

Consideremos dos casos límites: un chorro débil (impulso pequeño P) y un chorro intenso (P grande). Cuando $P \to 0$, la constante A tiende a infinito: según (23.21) tenemos que $P = 16\pi\nu^2\rho/A$. En este caso, tenemos para la velocidad

$$v_\theta = -P \operatorname{sen}\theta/8\pi\nu\rho r, \qquad v_r = P\cos\theta/4\pi\nu\rho r.$$

Cuando $P \to \infty$ (chorro fuerte†), A tiende a ser la unidad: (23.21) da $A = 1 + \alpha^2/2$, en donde $\alpha = 32\pi\nu^2\rho/3P$. Para ángulos grandes ($\theta \sim 1$), la velocidad viene dada por

$$v_\theta = -(2\nu/r)\cot\tfrac{1}{2}\theta, \qquad v_r = -2\nu/r,$$

pero en el caso de ángulos pequeños ($\theta \sim \alpha$), tenemos

$$v_\theta = -4\nu\theta/(\alpha^2+\theta^2), \qquad v_r = 8\nu\alpha^2/(\alpha^2+\theta^2)^2.$$

§ 24. Movimiento oscilante en un fluido viscoso

Cuando un cuerpo sólido sumergido en un fluido viscoso se pone a oscilar, el flujo que se crea tiene un cierto número de propiedades características. Con objeto de estudiarlas es conveniente empezar con un ejemplo sencillo pero típico. Supongamos que un fluido incompresible está limitado por una superficie plana infinita que realiza una oscilación armónica simple en su propio plano, con frecuencia ω. Queremos encontrar el movimiento resultante del fluido. Consideremos la superficie sólida como plano yz y la región del fluido como $x > 0$; se toma el eje y en la dirección de la oscilación. La velocidad u de la superficie oscilante es una función del tiempo, de la forma $A\cos(\omega t + \alpha)$. Es conveniente escribir esta expresión como la parte real de una magnitud compleja:

$$u = \operatorname{re}(u_0 e^{-i\omega t}),$$

† Debe recordarse, no obstante, que el flujo en un chorro suficientemente intenso es realmente turbulento (§ 35).

en donde la constante $u_0 = Ae^{-i\alpha}$ es, en general, compleja, pero que siempre puede hacerse real mediante una selección adecuada del origen de los tiempos.

Siempre que en los cálculos intervengan sólo operaciones lineales respecto a la velocidad u, podemos omitir el signo re y proceder como si u fuese complejo, tomando la parte real del resultado final. Así pues, escribamos

$$u_y = u = u_0\, e^{-i\omega t}. \tag{24.1}$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición límite $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $x = 0$, es decir, $v_x = v_z = 0$, $v_y = u$.

Es evidente, a partir de la simetría del problema, que todas las magnitudes dependerán sólo de la coordenada x y del tiempo t. En la ecuación de continuidad $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ y, por consiguiente, $\partial v_x/\partial x = 0$, de donde $v_x =$ constante $= 0$, debido a la condición límite. Puesto que todas las magnitudes son independientes de las coordenadas y y z, tendremos $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = v_x\,\partial\mathbf{v}/\partial x$, y puesto que v_x es cero se deduce que $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = 0$ idénticamente. La ecuación del movimiento (15.7) se transforma en

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p + \nu\triangle\mathbf{v}. \tag{24.2}$$

Esta ecuación es lineal. Su componente x es $\partial p/\partial x = 0$, es decir, $p =$ constante.

Además, es evidente por simetría que la velocidad $\mathbf{v}$ en todo punto tiene la dirección y. Para $v_y = v$ tenemos, según (24.2),

$$\partial v/\partial t = \nu\partial^2 v/\partial x^2, \tag{24.3}$$

que equivale a la ecuación de conducción térmica monodimensional. Busquemos una solución a esta ecuación que sea periódica en x y t, de la forma

$$v = u_0\, e^{i(kx-\omega t)},$$

con una amplitud compleja u_0, de modo que $v = u$ para $x = 0$. Sustituyendo en (24.3), encontramos $i\omega = \nu k^2$; de aquí resulta

$$k = \sqrt{(i\omega/\nu)} = \pm(i+1)\sqrt{(\omega/2\nu)},$$

de modo que la velocidad v es

$$v = u_0\, e^{-\sqrt{(\omega/2\nu)}x}\, e^{i[\sqrt{(\omega/2\nu)}x-\omega t]}; \tag{24.4}$$

hemos tomado k como si tuviese una parte imaginaria positiva, puesto que en otro caso la velocidad aumentaría sin límites en el interior del fluido, lo cual es físicamente imposible.

La solución obtenida representa una onda transversal: su velocidad $v_y = v$ es perpendicular a la dirección de propagación. La propiedad más importante de esta onda es que se ve rápidamente amortiguada en el interior del fluido: la amplitud disminuye exponencialmente cuando aumenta la distancia x a la superficie sólida.†

† En una distancia de una longitud de onda la amplitud disminuye en un factor de $e^{2\pi} \approx 540$.

Así pues, pueden presentarse ondas transversales en un fluido viscoso, pero se ven rápidamente amortiguadas cuando se alejan de la superficie sólida, cuyo movimiento genera las ondas.

La distancia δ, en la cual la amplitud decae en un factor de e, se denomina *profundidad de penetración* de la onda. Vemos a partir (24.4) que

$$\delta = \sqrt{(2\nu/\omega)}. \tag{24.5}$$

La profundidad de penetración disminuye, por tanto, al aumentar la frecuencia, pero crece con la viscosidad cinemática del fluido.

Calculemos la fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del plano que oscila en el fluido viscoso. La dirección de esta fuerza coincide evidentemente con la del eje y y es igual a la componente $\sigma_{xy} = \eta \partial v_y/\partial x$ del tensor de tensiones; el valor de la derivada debe tomarse en la propia superficie, es decir, para $x = 0$. Sustituyendo (24.4), obtenemos

$$\sigma_{xy} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\omega\eta\rho)}(i-1)u. \tag{24.6}$$

Suponiendo u_0 real y tomando la parte real de (24.6), tenemos

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{(\omega\eta\rho)}u_0 \cos(\omega t + \tfrac{1}{4}\pi).$$

Sin embargo, la velocidad de la superficie oscilante es $u = u_0 \cos \omega t$. Por consiguiente, existe una diferencia de fase entre la velocidad y la fuerza de rozamiento.†

También es sencillo calcular el promedio (temporal) de la disipación de energía en el problema anterior. Esto puede hacerse mediante la fórmula general (16.3); sin embargo, en este caso particular es más sencillo calcular la disipación que se pide directamente como el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilante es igual al valor medio del producto de la fuerza σ_{xy} por la velocidad $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = \tfrac{1}{2}u_0^2\sqrt{(\tfrac{1}{2}\omega\eta\rho)}. \tag{24.7}$$

Este valor es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de las oscilaciones y a la raíz cuadrada de la viscosidad.

También puede darse una solución explícita del problema de un fluido puesto en movimiento mediante una superficie plana que se mueve en su

† En el caso de oscilaciones de un semiplano (paralelamente a su borde) existe una fuerza de rozamiento adicional debida a los efectos de los bordes. El problema del movimiento de un fluido viscoso producido por oscilaciones de un semiplano, e incluso el problema más general de las oscilaciones de una cuña de ángulo cualquiera, puede resolverse mediante una clase de soluciones de la ecuación $\Delta f + k^2 f = 0$, utilizada por A. SOMMERFELD en la teoría de la difracción por una cuña; ver, por ejemplo, M. VON LAUE, **Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen (Interferencia y difracción de ondas electromagnéticas)**, *Handbuch der Experimentalphysik*, **18**, 333, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1928.

Aquí damos sólo un resultado, para referencia posterior: el aumento de la fuerza de rozamiento sobre un semiplano, originado por el efecto de los bordes, puede considerarse como el resultado de aumentar el área del semiplano trasladando el borde una distancia $\delta = \sqrt{(\nu/2\omega)}/2$.

plano de acuerdo con cualquier ley $u = u(t)$. No nos entretendremos en hacer los cálculos correspondientes ahora, puesto que la solución requerida de la ecuación (24.3) es formalmente idéntica a la del problema análogo de la teoría de la conducción térmica que estudiaremos en § 52 [la solución es la fórmula (52.15)]. En particular, la fuerza de rozamiento sobre la unidad de área de la superficie viene dada por

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}; \tag{24.8}$$

ver (52.16).

Consideremos a continuación el caso general de un cuerpo oscilante de forma arbitraria. En el caso considerado anteriormente de un plano oscilante, el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de la ecuación del movimiento del fluido era idénticamente nulo. Esto no ocurre, como es natural, en el caso de una superficie de forma arbitraria. Sin embargo, supondremos que ese término es pequeño en comparación con los demás, de modo que pueda despreciarse. Las condiciones necesarias para que sea válido este procedimiento se examinarán a continuación.

Empezaremos, por tanto, como antes a partir de la ecuación lineal (24.2). Tomaremos el rotacional de ambos miembros; el término **rot grad** p se anula idénticamente, dando

$$\partial(\mathbf{rot}\ \mathbf{v})/\partial t = \nu\Delta\mathbf{rot}\ \mathbf{v}, \tag{24.9}$$

es decir, **rot v** satisface una ecuación de condición térmica. Sin embargo, hemos visto anteriormente que una ecuación de este tipo da una disminución exponencial de la magnitud que la satisface. Por consiguiente, podemos decir que la vorticidad disminuye hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido producido por las oscilaciones del cuerpo es rotacional en una determinada capa alrededor del cuerpo, mientras que a distancias mayores varía rápidamente, convirtiéndose en un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es del orden de $\delta \sim \sqrt{(\nu/\omega)}$.

Ahora son posibles dos casos límites importantes: la magnitud δ puede ser grande o pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo oscilante. Supongamos que l es una magnitud del orden de esta dimensión. En primer lugar, consideraremos el caso $\delta \gg l$; esto implica que $l^2\omega \ll \nu$. Además de esta condición supondremos también que el número de Reynolds es pequeño. Si a es la amplitud de las oscilaciones, la velocidad del cuerpo es del orden de $a\omega$. El número de Reynolds para el movimiento en cuestión es, por tanto, $\omega al/\nu$. Supondremos entonces que

$$l^2\omega \ll \nu, \qquad \omega al/\nu \ll 1. \tag{24.10}$$

Este es el caso de frecuencias bajas de oscilación, lo que a su vez significa que la velocidad varía sólo lentamente con el tiempo y, por tanto, que pode-

mos despreciar la derivada $\partial \mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación general del movimiento. El término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$, por otra parte, puede despreciarse debido a que el número de Reynolds es pequeño.

La ausencia del término $\partial \mathbf{v}/\partial t$ de la ecuación del movimiento significa que el flujo es estacionario. Así pues, para $\delta \gg l$, puede considerarse el flujo como estacionario en un instante dado cualquiera. Esto significa que el flujo en dicho instante es el que aparecería si el cuerpo se estuviese moviendo uniformemente con su velocidad instantánea. Si, por ejemplo, estamos considerando las oscilaciones de una esfera sumergida en el fluido, de una frecuencia que satisfaga las desigualdades (24.10) (siendo ahora l el radio de la esfera), entonces podemos decir que el arrastre sobre la esfera será el dado por la fórmula de Stokes (20.14) para el caso de un movimiento uniforme de la esfera con números de Reynolds pequeños.

Consideremos, a continuación, el caso opuesto, en el que $l \gg \delta$. Con objeto de que el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ sea de nuevo despreciable, es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo:

$$l^2\omega \gg \nu, \qquad a \ll l; \tag{24.11}$$

En este caso, lo cual debe resaltarse, no es necesario que sea pequeño el número de Reynolds. La desigualdad anterior se obtiene estimando el valor de $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$. El operador $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})$ designa una derivación en la dirección de la velocidad. Sin embargo, cerca de la superficie del cuerpo la velocidad es casi tangencial. En la dirección tangencial la velocidad varía apreciablemente sólo en distancias del orden de la dimensión del cuerpo, de aquí que

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} \sim v^2/l \sim a^2\omega^2/l,$$

puesto que la propia velocidad es del orden de $a\omega$. Sin embargo, la derivada $\partial \mathbf{v}/\partial t$, es del orden de $v\omega \sim a\omega^2$. Comparando ambas expresiones, vemos que

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} \ll \partial \mathbf{v}/\partial t$$

si $a \ll l$. Los términos $\partial \mathbf{v}/\partial t$ y $\nu\Delta\mathbf{v}$ se ve fácilmente entonces que son del mismo orden.

A continuación podemos estudiar la naturaleza del flujo que rodea un cuerpo oscilante cuando se cumplen las condiciones (24.11). En una capa delgada próxima a la superficie del cuerpo el flujo es rotacional, pero en el resto del fluido tenemos un flujo potencial.† De aquí que, excepto en la capa próxima

† En el caso de oscilaciones de una superficie plana, no sólo disminuye exponencialmente con el aumento de la distancia característica el **rot v**, sino también la propia **v**. Esto se debe a que el plano oscilante no desplaza al fluido y, por tanto, el que está alejado del plano permanece en reposo. Cuando las oscilaciones las realiza un cuerpo de otra forma cualquiera, el fluido se ve desplazado y entonces realiza un movimiento en el que la velocidad disminuye apreciablemente sólo a distancias del orden de las dimensiones del propio cuerpo.

al cuerpo, el flujo en todos los demás puntos viene dado por las ecuaciones

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{24.12}$$

De aquí resulta que $\Delta \mathbf{v} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. Por consiguiente, el flujo es ideal en todas partes, excepto en la capa superficial. Puesto que esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones (24.12) para determinar el flujo del resto del fluido deberemos tomar como condiciones límites aquéllas que deben satisfacerse en las superficies del cuerpo, es decir, que la velocidad del fluido es igual a la del cuerpo. Sin embargo, las soluciones de las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal no pueden satisfacer estas condiciones. Entonces podemos exigir únicamente que se cumpla la condición correspondiente para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido.

Aunque las ecuaciones (24.12) son inaplicables en la capa superficial del fluido, la distribución de velocidades obtenida al resolverlas satisface la condición límite necesaria para la componente de velocidad normal y, por consiguiente, carece de propiedades significativas la variación real de esta componente cerca de la superficie. Se podría hallar la componente tangencial resolviendo la ecuación (24.12) y así se encuentra que tiene valores diferentes a la componente de velocidad correspondiente del cuerpo, aunque estas componentes de velocidad deberían ser también iguales. De aquí que la componente de velocidad tangencial debe variar rápidamente en la capa superficial. Se determina fácilmente la naturaleza de esta variación. Consideremos una porción cualquiera de la superficie del cuerpo, de dimensión grande en comparación con δ, pero pequeña en comparación con la dimensión del cuerpo. Puede considerarse dicha parte como aproximadamente plana y, por consiguiente, podemos utilizar los resultados obtenidos anteriormente para una superficie plana. Supongamos que el eje x está dirigido a lo largo de la normal a la parte considerada y que el eje y es paralelo a la componente de velocidad tangencial de la superficie en dicho punto. Designaremos por v_y la componente tangencial de la velocidad del fluido relativa al cuerpo; v_y debe anularse en la superficie. Finalmente, sea $v_0 e^{-i\omega t}$ el valor de v_y que se encuentra al resolver las ecuaciones (24.12). A partir de los resultados obtenidos al principio de esta sección, podemos decir que en la capa superficial la cantidad v_y tenderá hacia cero cuando nos acercamos a la superficie de acuerdo con la ley

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t}[1 - e^{-(1-i)x\sqrt{(\omega/2\nu)}}]. \tag{24.13}$$

Finalmente, la cantidad total de energía disipada en la unidad de tiempo vendrá dada por la integral

$$\bar{E}_{\mathrm{kin}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}\eta\rho\omega)} \oint |v_0|^2 \, df \tag{24.14}$$

extendida a toda la superficie del cuerpo oscilante.

En los problemas al final de esta sección calcularemos el arrastre sobre varios cuerpos que oscilan dentro de un fluido viscoso. En este momento haremos las siguientes consideraciones generales respecto a estas fuerzas. Escribiendo la velocidad del cuerpo en forma compleja $u = u_0 e^{-i\omega t}$, obtenemos una fuerza de arrastre F proporcional a la velocidad u, y también compleja: $F = \beta u$, en donde $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ es una constante compleja. Esta expresión puede escribirse como la suma de dos términos con coeficientes reales:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)u = \beta_1 u - \beta_2 \dot{u}/\omega, \tag{24.15}$$

Uno de ellos es proporcional a la velocidad u y el otro a la aceleración $\dot{u}$.

El promedio temporal de la disipación de energía viene dado por el producto medio del arrastre por la velocidad, en donde, como es natural, debemos primero tomar las partes reales de las expresiones dadas anteriormente, es decir, $u = \frac{1}{2}(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t})$ y $F = \frac{1}{2}(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t})$. Observando que los valores medios de $e^{\pm 2i\omega t}$ son nulos, tenemos

$$\overline{Fu} = \tfrac{1}{4}(\beta + \beta^*)\,|u_0|^2 = \tfrac{1}{2}\beta_1\,|u_0|^2. \tag{24.16}$$

Así pues, vemos que la disipación de energía surge únicamente de la parte real de β; la parte correspondiente de la fuerza de arrastre (24.15), proporcional a la velocidad, puede denominarse la *parte disipativa*. La otra parte del arrastre, proporcional a la aceleración y determinada por la parte imaginaria de β, no origina disipación de energía y puede denominarse *parte inercial*.

Son válidas consideraciones semejantes para el momento de las fuerzas sobre un cuerpo que realiza oscilaciones de rotación en un fluido viscoso.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la fuerza de rozamiento sobre cada uno de los dos planos paralelos entre los cuales existen una capa de fluido viscoso, cuando uno de ellos oscila en su propio plano.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (24.3) de la forma†

$$v = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx)e^{-i\omega t}$$

y determinemos A y B mediante las condiciones $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ para $x = 0$ y $v = 0$ cuando $x = h$, siendo h la distancia entre los planos. El resultado es

$$v = u\frac{\operatorname{sen} k(h-x)}{\operatorname{sen} kh}.$$

La fuerza de rozamiento por área unidad sobre el plano móvil es

$$P_{1x} = \eta(\partial v/\partial x)_{x=0} = -\eta k u \cot kh,$$

† En todos los problemas de esta sección, δ designa la magnitud (24.5):

$$\delta = \sqrt{(2\nu/\omega)}, \quad \text{y} \quad k = (1+i)/\delta.$$

mientras que la correspondiente al plano fijo es

$$P_{2x} = -\eta(\partial v/\partial x)_{x=h} = \eta k u \operatorname{cosec} kh,$$

sobreentendiéndose que se trata de las partes reales de todas las magnitudes.

Problema 2. Determinar la fuerza de rozamiento sobre un plano oscilante cubierto por una capa de fluido de espesor h, cuya superficie superior está libre.

Solución. La condición límite en el plano sólido es $v = u$ para $x = 0$, y la correspondiente a la superficie libre es $\sigma_{xy} = \eta\partial v/\partial x = 0$ para $x = h$. Así hallamos la velocidad

$$v = u\frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}.$$

La fuerza de rozamiento es

$$P_x = \eta(\partial v/\partial x)_{x=0} = \eta k u \operatorname{tg} kh.$$

Problema 3. Un disco plano de radio grande R realiza unas oscilaciones de rotación de amplitud pequeña alrededor de su eje, siendo el ángulo de rotación $\theta = \theta_0 \cos \omega t$, en donde $\theta_0 \ll 1$. Determinar el momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el disco.

Solución. En el caso de oscilaciones de amplitud pequeña el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación del movimiento es siempre pequeño en comparación con $\partial\mathbf{v}/\partial t$, sea cual sea la frecuencia ω. Si $R \gg \delta$, puede considerarse como infinito el disco al determinar la distribución de velocidades. Tomaremos ordenadas cilíndricas con el eje z situado a lo largo del eje de rotación y buscaremos una solución tal que $v_r = v_z = 0$, $v_\phi = v = r\Omega(z, t)$. Para la velocidad angular $\Omega(z, t)$ del fluido obtenemos la ecuación

$$\partial\Omega/\partial t = \nu\partial^2\Omega/\partial z^2.$$

La solución de esta ecuación que vale $-\omega\theta_0 \operatorname{sen} \omega t$ para $z = 0$ y cero para $z = \infty$ es

$$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-z/\delta}\operatorname{sen}(\omega t - z/\delta).$$

El momento de las fuerzas de rozamiento sobre ambas caras del disco es

$$M = 2\int_0^R r\cdot 2\pi r\eta\,(\partial v/\partial z)_{z=0}\,dr = \omega\theta_0\pi\sqrt{(\omega\rho\eta)}R^4\cos(\omega t - \tfrac{1}{4}\pi).$$

Problema 4. Determinar el flujo existente entre dos planos paralelos cuando existe un gradiente de presiones que varía armónicamente con el tiempo.

Solución. Tomaremos el plano intermedio entre ambos planos como plano coordenado xz, estando el eje x paralelo al gradiente de presiones, el cual puede escribirse en la forma

$$-(1/\rho)\partial p/\partial x = ae^{-i\omega t}.$$

La velocidad en todo punto tiene la dirección x y está determinada por la ecuación

$$\partial v/\partial t = ae^{-i\omega t} + \nu\partial^2 v/\partial y^2.$$

La solución de esta ecuación que satisface las condiciones $v = 0$ para $y = \pm 1/2h$ es

$$v = \frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}\left[1 - \frac{\cos ky}{\cos \frac{1}{2}kh}\right].$$

El valor medio de la velocidad en toda sección recta es

$$\bar{v} = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}\left(1 - \frac{2}{kh}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}kh\right).$$

Para $h/\delta \ll 1$ esta expresión se transforma en

$$\bar{v} \approx ae^{-i\omega t}h^2/12\nu,$$

de acuerdo con (17.5), mientras que para $h/\delta \gg 1$ tenemos

$$\bar{v} \approx (ia/\omega)e^{-i\omega t},$$

de acuerdo con el hecho de que en este caso la velocidad debe ser casi constante en toda la sección recta, variando únicamente en una capa superficial estrecha.

Problema 5. Determinar la fuerza de arrastre sobre una esfera de radio R que realiza oscilaciones de traslación dentro de un fluido.

Solución. Escribamos la velocidad de la esfera en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$. Del mismo modo que en § 20, buscaremos una velocidad del fluido en la forma $\mathbf{v} = e^{-i\omega t}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,f\mathbf{u}_0$, en donde f es una función de r únicamente. (Se toma el origen en la posición instantánea del centro de la esfera.) Sustituyendo en (24.9) y realizando unas transformaciones semejantes a las realizadas en § 20, obtenemos la ecuación

$$\Delta^2 f + (i\omega/\nu)\,\Delta f = 0$$

(en lugar de la ecuación $\Delta^2 f = 0$ que se obtuvo en § 20). De aquí que obtengamos

$$\Delta f = \text{constant} \times e^{ikr}/r,$$

escogiéndose la solución de tal modo que disminuye exponencialmente con r. Integrando, tenemos

$$df/dr = [ae^{ikr}(r - 1/ik) + b]/r^2; \tag{1}$$

no es necesario tener la propia función f, puesto que únicamente aparecen en la velocidad las derivadas f' y f''. Se determinan las constantes a y b a partir de la condición de que $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ para $r = R$, y resultan ser

$$a = -\frac{3R}{2ik}e^{-ikR}, \qquad b = -\tfrac{1}{2}R^3\left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2R^2}\right). \tag{2}$$

Debe señalarse que, a distancias grandes ($R \gg \delta$), $a \to 0$ y $b \to -1/2R^3$, habiéndose obtenido los valores para el flujo potencial en § 10, problema 2; éste está de acuerdo con lo que se ha dicho en § 24.

Se calcula el arrastre mediante la fórmula (20.13), en la cual la integración se extiende a la superficie de la esfera. El resultado es

$$F = 6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)u + 3\pi R^2\sqrt{(2\eta\rho/\omega)}\left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right)\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

Para $\omega = 0$ esta expresión se transforma en la fórmula de Stokes, mientras que para frecuencias grandes tenemos

$$F = \tfrac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{du}{dt} + 3\pi R^2\sqrt{(2\eta\rho\omega)}u.$$

El primer término de esta expresión corresponde a la fuerza inercial en el flujo potencial que rodea la esfera (ver § 11, problema 1), mientras que el segundo da el límite de la fuerza disipativa.

Problema 6. Determinar el arrastre sobre una esfera que se mueve en una forma arbitraria, viniendo dada la velocidad por una función $u(t)$.

Solución. Representaremos $u(t)$ como una integral de Fourier:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega, \qquad u_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{i\omega\tau}\,d\tau.$$

Puesto que las ecuaciones son lineales, el arrastre total puede escribirse como la integral de las fuerzas del arrastre para las velocidades que son las componentes separadas de Fourier $u_\omega e^{-i\omega t}$; estas fuerzas vienen dadas por (3) del problema 5, y son

$$\pi\rho R^3 u_\omega e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{(2\nu)}}{R}(1-i)\sqrt{\omega}\right\}.$$

Observando que $(du/dt)_\omega = -i\omega u_\omega$, podemos volver a escribir esta expresión como

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2}u_\omega + \tfrac{2}{3}(\dot{u})_\omega + \frac{3\sqrt{(2\nu)}}{R}(\dot{u})_\omega\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right\}.$$

Al realizar la integración respecto a ω, el primero y segundo término dan, respectivamente, $u(t)$ y $\dot{u}(t)$. Para integrar el tercer término observaremos primero que en el caso de ω negativo este término debe escribirse en la forma del complejo conjugado, teniéndose que sustituir la forma $(1+i)/\sqrt{\omega}$ por $(1-i)/\sqrt{|\omega|}$; esto se debe a que la fórmula (3) del problema 5 se dedujo para una velocidad $u = u_0 e^{-i\omega t}$, con $\omega > 0$, y para una velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ deberíamos obtener la conjugada compleja. En lugar de una integral respecto a ω extendida desde $-\infty$ hasta $+\infty$, podemos tomar el doble de la parte real del integrando desde 0 hasta ∞. Escribiremos así

$$2\,\mathrm{re}\left\{(1+i)\int_0^\infty \frac{(\dot{u})_\omega e^{-i\omega}}{\sqrt{\omega}}d\omega\right\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)\,e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{t}\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)\,e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau + (1+i)\int_t^\infty\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)\,e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega d\tau\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{re}\left\{\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}}d\tau + i\int_t^\infty \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(\tau-t)}}d\tau\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}}d\tau.$$

Así pues, tenemos finalmente para la fuerza de arrastre

$$F = 2\pi\rho R^3\left\{\frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3\nu u}{R^2} + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}\right\}. \tag{1}$$

Problema 7. Determinar el arrastre sobre una esfera que en el instante $t = 0$ empieza a moverse con una aceleración uniforme $u = \alpha t$.

Solución. Poniendo en la fórmula (1) del problema 6, $u = 0$ para $t < 0$ y $u = \alpha t$ para $t > 0$, tenemos para $t > 0$

$$F = 2\pi\rho R^3\alpha\left[\frac{1}{3} + \frac{3\nu t}{R^2} + \frac{6}{R}\sqrt{\frac{t\nu}{\pi}}\right].$$

Problema 8. Igual que el problema 7, pero ahora para una esfera que se pone instantáneamente en movimiento uniforme.

Solución. Tenemos ahora $u = 0$ para $t < 0$ y $u = u_0$ para $t > 0$. La derivada du/dt es cero excepto en el instante $t = 0$, en cuyo momento es infinita, pero la integral temporal de du/dt es finita e igual a u_0. Como resultado, tenemos para todo $t > 0$

$$F = 6\pi\rho\nu R u_0\left[1 + \frac{R}{\sqrt{(\pi\nu t)}}\right] + \tfrac{2}{3}\pi\rho R^3 u_0\delta(t),$$

siendo $\delta(t)$ la función delta. Para $t \to \infty$ esta expresión tiende asintóticamente al valor dado por la fórmula de Stokes. Se obtiene la fuerza de arrastre impulsivo sobre la esfera en el instante $t = 0$ integrando el último término y resulta valer $2\pi\rho R^3 u_0/3$.

Problema 9. Determinar el momento de las fuerzas que actúan sobre una esfera que está realizando oscilaciones de rotación alrededor de un diámetro y en el interior de un fluido viscoso.

Solución. Por las mismas razones que en § 20, problema 1, el término de gradiente de presión puede omitirse en la ecuación del movimiento, de modo que tenemos $\partial\mathbf{v}/\partial t = \nu\Delta\mathbf{v}$. Busquemos una solución de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\, f\boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t}$, en donde $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t}$ es la velocidad angular de rotación de la esfera. Entonces, obtenemos para f, en lugar de la ecuación $\Delta f =$ constante, la expresión

$$\Delta f + k^2 f = \text{constante}.$$

Omitiendo un término constante que carece de importancia en la solución de esta cuestión, hallamos $f = ae^{ikr}/r$ tomando la solución que se anula en el infinito. Se determina la constante a mediante la condición límite de que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ en la superficie de la esfera. El resultado es

$$f = \frac{R^3}{1 - ikR}e^{ik(r-R)}, \qquad \mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1 - ikr}{1 - ikR}e^{ik(r-R)},$$

siendo R el radio de la esfera. Un cálculo semejante al realizado en § 20, problema 1, da la siguiente expresión para el momento de las fuerzas ejercidas por el fluido sobre la esfera:

$$M = -\frac{8\pi}{3}\eta R^3\Omega\frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2}.$$

Para $\omega \to 0$ (es decir, $\delta \to \infty$), obtenemos $M = -8\pi\eta R^3\Omega$, que corresponde a una rotación uniforme de la esfera (ver § 20, problema 1). En el caso límite opuesto $R/\delta \gg 1$, encontramos

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4\sqrt{(\eta\rho\omega)}(i - 1)\Omega.$$

Esta expresión puede obtenerse también directamente: para $\delta \gg R$ cada elemento de la superficie de la esfera puede considerarse como plano y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el mismo se encuentra sustituyendo en la fórmula (24.6) $u = \Omega R \operatorname{sen} \theta$.

Problema 10. Determinar el momento de las fuerzas sobre una esfera hueca llena con fluido viscoso que realiza unas oscilaciones de rotación alrededor de un diámetro.

Solución. Buscaremos la velocidad en la misma forma que en el problema 9. Para f tomaremos la solución $(a/r) \operatorname{sen} kr$, que es finita en todo punto dentro de la esfera, incluyendo el centro. Determinando a mediante la condición límite, tenemos

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{kr\cos kr - \operatorname{sen} kr}{kR\cos kR - \operatorname{sen} kR}.$$

Un cálculo del momento de las fuerzas de rozamiento da la expresión

$$M = \tfrac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega \frac{k^2R^2\operatorname{sen} kR + 3kR\cos kR - 3\operatorname{sen} kR}{kR\cos kR - \operatorname{sen} kR}.$$

El valor límite para $\delta \gg 1$ es, como es natural, el mismo que en el problema anterior. Si $R/\delta \ll 1$ tenemos

$$M = \tfrac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i - \frac{R^2\omega}{35\nu}\right).$$

El primer término corresponde a las fuerzas de inercia que se presentan en la rotación rígida del fluido completo.

§ 25. Amortiguamiento de las ondas de gravedad

Pueden adelantarse razonamientos semejantes a los dados anteriormente respecto a la distribución de velocidades cerca de la superficie libre de un fluido. Consideremos el movimiento oscilante que se produce cerca de la superficie (por ejemplo, ondas de gravedad). Supongamos que son válidas las condiciones (24.11) sustituyendo ahora la dimensión l por la longitud de onda λ:

$$\lambda^2\omega \gg \nu, \qquad a \ll \lambda; \tag{25.1}$$

a es la amplitud de la onda y ω su frecuencia. Podemos decir entonces que el flujo es rotacional únicamente en una capa de superficie delgada, mientras que en todo el resto del fluido tenemos un flujo potencial, lo mismo que ocurriría en el caso de un fluido ideal.

El movimiento de un fluido viscoso debe satisfacer las condiciones límites (15.14) en la superficie libre; esto exige que se anulen ciertas combinaciones de las derivadas espaciales de la velocidad. El flujo obtenido resolviendo las ecuaciones de la dinámica de los fluidos ideales no satisface, sin embargo, estas condiciones. Como en el estudio de v_y realizado en la sección anterior, podemos concluir que las correspondientes derivadas de la veloci-

dad disminuyen rápidamente en el interior de una capa superficial delgada. Es importante observar que esto no implica un gradiente de velocidades grande, como ocurre cerca de una superficie sólida.

Calculemos la disipación de energía en una onda de gravedad. Aquí debemos considerar la disipación, no de la energía cinética sola, sino de la energía mecánica E_{mec}, que incluye tanto la energía cinética como la energía potencial del campo gravitatorio. Sin embargo, resulta claro que la presencia o ausencia de un campo gravitatorio no puede influir en la disipación de energía debido a los procesos de rozamiento interno en el fluido. De aquí que $\dot{E}_{\text{mec}}$ venga dada por la misma fórmula (16.3):

$$\dot{E}_{\text{mec}} = -\tfrac{1}{2}\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}V.$$

Al calcular esta integral para una onda de gravedad, debe señalarse que, puesto que es pequeño el volumen de la región superficial de flujo de rotación y mientras no se grande el gradiente de velocidad allí, puede ignorarse la existencia de esta región a diferencia de lo que sucedía en el caso de oscilaciones de una superficie sólida. En otras palabras, la integración ha de extenderse a todo el volumen del fluido, el cual, como hemos visto, se mueve como si fuese un fluido ideal.

El flujo de una onda de gravedad en el caso de un fluido ideal ya se ha determinado en § 12. Puesto que tenemos flujo potencial,

$$\partial v_i/\partial x_k = \partial^2\phi/\partial x_k \partial x_i = \partial v_k/\partial x_i,$$

de modo que

$$\dot{E}_{\text{mec}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \mathrm{d}V.$$

El potencial ϕ tiene la forma

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) e^{-kz}.$$

Como es natural, estamos interesados no en el valor instantáneo de la disipación de energía, sino en su valor medio $\bar{\dot{E}}_{\text{mec}}$ respecto al tiempo. Observando que son iguales los valores medios de los senos y cosenos al cuadrado, se tiene

$$\bar{\dot{E}}_{\text{mec}} = -8\eta k^4 \int \overline{\phi^2}\, \mathrm{d}V. \tag{25.2}$$

Puede calcularse la propia energía E_{mec} en el caso de una onda de gravedad utilizando un teorema de la mecánica que dice que en un sistema cualquiera, que realiza pequeñas oscilaciones (es decir, de pequeña amplitud), son iguales la energía cinética y la energía potencial media. Por consiguiente, podemos escribir $\bar{E}_{\text{mec}}$ como el doble de la energía cinética:

$$\bar{E}_{\text{mec}} = \rho \int \overline{v^2}\, \mathrm{d}V = \rho \int \overline{(\partial\phi/\partial x_i)^2}\, \mathrm{d}V,$$

y de aquí

$$\bar{E}_{\text{mec}} = 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2}\, \mathrm{d}V. \tag{25.3}$$

El amortiguamiento de las ondas se caracteriza de modo conveniente por el *coeficiente de amortiguamiento* γ, definido como

$$\gamma = |\dot{\bar{E}}_{\text{mec}}|/2\bar{E}_{\text{mec}}. \tag{25.4}$$

En el transcurso del tiempo, la energía de la onda disminuye de acuerdo con la ley $\bar{E}_{\text{mec}} = \text{constante} \times e^{-2\gamma t}$; puesto que la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la última disminuye con el tiempo, como $e^{-\gamma t}$.

Utilizando (25.2) y (25.3), tenemos

$$\gamma = 2\nu k^2. \tag{25.5}$$

Sustituyendo aquí la expresión (12.7), obtenemos el coeficiente de amortiguamiento para ondas de gravedad en la forma

$$\gamma = 2\nu\omega^4/g^2. \tag{25.6}$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el coeficiente de amortiguamiento para ondas de gravedad largas que se propagan en un canal de sección recta constante; se supone que la frecuencia es tan grande que $\sqrt{(\nu/\omega)}$ es pequeño en comparación con la profundidad del fluido en el canal.

Solución. La principal disipación de energía se produce en la capa superficial de fluido, en donde la velocidad varía desde cero en su límite hasta el valor $v = v_0 e^{-i\omega t}$ que tiene en la onda. La disipación de energía media por unidad de longitud del canal viene dada según (24.14) por $l|v_0|^2\sqrt{(\eta\rho\omega/8)}$, en donde l es el perímetro de la parte de la sección recta de canal ocupada por el fluido. La energía media del fluido (de nuevo por unidad de longitud) es $S\rho v^2 = 1/2S\rho|v_0|^2$, siendo S el área de la sección recta del fluido en el canal. El coeficiente de amortiguamiento es $\gamma = l\sqrt{(\nu\omega/8S^2)}$. Por consiguiente, en el caso de un canal de sección rectangular,

$$\gamma = \frac{2h+a}{2\sqrt{2ah}}\sqrt{(\nu\omega)},$$

siendo a la anchura y h la profundidad del fluido.

Problema 2. Determinar el flujo de una onda de gravedad en el caso de un fluido muy viscoso.

Solución. El cálculo del coeficiente de amortiguamiento, tal y como hemos visto anteriormente, es válido únicamente cuando el coeficiente es pequeño, de modo que el movimiento pueda considerarse como el correspondiente a un fluido ideal en primera aproximación. Si tenemos una viscosidad arbitraria buscaremos una solución de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

que dependa de t y de x como $e^{-i\omega t+ikx}$, y disminuya en el interior del fluido ($z<0$). Así se tiene

$$v_x = e^{-i\omega t+ikx}(Ae^{kz}+Be^{mz}), \qquad v_z = e^{-i\omega t+ikx}\left(-iAe^{kz}-\frac{ik}{m}Be^{mz}\right),$$

$$p/\rho = e^{-i\omega t+ikx}\,\omega Ae^{kz}/k-gz, \text{ en donde } m = \sqrt{(k^2-i\omega/\nu)}.$$

Las condiciones límites en la superficie del fluido son

$$\sigma_{zz} = -p+2\eta\,\partial v_z/\partial z = 0, \qquad \sigma_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0 \text{ para } z = \zeta.$$

De la segunda condición se puede poner inmediatamente $z = 0$ en lugar de $z = \zeta$. Sin embargo, la primera condición deberá derivarse respecto a t, después de lo cual sustituiremos $g\partial\zeta/\partial t$ por gv_z y luego haremos $z = 0$. La condición de que son compatibles las dos ecuaciones homogéneas resultantes para A y B nos da

$$\left(2-\frac{i\omega}{\nu k^2}\right)^2+\frac{g}{\nu^2k^3} = 4\sqrt{\left(1-\frac{i\omega}{\nu k^2}\right)}. \tag{2}$$

Esta ecuación da ω en función del número de ondas k; ω es compleja, dando su parte real la frecuencia de las oscilaciones y su parte imaginaria el coeficiente de amortiguamiento. Las soluciones de la ecuación (2) que tienen significado físico son aquéllas cuya parte imaginaria son negativas (que corresponden al amortiguamiento de la onda); solamente dos de las raíces de (2) cumplen este requisito. Si $\nu k^2 \ll \sqrt{(gk)}$ [la condición (25.1)], entonces el coeficiente de amortiguamiento pequeño y (2) da aproximadamente $\omega = \pm\sqrt{(gk)} - i\cdot 2\nu k^2$, un resultado que ya sabíamos. En el caso límite opuesto $\nu k^2 \gg \sqrt{(gk)}$, la ecuación (2) tiene dos raíces imaginarias puras, lo cual corresponde a un flujo aperiódico amortiguado. Una raíz es $\omega = -ig/2\nu k$, mientras que la otra es mucho mayor (del orden de νk^2), y, por consiguiente, carece de interés, puesto que el movimiento correspondiente está muy amortiguado.

CAPÍTULO III

TURBULENCIA

§ 26. Estabilidad del flujo estacionario

Al resolver las ecuaciones del flujo estacionario correspondientes a un fluido viscoso suele ser necesario hacer ciertas aproximaciones para simplificar determinadas dificultades matemáticas. Como es natural, la validez de estas soluciones aproximadas es restringida. Por ejemplo, tal es el caso de la solución del problema del flujo que rodea una esfera dado en § 20, que únicamente es válido para números de Reynolds pequeños.

Sin embargo, en principio debe existir una solución estacionaria exacta de las ecuaciones de la dinámica de fluidos para cualquier problema con condiciones externas estacionarias dadas; dichas soluciones exactas se han considerado en §§ 17, 18 y 23. Estas soluciones son válidas formalmente para todos los valores de los números de Reynolds.

Pero ni siquiera todas los soluciones de las ecuaciones del movimiento, aunque sean exactas, pueden realmente producirse en la naturaleza. Los flujos que se presentan en la naturaleza no sólo deben obedecer las ecuaciones de la dinámica de los fluidos, sino también ser estables. Para que el flujo sea estable es necesario que si se producen pequeñas perturbaciones éstas disminuyan con el tiempo. Por el contrario, si las pequeñas perturbaciones que se producen inevitablemente en el flujo tienden a aumentar con el tiempo, entonces el flujo es absolutamente inestable. No puede existir entonces un flujo inestable de este tipo producido por perturbaciones infinitamente pequeñas.

El estudio o análisis matemático de la estabilidad de un flujo determinado respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas se realiza del modo siguiente. En lo que se refiere a la solución estacionaria [cuya distribución de velocidades es $\mathbf{v}_0(x, y, z)$, por ejemplo], supondremos una pequeña perturbación no estacionaria $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$, que debe ser de un tipo tal que la velocidad resultante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ satisfaga las ecuaciones del movimiento. Se obtiene la ecuación para $\mathbf{v}_1$ sustituyendo en las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho} + \nu\triangle\mathbf{v}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0$$

la velocidad y la presión $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, $p = p_0 + p_1$, en donde las funciones conocidas $\mathbf{v}_0$ y p_0 satisfacen las ecuaciones sin perturbar

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{grad}\, p_0}{\rho} + \nu \triangle \mathbf{v}_0, \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{v}_0 = 0.$$

Omitiendo los términos superiores al primer orden en $\mathbf{v}_1$, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{grad}\, p_1}{\rho} + \nu \triangle \mathbf{v}_1, \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{v}_1 = 0. \tag{26.1}$$

La condición límite es que $\mathbf{v}_1$ se anule en las superficies sólidas.

Así pues, $\mathbf{v}_1$ satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes que son funciones de las coordenadas únicamente y no del tiempo. Puede representarse la solución general de dichas ecuaciones como una suma de soluciones particulares en las que $\mathbf{v}_1$ depende del tiempo como $e^{-i\omega t}$. Las «frecuencias» ω de las perturbaciones no son arbitrarias, sino que se determinan resolviendo las ecuaciones (26.1) con las condiciones de los límites apropiadas. En general, las «frecuencias» son complejas. Si existen valores de ω cuyas partes imaginarias sean positivas, $e^{-i\omega t}$ aumentará indefinidamente con el tiempo. En otras palabras, dichas perturbaciones, una vez producidas, aumentarán, siendo el flujo inestable respecto a las mismas. Para que el flujo sea estable es necesario que la parte imaginaria de cualquier posible «frecuencia» sea negativa. Las perturbaciones que se produzcan disminuirán entonces exponencialmente con el tiempo.

Sin embargo, el estudio matemático de la estabilidad es extraordinariamente complicado. Todavía no ha sido resuelto el problema teórico de la estabilidad del flujo estacionario que rodea a un cuerpo de dimensiones finitas. Es cierto que el flujo estacionario es estable para números de Reynolds suficientemente pequeños. Los datos experimentales parecen indicar que, cuando R aumenta, finalmente se alcance un valor R_{cr} (*número de Reynolds crítico*), más allá del cual el flujo es inestable respecto a perturbaciones infinitesimales. Para valores suficientemente grandes del número de Reynolds ($R > R_{cr}$) es imposible, por tanto, el flujo estacionario rodeando a cuerpos sólidos. Como es natural, el número de Reynolds crítico no es una constante universal, sino que toma un valor diferente para cada tipo de flujo. Estos valores parecen ser del orden de diez a cien; por ejemplo, se ha observado para valores de $R = ud/\nu = 34$, la existencia de unos flujos alrededor de cilindros que son no estacionarios y no amortiguados, siendo d el diámetro del cilindro. Sin embargo, no se han realizado todavía medidas exactas de R_{cr}.

§ 27. Establecimiento de la turbulencia

Consideremos ahora la naturaleza del flujo no estacionario que se establece como resultado de la inestabilidad absoluta del flujo estacionario para números de Reynolds grandes. Empezaremos examinando las propiedades de este flujo a números de Reynolds sólo ligeramente mayores que R_{cr}. Para $R < R_{cr}$ las partes imaginarias de las «frecuencias» complejas $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ son negativas para todas las perturbaciones posibles de velocidad pequeña ($\gamma_1 < 0$). Para $R = R_{cr}$ existe una frecuencia cuya parte imaginaria es cero. Para $R > R_{cr}$ la parte imaginaria de esta frecuencia es positiva, pero cuando R está próximo a R_{cr}, γ_1 es pequeña en comparación con la parte real ω_1.† La función $\mathbf{v}_1$ correspondiente a esta frecuencia es de la forma

$$\mathbf{v}_1 = A(t)\mathbf{f}(x, y, z), \tag{27.1}$$

siendo **f** una función compleja de las coordenadas, y siendo $A(t)$ la «amplitud» compleja‡

$$A(t) = \text{constante} \times e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}. \tag{27.2}$$

Sin embargo, esta expresión para $A(t)$ es realmente válida sólo durante un intervalo corto de tiempo después de la rotura del flujo estacionario; el factor $e^{\gamma_1 t}$ aumenta rápidamente con el tiempo, mientras que el método de determinar $\mathbf{v}_1$ dado en § 26, que condujo a expresiones como (27.1) y (27.2), se aplica únicamente cuando $|\mathbf{v}'|$ es pequeño. Como es natural, el módulo $|A|$ de la amplitud del flujo no estacionario, en realidad no aumenta sin límite, sino que tiende a un valor finito. Para R próximo a R_{cr} (con lo que queremos significar siempre $R > R_{cr}$), este valor finito es pequeño y puede determinarse del modo siguiente.

Obtengamos la derivada respecto al tiempo del cuadrado de la amplitud $|A|^2$. Para valores muy pequeños de t, cuando (27.2) sigue siendo válida, tenemos $d|A|^2/dt = 2\gamma_1|A|^2$. Esta expresión coincide exactamente con el primer término de un desarrollo en serie de potencias de A y A^*. Cuando aumenta el módulo $|A|$ (siendo todavía pequeño), deben tenerse en cuenta los términos siguientes de este desarrollo. Los términos que siguen son los de tercer orden en A. Sin embargo, no estamos interesados en el valor exacto de la derivada $d|A|^2/dt$, sino en su promedio temporal tomado en tiempos grandes en comparación con el período $2\pi/\omega_1$ del factor $e^{-i\omega_1 t}$; recordemos que, puesto que $\omega_1 \gg \gamma_1$, este período es pequeño en comparación con el tiempo $1/\gamma_1$,

† Debe recordarse que el conjunto (o *espectro*) de todas las frecuencias posibles para un tipo de flujo determinado incluye tanto los valores aislados separados (*espectro discreto*) y la totalidad de los diversos intervalos continuos de frecuencia (*espectro continuo*). Sin embargo, puede verse que las frecuencias con partes imaginarias positivas que nos interesan aparecen, en general, sólo en el espectro discreto.

‡ Como es normal, entendemos la parte real de (27.2).

requerido para que varíe apreciablemente el módulo de la amplitud $|A|$. Sin embargo, los términos de tercer orden deben contener el factor periódico y, por tanto, se anulan al promediar.† En los términos de cuarto orden se incluye uno que es proporcional a $A^2A^{*2} = |A|^4$, que claramente no se anula al promediar. Así pues, tenemos hasta los términos de cuarto orden

$$\overline{\mathrm{d}|A|^2/\mathrm{d}t} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4. \tag{27.3}$$

en donde α puede ser positivo o negativo.

Supongamos que α es positivo.‡ No hemos puesto barras encima de $|A|^2$ y $|A|^4$, puesto que el promedio corresponde únicamente a un intervalo de tiempo corto en comparación con $1/\gamma_1$. Por la misma razón, al resolver la ecuación procederemos como si se omitiese la barra situada también sobre la derivada. La solución de la ecuación (27.3) es

$$1/|A|^2 = \alpha/2\gamma_1 + \text{constante} \times e^{-2\gamma_1 t}.$$

Resulta evidente que $|A|^2$ tiende asintóticamente a un límite finito:

$$|A|^2_{\max} = 2\gamma_1/\alpha. \tag{27.4}$$

La magnitud γ_1 es una función determinada del número de Reynolds. Cerca de R_{cr} puede desarrollarse en una serie de potencias de $R - R_{cr}$. Pero $\gamma_1(R_{cr}) = 0$, por definición del número de Reynolds crítico. De aquí que el término de orden cero del desarrollo sea nulo y tenemos hasta el primer orden $\gamma_1 = \text{constante} \times (R - R_{cr})$. Sustituyendo este valor en (27.4), vemos que el módulo $|A|$ de la amplitud es proporcional a la raíz cuadrada de $R - R_{cr}$:

$$|A|_{\max} \sim \sqrt{(R - R_{cr})}. \tag{27.5}$$

Resumamos estos resultados. La inestabilidad absoluta del flujo para $R > R_{cr}$ conduce a la aparición de un flujo periódico no estacionario. Para R próximo a R_{cr} este último flujo puede representarse superponiendo sobre el flujo estacionario $\mathbf{v}_0(x, y, z)$ un flujo periódico $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$ con una amplitud pequeña pero finita que aumenta con R proporcionalmente a la raíz cuadrada de $R - R_{cr}$. La distribución de velocidades en este flujo es de la forma

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(x, y, z)e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \tag{27.6}$$

en donde $\mathbf{f}$ es una función compleja de las coordenadas y β_1 es una determinada fase inicial. Para valores grandes de $R - R_{cr}$, la separación o descomposición de la velocidad en $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$ deja de tener significado. Entonces tenemos simplemente un cierto flujo periódico con frecuencia ω_1. Si, en lugar de tiem-

† Estrictamente hablando, los términos de tercer orden no dan un resultado nulo al promediar, sino términos de cuarto orden, que se suponen incluidos en los otros términos de cuarto orden del desarrollo.

‡ Esto parece ser cierto en el caso de flujos normales alrededor de los cuerpos.

po, utilizamos como variable independiente la fase $\phi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, podemos decir que la función $\mathbf{v}(x, y, z, \phi_1)$ es una función periódica de ϕ_1 con período 2π. Sin embargo, esta función ya no es una función trigonométrica sencilla. Su desarrollo en serie de Fourier

$$\mathbf{v} = \sum_p \mathbf{A}_p(x, y, z) e^{-ip\phi_1 p} \tag{27.7}$$

(en donde la suma se extiende a todos los números enteros p, positivos y negativos) incluye no solamente los términos con la frecuencia fundamental ω_1, sino también términos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de ω_1.

También debe mencionarse la siguiente propiedad importante de este flujo no estacionario. La ecuación (27.3) determina únicamente el módulo del factor temporal $A(t)$ y no su fase. La fase $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ del flujo periódico permanece esencialmente indeterminada, y depende de las condiciones iniciales particulares que se producen en el instante en que empieza el flujo. La fase inicial de esta suma puede tener cualquier valor, dependiendo de estas condiciones. Así pues, el flujo periódico en consideración no está determinado únicamente por las condiciones externas estacionarias dadas en las que tiene lugar el flujo. Permanece arbitraria una cantidad — la fase inicial de la velocidad. Podemos decir que el flujo tiene un grado de libertad, mientras que el flujo estacionario que está totalmente determinado por las condiciones externas no tiene ningún grado de libertad. Consideremos, a continuación, los fenómenos que se producen cuando aumenta aún más el número de Reynolds. Cuando esto ocurre, llega, finalmente, un tiempo en que el flujo periódico estudiado anteriormente a su vez se hace inestable. La investigación de esta inestabilidad deberá seguir un método† semejante al dado anteriormente para determinar la inestabilidad del flujo estacionario original. La parte del flujo no perturbado se toma ahora como flujo periódico $\mathbf{v}_0(x, y, z, t)$ (con frecuencia ω_1), y en las ecuaciones del movimiento sustituimos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, en donde $\mathbf{v}_2$ es una pequaña corrección. Para $\mathbf{v}_2$ obtenemos de nuevo una ecuación lineal, pero los coeficientes son ahora funciones del tiempo, lo mismo que de las coordenadas, siendo periódicas en tiempo con período $2\pi/\omega_1$. La solución de dicha ecuación debe buscarse en la forma $\mathbf{v}_2 = \Pi(x, y, z, t)e^{-i\omega t}$, en donde $\Pi(x, y, z, t)$ es una función periódica del tiempo, con período $2\pi/\omega_1$. Se produce de nuevo la inestabilidad cuando aparece una frecuencia $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ tal que la parte imaginaria γ_2 sea positiva. La parte real correspondiente ω_2 determina entonces la nueva frecuencia que aparece.

Por consiguiente, el resultado es que aparace un flujo cuasi periódico, caracterizado por dos períodos diferentes. Así como el flujo tenía un solo grado de libertad después de la aparición del primer flujo periódico, ahora apare-

† Pero no se han llevado a cabo, ni siquiera en casos particulares, debido a excepcionales dificultades matemáticas.

cen dos magnitudes arbitrarias (fases), es decir, existen dos grados de libertad.

Cuando el número de Reynolds sigue aumentando aún más, aparecen sucesivamente cada vez más períodos. El margen de números de Reynolds entre apariciones sucesivas de nuevas frecuencias disminuye rápidamente de tamaño. Los propios flujos nuevos son de escala cada vez menor. Esto significa que el orden de magnitud de las distancias donde la velocidad varía apreciablemente es menor cuanto más tarde aparece el flujo en cuestión.

Por tanto, para $R > R_{cr}$, el flujo se hace rápidamente complicado y confuso. Dicho flujo se dice que es *turbulento*; sus propiedades se estudiarán con detalle en las secciones siguientes. En contraposición al flujo turbulento, se dice *laminar* al flujo regular, en el cual el fluido se mueve como si existiesen capas con velocidades distintas.

Podemos escribir ahora la forma general de una función $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, cuya dependencia con el tiempo venga dada por un número determinado n de frecuencias distintas ω_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). En lugar de una fase $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$, tenemos ahora n fases diferentes $\phi_j = \omega_j t + \beta_j$. La función $\mathbf{v}$ puede considerarse como una función de estas fases (y de las coordenadas) y es periódica en cada una de ellas con períodos 2π. Dicha función puede escribirse como una serie:

$$\mathbf{v}(x,y,z,t) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \mathbf{A}_{p_1, \ldots, p_n}(x,y,z) \exp[-i \sum_{j=1}^{n} p_j \phi_j], \qquad (27.8)$$

extendiéndose la suma a todos los enteros $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Esta fórmula es una generalización de la (27.7). Podemos observar que la selección de las frecuencias fundamentales $\omega_1, \ldots, \omega_n$, no es por sí misma única, como vemos en (27.8); podríamos, igualmente, haber tomado n combinaciones lineales independientes cualesquiera de ω_j con coeficientes enteros.†

Un flujo descrito por una fórmula como (27.8) tiene n grados de libertad; en ella intervienen n fases iniciales arbitrarias β_j. Cuando aumenta el número de Reynolds, aumentan tanto el número de las frecuencias como el número de grados de libertad. En el límite, cuando R tiende a infinito, el número de grados de libertad también aumenta indefinidamente.

Debe recordarse que, puesto que la velocidad es una función periódica de las fases con período 2π, los estados cuyas fases difieren solamente en un múltiplo entero de 2π son físicamente indistinguibles. En otras palabras, podemos decir que todos los valores esencialmente diferentes de cada fase están comprendidos en el margen $0 \leqslant \phi_j \leqslant 2\pi$. Consideremos dos fases cualesquiera $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ y $\phi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Supóngase que, en un instante determi-

† Estas combinaciones linéales deben ser de un tipo tal que a partir de ellas se puedan formar todos los números posibles $\Sigma p_j \phi_j$. Es fácil ver que, para conseguir esto, debe ser la unidad el determinante de los coeficientes de transformación que relacionan las frecuencias iniciales con las nuevas.

nado, ϕ_1 tiene el valor α. Entonces, por lo que acabamos de decir, ϕ_1 tendrá valores equivalentes a α en todos los instantes $t = (\alpha - \beta_1 + 2\pi r)/\omega_1$, siendo r un número entero cualquiera. En estos instantes la fase ϕ_2 tendrá los valores

$$\phi_2 = \omega_2(\alpha - \beta_1)/\omega_1 + \beta_2 + 2\pi r\omega_2/\omega_1.$$

Las distintas frecuencias son, generalmente, inconmensurables, de modo que ω_2/ω_1 es un número irracional. Si reducimos cada valor de ϕ_2 al intervalo 0 a 2π restando el múltiplo entero apropiado de π, obtendremos, por tanto, cuando r varía de 0 a infinito, valores para ϕ_2 que están arbitrariamente cercanos a cualquier número dado en este margen. En otras palabras, en el transcurso de un tiempo suficientemente largo, ϕ_1 y ϕ_2 estarán arbitrariamente próximos de modo simultáneo a cualquier par dado de valores. Evidentemente, lo mismo es cierto también para las fases. Así pues, el movimiento turbulento tiene una determinada propiedad cuasiperiódica; en el curso de un tiempo suficientemente largo, el fluido pasa a través de estados arbitrariamente próximos a cualquier estado dado, determinado por una selección posible cualquiera de valores simultáneos de las fases ϕ_j.

Presentábamos el concepto del número de Reynolds crítico como aquel valor de R en el cual se produce en primer lugar la inestabilidad del flujo estacionario en el sentido descrito anteriormente. Sin embargo, el número de Reynolds crítico puede considerarse desde un punto de vista ligeramente distinto. Para $R < R_{cr}$ no existe ninguna solución no estacionaria estable de las ecuaciones de movimiento que no se amortigüen en el tiempo. Después de alcanzar el valor crítico aparece una solución no estacionaria estable, que es la que realmente aparece en un fluido móvil.

Por lo que se refiere a las investigaciones experimentales de los flujos que rodean a cualquier cuerpo ordinario de tamaño finito, parecen ser coincidentes las dos definiciones de R_{cr}. Sin embargo, y como es lógico, esto no es necesario que sea así, y pueden presentarse casos en principio en los que existan dos valores críticos diferentes: uno por encima del cual no pueda producirse ningún flujo no estacionario sin su amortiguamiento y otro por encima del cual resulte totalmente inestable el flujo estacionario. Evidentemente, el segundo debe ser mayor que el primero. Sin embargo, como hasta el presente no existe ninguna indicación de que existan realmente dichos casos de inestabilidad, no nos detendremos a analizarlos con más detalle.†

§ 28. Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación

Para estudiar la estabilidad del flujo estacionario entre dos cilindros en rotación (§ 18) en el límite de número de Reynolds, muy grandes, podemos

† Ahora no nos ocupa el flujo por un tubo, en donde la pérdida de estabilidad posee unas propiedades poco usuales (ver § 29).

utilizar un método sencillo como el utilizado en § 4 para deducir la condición correspondiente a la estabilidad mecánica de un fluido en reposo en el interior de un campo gravitatorio (RAYLEIGH, 1916). El principio del método consiste en considerar cualquier elemento pequeño del fluido y suponer que este elemento se desplaza de la trayectoria que sigue en el flujo de que se trate. Como resultado de este desplazamiento, aparecen fuerzas que actúan sobre el elemento desplazado. Si el flujo original es estable, estas fuerzas deben tender a devolver el elemento a su posición original.

Cada elemento de fluido en el flujo no perturbado se mueve en una circunferencia $r =$ constante alrededor del eje de los cilindros. Sea $\mu(r) = mr^2\phi$ el momento angular o cinético de un elemento de masa m, siendo ϕ la velocidad angular. La fuerza centrífuga que actúa sobre él es μ^2/mr^3; esta fuerza está equilibrada por el gradiente radial de presiones en el fluido en rotación. Supongamos que se desplaza de su trayecto ligeramente un elemento de fluido situado a una distancia r_0 del eje, trasladándose a una distancia $r > r_0$ del eje. El momento angular del elemento permanece igual a su valor original $\mu_0 = \mu(r_0)$. La fuerza centrífuga que actúa sobre el elemento en su nueva posición es, por tanto, μ_0^2/mr^3. Con objeto de que el elemento tienda a volver a su posición inicial, esta fuerza debe ser menor que el valor de equilibrio μ^2/mr^3 que se ve contrarrestado por el gradiente de presiones a la distancia r. Así pues, la condición necesaria para la estabilidad es $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$. Desarrollando $\mu(r)$ en potencias de la diferencia positiva $r - r_0$, podemos escribir esta condición en la forma

$$\mu \, d\mu/dr > 0. \tag{28.1}$$

De acuerdo con la fórmula (18.3), la velocidad angular ϕ de las partículas del fluido móvil es

$$\phi = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Calculando $\mu = mr^2\phi$ y omitiendo factores que son ciertamente positivos, podemos escribir la condición (28.1) como

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\phi' > 0. \tag{28.2}$$

La velocidad angular ϕ varía monótonamente con Ω_1 en el cilindro interior hasta Ω_2 en el cilindro exterior. Si los dos cilindros giran en sentidos opuestos, es decir, si Ω_1 y Ω_2 tienen signos opuestos, la función ϕ varía de signo entre los cilindros y su producto por el número constante $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ no puede ser positivo en todos los puntos. Así pues, en este caso (28.2) no es válido en todos los puntos del fluido y el flujo es inestable.

Estudiemos ahora los dos cilindros girando en el mismo sentido; tomando este sentido de rotación como positivo, tendremos $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Enton-

ces ϕ es positiva en todos los puntos y para que se cumpla la condición (28.2) es necesario que

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \tag{28.3}$$

Si $\Omega_2 R_2^2 < \Omega_1 R_1^2$, el flujo es inestable. Por ejemplo, si el cilindro exterior está en reposo ($\Omega_2 = 0$), mientras que el interior rota, entonces el flujo es inestable. Si, por otra parte, el cilindro interior está en reposo ($\Omega_1 = 0$), el flujo es estable.

Debe resaltarse que no se han tenido en cuenta en los razonamientos anteriores la influencia de las fuerzas viscosas cuando se desplaza el elemento de fluido. Por consiguiente, el método es únicamente aplicable para viscosidades pequeñas, es decir, para R grande.

Para estudiar la estabilidad del flujo para cualquier R es necesario seguir el método general partiendo de las ecuaciones (26.1) (G. I. TAYLOR, 1923). En el caso presente la distribución de velocidades no perturbada $\mathbf{v}_0$ depende únicamente de la coordenada radial (cilíndrica) r, y no del ángulo ϕ ni de la coordenada axial z. Así pues, tenemos para la perturbación $\mathbf{v}_1$ un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes que no contienen ni el tiempo ni las coordenadas ϕ y z. Podemos buscar soluciones de estas ecuaciones en la forma

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kz-\omega t)}\mathbf{f}(r), \tag{28.4}$$

siendo arbitraria la dirección del vector $\mathbf{f}$; esta solución depende de z a través del factor periódico e^{ikz}, y el número de ondas k determina la periodicidad de la perturbación en la dirección z. Las frecuencias posibles ω, obtenidas resolviendo las ecuaciones con las condiciones límites necesarias en un plano perpendicular al eje ($\mathbf{v}_1 = 0$ para $r = R_1$ y $r = R_2$), serán entonces funciones de k, interviniendo R como un parámetro: $\omega = \omega(k, \mathrm{R})$. El punto donde aparece la inestabilidad está determinado por el valor de R, en el cual la función $\gamma_1 = \mathrm{im}\,\omega$ se hace primeramente cero para algún determinado valor de k. Para $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{cr}$, la función $\gamma_1(k, \mathrm{R})$ es siempre negativa, pero para $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{cr}$ tenemos $\gamma_1 > 0$ en un determinado intervalo de valores de k. Supongamos que es k_{cr} el valor de k, para el cual $\gamma_1 = 0$ cuando $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{cr}$. La función (28.4) correspondiente da la naturaleza del flujo que aparece (superpuesto al flujo original) en el fluido en el instante en que el flujo original deja de ser estable; es periódico a lo largo del eje de los cilindros, con una longitud de onda $2\pi/k_{cr}$.†

† Cuando R es ligeramente mayor que R_{cr} no existe un valor solo de k, sino todo un intervalo de valores en el cual im $\omega > 0$. Sin embargo, no debe pensarse que el flujo resultante tendrá que ser una superposición de flujos con diversas periodicidades. En realidad, se produce para cada R un flujo de periodicidad definida que estabiliza al flujo total. Sin embargo, esta periodicidad no puede establecerse a partir de las ecuaciones linealizadas (26.1).

Además de soluciones de la forma (28.4), que son independientes del ángulo ϕ, el sistema de ecuaciones que estamos considerando tiene también soluciones en las que $\mathbf{v}_1$ contiene un factor $e^{im\phi}$, siendo m un número entero. Sin embargo, estamos interesados únicamente en la solución que corresponde a la primera aparición de la estabilidad. La solución con $m \neq 0$ nunca ha sido estudiada a este respecto. Sin embargo, es natural suponer que se presenta la inestabilidad primeramente respecto a las perturbaciones con $m = 0$, suposición que se ve totalmente confirmada por los resultados experimentales.

Debe también recordarse que incluso para un k determinado, la solución de la forma (28.4) no es única. En general, un cierto número de soluciones con valores diferentes de ω se corresponden con un valor dado de k. De nuevo estamos interesados únicamente en aquella que da el menor valor R_{cr}.

Resulta que una función imaginaria pura $\omega(k)$ corresponde a la solución que da el menor valor de R_{cr}. De aquí que, cuando $k = k_{cr}$, no sólo $\operatorname{im}\omega$, sino el propio ω es cero. Esto significa que la primera inestabilidad del flujo estacionario entre cilindros en rotación conduce a la aparición de otro flujo que es también estacionario.

Teniendo en cuenta la gran complejidad del cálculo,† únicamente se han obtenido resultados numéricos para el caso en que el espacio situado entre dos cilindros es estrecho ($R_2 - R_1 \ll R_2$). La figura 13 muestra un ejemplo de la curva que separa las regiones de flujo estable e inestable (sombreadas). La rama de la derecha de la curva, correspondiente a la rotación de los dos cilindros en el mismo sentido es asintótica con la línea recta $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$. Cuando aumenta el número de Reynolds, para un tipo determinado de flujo, los dos números $\Omega_1 R_1^2/\nu$ y $\Omega_2 R_2^2/\nu$ aumentan en factores iguales. En la figura 13 esto corresponde a un movimiento hacia arriba a lo largo de una línea que

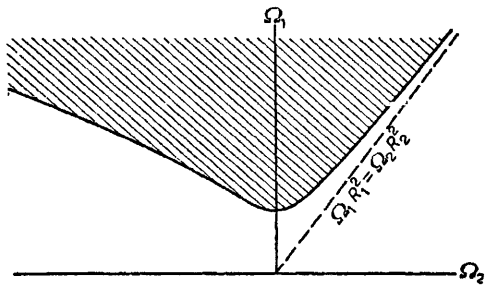

FIG. 13

† Podrán encontrarse detalles adicionales en el libro de C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

pasa por el origen con una pendiente determinada. En la parte de la derecha del diagrama (Ω_1 y Ω_2 positivos), las líneas para las cuales $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 > 1$ no cortan a la curva que limita la región de inestabilidad. Por otra parte, si $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 < 1$, entonces para números de Reynolds suficientemente grandes entramos en la región de inestabilidad, de acuerdo con la condición (28.3). En la parte izquierda del diagrama (Ω_1 y Ω_2 con signos opuestos), cualquier línea que pasa por el origen corta finalmente a la curva, es decir, el flujo puede hacerse inestable para cualquier valor del cociente $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2$, de acuerdo una vez más con los resultados obtenidos anteriormente. Para $\Omega_2 = 0$ (cuando únicamente gira el cilindro interior) la inestabilidad se establece cuando

$$\Omega_1 = 41{,}3\nu/h\sqrt{(hR_2)}, \tag{28.5}$$

en donde $h = R_2 - R_1$.

Sin embargo, la estabilidad del flujo en la parte no sombreada de la figura 13 no significa que el flujo permanezca realmente estacionario sin importar lo grande que se haga R. Los experimentos muestran que existe un límite más allá del cual resulta posible un flujo estable no estacionario. En esta región el flujo estacionario es «metaestable»: es estable respecto a pequeñas perturbaciones, pero inestable respecto a perturbaciones mayores. Si, debido a dichas perturbaciones, se presenta un flujo no estacionario en alguna región entre los cilindros, finalmente acabará por «desplazar» al flujo laminar en todo el espacio. Este flujo no estacionario tiene, tan pronto como aparece, un gran número de «grados de libertad» (en el sentido explicado en § 27), es decir, se desarrolla totalmente la turbulencia.

En la parte sombreada de la figura 13, el flujo resulta de nuevo turbulento para un valor de R suficientemente grande, pero existe al parecer muy pocos datos respecto al modo como aparece.

Un caso límite del flujo entre cilindros en rotación correspondientes a radios grande y pequeño $h = R_2 - R_1$, es el flujo entre dos planos paralelos con movimiento relativo (ver § 17). Este flujo es estable respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas para cualquier valor de $R = Uh/\nu$, en donde U es la velocidad relativa de los planos. Sin embargo, resulta posible el movimiento turbulento estable para valores de R mayores que 1500 aproximadamente.

§ 29. Estabilidad del flujo en una tubería

El flujo estacionario en una tubería estudiado en § 17 pierde su estabilidad de una manera poco usual. Puesto que el flujo es uniforme en la dirección x (a lo largo de la tubería), la distribución de velocidades no perturbada $\mathbf{v}_0$ es independiente de x. Análogamente al procedimiento seguido en § 28,

podemos, por consiguiente, buscar soluciones de las ecuaciones (26.1) que tengan la forma

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{f}(y, z). \tag{29.1}$$

Aquí de nuevo existe un valor $R = R_{cr}$, para el cual $\gamma_1 = \text{im}\,\omega$ se hace cero en primer lugar para un valor de k determinado. Sin embargo, tiene importancia el que la parte real de la función $\omega(k)$ es ahora no nula.

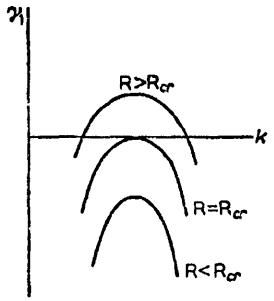

FIG. 14

Para valores de R sólo ligeramente superiores a R_{cr}, el margen de valores de k para los cuales $\gamma_1(k) > 0$ es pequeño y cae cerca del punto en el cual $\gamma_1(k)$ es un máximo, es decir, $d\gamma_1/dk = 0$ (como se ve en la figura 14). Supongamos que se produce una pequeña perturbación en alguna parte del flujo; éste será un paquete de ondas obtenido superponiendo una serie de componentes de la forma (29.1). En el transcurso del tiempo, las componentes para las cuales $\gamma_1(k) > 0$ serán amplificadas, mientras que las restantes se amortiguarán. El paquete de ondas amplificado así formado también será arrastrado corriente abajo con una velocidad igual a la velocidad $d\omega/dk$ del paquete; puesto que ahora estamos considerando ondas cuyos números de onda caen en un margen pequeño cerca del punto en el que $d\gamma_1/dk = 0$, la cantidad $d\omega/dk \approx d\omega_1/dk$ es real, y, por lo tanto, también lo es la velocidad real de propagación del paquete.

Este desplazamiento corriente abajo de la perturbación es muy importante y hace que la pérdida de estabilidad sea totalmente diferente de la descrita en § 28.

Hemos visto que, en el caso de flujo entre cilindros en rotación con $R > R_{cr}$ (cuando existen frecuencias con $\text{im}\,\omega > 0$), el flujo estacionario original deja de ser posible, puesto que incluso perturbaciones pequeñas se van incrementando hasta una amplitud infinita. Sin embargo, en el caso de flujo en la tubería, la amplificación de la perturbación se ve acompañada por su desplazamiento aguas abajo; si consideramos el flujo en un punto determinado de la tubería, resulta que la perturbación allí no se amplifica, sino que se

amortigua. También debe recordarse que, puesto que en realidad tenemos tuberías de longitud finita, aunque sea grande, cualquier perturbación puede transportarse fuera de la tubería antes de que llegue a romper el flujo laminar. Así pues, incluso para $R > R_{cr}$, el flujo estacionario en una tubería es, efectivamente, estable respecto a pequeñas perturbaciones y puede, en principio, tener lugar para valores de R considerablemente superiores a R_{cr}.

Puesto que las perturbaciones aumentan con la coordenada x (aguas abajo) y no con el tiempo en un punto determinado, es razonable estudiar este tipo de estabilidad del modo siguiente. Supongamos que en un punto determinado se aplica al flujo una perturbación que actúa continuamente con una frecuencia ω y examinenos lo que le ocurrirá a esta perturbación cuando se vea transportada por la corriente. Invirtiendo la función $\omega = \omega(k)$, vemos que el número de ondas k corresponde a la frecuencia dada (real) ω. Si $\text{im}\, k < 0$, el factor e^{ikx} aumenta con x, es decir, la perturbación se ve amplificada aguas abajo. La curva en el plano ωR, dada por la ecuación $\text{im}\, k(\omega, R) = 0$, define la región de estabilidad y separa para cada R las frecuencias de las perturbaciones que son amplificadas y amortiguadas aguas abajo.

Los cálculos reales son extremadamente complicados. Se ha realizado una investigación completa únicamente para el flujo entre dos planos paralelos (C. C. Lin, 1946).† Sin embargo, es razonable suponer que los resultados serán cualitativamente iguales para el flujo en una tubería circular.

La curva límite para el flujo entre dos planos se muestra esquemáticamente en la figura 15. El área sombreada dentro de la curva es la región de inestabilidad. Cuando $R \to \infty$, ambas ramas de la curva son asintóticas hacia el eje R.‡ Para el valor más pequeño de R, en el cual son posibles las pertur-

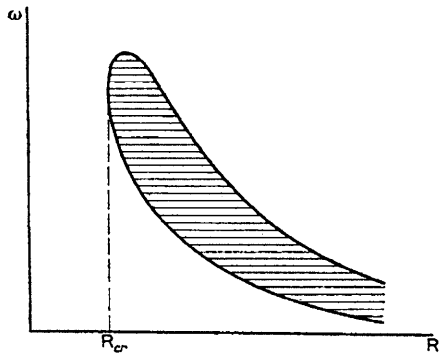

Fig. 15

† Un estudio detallado viene en el texto de C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.

‡ Las ecuaciones asintóticas de las dos ramas en el caso de R grande son: $\omega h/U = 5{,}0/R^{3/11}$, $\omega h/U = 11{,}2/R^{3/7}$.

baciones no amortiguadas, se encuentra, mediante los cálculos que $R_{cr} \approx 7700$, estando definida R como Uh/ν, en el que h es la distancia entre dos planos y U, la velocidad del fluido promediada a lo largo de esta distancia.

Así pues, para cualquier frecuencia comprendida entre cero y un valor máximo determinado, existe un intervalo finito de valores R, para el cual serán amplificadas las perturbaciones que posean la frecuencia de que se trate. Es interesante señalar que una viscosidad pequeña pero finita del fluido tiene, en cierto sentido, un efecto desestabilizador en comparación con la situación correspondiente a un fluido estrictamente ideal. Porque, cuando $R \to \infty$, se amortiguan las perturbaciones con cualquier frecuencia finita, pero cuando se introduce una viscosidad finita se alcanza, finalmente, una región de inestabilidad; un aumento adicional de la viscosidad (disminución de R), finalmente, hace que nos salgamos de esta región.

Sin embargo, estos cálculos no responden a la cuestión de si, para un valor suficientemente grande de R, el flujo en la tubería no presentará también una verdadera inestabilidad respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas, es decir, a una inestabilidad resultante de la amplificación de las perturbaciones con el tiempo en un punto determinado. Reseñaremos el significado matemático de dicha inestabilidad. Consideremos que se produce en el tiempo $t = 0$, en una región finita, una pequeña perturbación. Desarrollándola en forma de integral de Fourier respecto a x, podemos escribirla como

$$\int\int f(\xi)e^{ik(x-\xi)}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}k,$$

en donde $f(x)$ es una función que describe la perturbación inicial. En el transcurso del tiempo, cada componente de Fourier de la perturbación variará como $e^{-i\omega t}$, con una frecuencia $\omega = \omega(k, R)$, de modo que la perturbación en el instante t vendrá dada por la integral

$$\int\int f(\xi)e^{ik(x-\xi)-i\omega t}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}k.$$

Como $f(x)$ es cero, excepto en una región finita, $x - \xi$ tiene un margen finito de valores. De aquí que el comportamiento de la integral para t grande está determinado esencialmente por el comportamiento de la integral

$$\int e^{-i\omega(k)t}\,\mathrm{d}k.$$

Si esta integral tiende a infinito con t, el flujo es, de hecho, absolutamente inestable.

No se ha hecho todavía ningún estudio de este tipo, ni siquiera para un caso particular. Sin embargo, los resultados experimentales relativos al flujo en tuberías dan razones para suponer que no existe una verdadera inestabilidad respecto a perturbaciones arbitrariamente pequeñas para cualquier valor de R. Esto está indicado por el hecho de que si se evitan con todo cuidado

las perturbaciones a la entrada de la tubería, se obtienen números de Reynolds cada vez mayores, para los cuales puede observarse un flujo laminar.†

Sin embargo, los resultados experimentales también muestran que existe otro número de Reynolds crítico (que designaremos por R_{cr}'); éste determina el límite más allá del cual puede existir un flujo no estacionario estable (ver el final de § 27). Si se produce un flujo turbulento en una sección cualquiera de la tubería, entonces para $R < R_{cr}'$ la región turbulenta será arrastrada aguas abajo y disminuirá de tamaño hasta que desaparezca por completo; si, por otra parte, $R > R_{cr}'$, la región turbulenta se extenderá en el transcurso del tiempo hasta incluir cada vez más parte del flujo. Si se producen continuamente en la entrada de la tubería perturbaciones del flujo, entonces para $R < R_{cr}'$ se verán amortiguadas a alguna distancia hacia abajo de la tubería sin importar lo fuertes que sean inicialmente. Si, por otra parte, $R > R_{cr}'$, el flujo se convierte en turbulento en toda la tubería y esto puede conseguirse mediante perturbaciones que son tanto más débiles cuanto mayor sea R.‡ Así pues, el flujo laminar en una tubería con $R > R_{cr}'$ es metaestable, siendo inestable respecto a perturbaciones de intensidad finita; la intensidad necesaria es tanto menor cuanto mayor sea R.

Como hemos mencionado al final del § 28, el flujo no estacionario que se produce por la rotura del flujo laminar metaestable es ya una turbulencia totalmente desarrollada. En este sentido, la aparición de turbulencias en una tubería es esencialmente diferente de la aparición de turbulencias debidas a la inestabilidad absoluta del flujo estacionario que rodea a cuerpos finitos. En este último caso, el flujo no estacionario parece que surge de un modo continuo en cuanto pasamos del valor R_{cr}, aumentando gradualmente el número de grados de libertad (como se explicó en §§ 26 y 27). Sin embargo, en el caso de un flujo en una tubería, la turbulencia aparece discontinuamente. Esta diferencia origina, en particular, las distintas dependencias de la fuerza de arrastre con el número de Reynolds en ambos casos. Por ejemplo, si consideramos el movimiento de un cuerpo cualquiera dentro de un fluido, la fuerza F de arrastre sobre él es continua para $R = R_{cr}$, en donde el flujo estacionario se hace absolutamente inestable. En este punto la curva $F = F(R)$ puede tener solamente un codo correspondiente a la variación en la naturaleza del flujo. Por otra parte, para el flujo en una tubería existen esencialmente dos leyes diferentes de arrastre para $R \geqslant R_{cr}$: una para el flujo estacionario y la otra para el flujo turbulento. La fuerza de arrastre es discontinua para el valor de R, cualquiera que sea éste, que marca la transición de un tipo de flujo a otro.

† Realmente se ha observado un flujo laminar hasta $R \approx 50\,000$, en donde $R = Ud/\nu$, siendo d el diámetro del tubo y U la velocidad media en la sección completa.

‡ En el caso de un tubo de sección recta circular R_{cr}' está comprendido entre 1600 y 1700. Si el flujo ocurre entre planos paralelos, se ha observado flujo turbulento desde R = 1400 en adelante.

§ 30. Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales

Los flujos en los cuales dos capas de fluido incompresible se mueven relativamente entre sí, deslizándose una sobre la otra, son absolutamente inestables si el fluido es ideal; la superficie de separación entre ambas capas de fluido sería una *superficie de discontinuidad tangencial,* sobre la cual la velocidad del fluido tangencial a la superficie es discontinua. Veremos más adelante (§ 35) que la propia naturaleza real del flujo da como resultado esta inestabilidad; demostraremos a continuación esta afirmación.

Si consideramos una pequeña parte de la superficie de discontinuidad y el flujo próximo a ella, podemos considerar dicha parte como un plano y como constantes a las velocidades del fluido $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ a cada lado. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que una de estas velocidades es cero; esto siempre puede conseguirse mediante una selección adecuada del sistema de coordenadas. Sea $\mathbf{v}_2 = 0$, y designemos $\mathbf{v}_1$ por $\mathbf{v}$ simplemente; tomemos como dirección de $\mathbf{v}$ el eje x y el eje z a lo largo de la normal a la superficie.

Supongamos que en la superficie de la discontinuidad se produce una ligera perturbación, en la que todas las magnitudes son funciones periódicas —las coordenadas de los puntos en la superficie, la presión y la velocidad del fluido— y proporcionales a $e^{i(kx-\omega t)}$. Consideremos el fluido que está en el lado en donde su velocidad es $\mathbf{v}$ y designemos por $\mathbf{v}'$ la pequeña variación de la velocidad debida a la perturbación. De acuerdo con las ecuaciones (26.1) (con $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ constante y $\nu = 0$), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para la perturbación $\mathbf{v}'$:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{grad}\, p'}{\rho}.$$

Puesto que $\mathbf{v}$ está dirigido a lo largo del eje x, la segunda ecuación puede volverse a escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\mathbf{grad}\, p'}{\rho}. \tag{30.1}$$

Si tomamos la divergencia de ambos miembros, entonces el primer miembro es igual a cero en virtud de que $\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$, de modo que p' debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\triangle p' = 0. \tag{30.2}$$

Sea $\zeta = \zeta(x, t)$ el desplazamiento en la dirección z de los puntos situados en la superficie de discontinuidad, debido a la perturbación. La derivada $\partial\zeta/\partial t$ es la variación respecto al tiempo de la coordenada superficial z para un valor dado de x. Como la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie de discontinuidad es igual a la variación del desplazamiento res-

pecto al tiempo de la propia superficie, tenemos que hasta la aproximación precisa

$$\partial\zeta/\partial t = v'_z - v\partial\zeta/\partial x, \tag{30.3}$$

en donde, como es natural, debe considerarse el valor de v'_z en la superficie.

Busquemos un valor de p' que posea la forma $p = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$. Sustituyendo en (30.2), tomemos para $f(z)$ la ecuación $d^2f/dz^2 - k^2f = 0$, de aquí que $f =$ constante $\times e^{\pm kz}$. Supongamos que el espacio en la parte que estamos considerando (lado 1) corresponde a valores positivos de z. Entonces debemos tomar $f =$ constante $\times e^{-kz}$, de modo que

$$p' = \text{constante} \times e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}. \tag{30.4}$$

Sustituyendo esta expresión en la componente z de la ecuación (30.1), tenemos†

$$v'_z = kp'_1/i\rho_1(kv-\omega). \tag{30.5}$$

También puede buscarse el desplazamiento ζ en una forma proporcional al mismo factor exponencial $e^{i(kx-\omega t)}$, y así obtenemos de (30.3) $v'_z = i\zeta(kv - \omega)$. Esto nos da, en lugar de (30.5),

$$p'_1 = -\zeta\rho_1(kv-\omega)^2/k. \tag{30.6}$$

La presión p'_2 en la otra cara de la superficie viene dada por una fórmula semejante, en donde ahora $\mathbf{v} = 0$ y el signo es contrario (puesto que en esta región $z < 0$, y todas las magnitudes deben ser proporcionales a e^{kz} y no a e^{-kz}). Así pues,

$$p'_2 = \zeta\rho_2\omega^2/k. \tag{30.7}$$

Hemos escrito densidades diferentes ρ_1 y ρ_2 con objeto de incluir el caso en el que tengamos un límite de separación entre dos fluidos inmiscibles diferentes.

Finalmente, a partir de la condición de que las presiones p'_1 y p'_2 son iguales en la superficie de discontinuidad, obtenemos $\rho_1(kv - \omega)^2 = -\rho_2\omega^2$, resultando, por tanto, la relación deseada entre ω y k, que es

$$\omega = kv\frac{\rho_1 \pm i\sqrt{(\rho_1\rho_2)}}{\rho_1+\rho_2}. \tag{30.8}$$

Vemos que ω es complejo y siempre deberá tener una parte imaginaria. Así pues, las discontinuidades tangenciales son inestables, aunque sea respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas. En esta forma el resultado es cierto para viscosidades muy pequeñas, es decir, para valores muy grandes de R. En este caso carece de significado distinguir la inestabilidad del tipo

† El caso $kv = \omega$, aunque posible en principio, carece ahora de interés, puesto que la inestabilidad sólo puede surgir por causa de frecuencias ω complejas y no reales.

que es «transportada por» de la verdadera inestabilidad absoluta, puesto que al aumentar k, la parte imaginaria de ω crece sin límite y, por tanto, el «coeficiente de amplificación» de la perturbación cuando ésta es transportada a lo largo de la línea de corriente puede ser tan grande como queramos.

Cuando se tiene en cuenta la viscosidad finita, la discontinuidad tangencial ya no es tan marcada; la velocidad varía de un valor a otro a través de una capa de espesor finito. El problema de la estabilidad de un flujo de este tipo es matemáticamente del todo semejante al de la estabilidad del flujo en una capa límite laminar con un punto de inflexión en el perfil de la velocidad (§ 41). Los resultados experimentales indican que esta inestabilidad se establece muy pronto.

§ 31. Turbulencia totalmente desarrollada

El flujo turbulento a números de Reynolds suficientemente grandes está caracterizado por la presencia de una variación extremadamente irregular de la velocidad con el tiempo en cada punto. Este fenómeno se denomina *turbulencia totalmente desarrollada.* La velocidad fluctúa continuamente alrededor de un determinado valor medio y debe señalarse que la amplitud de esta variación no es, en general, pequeña en comparación con la propia velocidad. Se produce una variación irregular semejante de la velocidad entre puntos del propio flujo en un instante determinado. Las trayectorias de las partículas del fluido en el flujo turbulento son extremadamente complicadas, dando como resultado una mezcla amplia del fluido.

Como ya ha sido mencionado en la sección anterior, el flujo turbulento tiene un número muy grande de grados de libertad. Los valores de las fases iniciales β_j, que corresponden a estos grados de libertad, se determinan mediante las condiciones iniciales del flujo. La especificación de las condiciones iniciales exactas que determinarían el valor de tantas magnitudes es, sin embargo, poco real, de modo que ni siquiera tiene significado físico el plantear el problema de esta forma.

La posición aquí es semejante a la que resultaría si intentásemos considerar el movimiento de todas las moléculas que forman un cuerpo macroscópico utilizando las ecuaciones de la mecánica; una vez más el problema de especificar las condiciones que determinan los valores iniciales de las coordenadas y velocidades de todas las moléculas, y luego la integración de las ecuaciones del movimiento, carece de significado físico. La analogía se puede extender aún más. Un cuerpo macroscópico, considerado como formado por moléculas individuales, tiene un número enorme de grados de libertad. Una descripción microscópica exacta del estado del cuerpo exigiría la determinación de las coordenadas y velocidades de todas las partículas

que lo componen. El modo exacto en que estas magnitudes varían con el tiempo depende de sus valores en el instante inicial. Sin embargo, debido a la extrema complejidad e irregularidad del movimiento de las moléculas, podemos suponer que en un intervalo de tiempo suficientemente largo, las velocidades y coordenadas de las moléculas adquieren todos los posibles conjuntos de valores, de modo que el efecto de las condiciones iniciales se difumina e incluso desaparece. Esto, como se sabe, hace posible el estudio estadístico de los cuerpos macroscópicos.

Un caso semejante se presenta en el caso turbulento. Para una descripción exacta de la variación respecto al tiempo de la distribución de velocidades del fluido móvil, sería necesario dar los valores de todas las fases iniciales β_j; entonces se conocerían los valores de todas las fases $\phi_j = \omega_j t + \beta_j$ en cada instante. Hemos visto que, cualesquiera que sean las fases iniciales β_j, al transcurrir un intervalo suficientemente largo de tiempo, el fluido pasa a través de estados arbitrariamente próximos a cualquier estado dado definido por una selección posible cualquiera de valores simultáneos de las fases ϕ_j. De aquí se deduce que, al considerar el flujo turbulento, las condiciones iniciales reales carecen de cualquier efecto después de haber transcurrido un intervalo de tiempo suficientemente largo. Esto muestra que la teoría del flujo turbulento debe ser una teoría estadística. Todavía no se ha desarrollado ninguna teoría completa cuantitativa de la turbulencia. Sin embargo, se conocen varios resultados cualitativos muy importantes, los cuales serán mencionados en las secciones siguientes.

Introduzcamos el concepto de velocidad media, obtenida promediando en intervalos largos de tiempo la velocidad en cada punto. Mediante dicho proceso de promediar, la variación irregular de la velocidad se suaviza y la velocidad media varía suavemente de un punto a otro. En lo que sigue, designaremos la velocidad media por $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{v}}$. La diferencia $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ entre la velocidad verdadera y la velocidad media varía irregularmente de la manera característica propia de la turbulencia; se denominará en lo que sigue *parte fluctuante* de la velocidad.

Consideremos con más detalle la naturaleza de este movimiento regular que se superpone al flujo medio. Este movimiento puede, a su vez, considerarse cualitativamente como la superposición de *remolinos* o *torbellinos turbulentos* de diferentes tamaños o distintas escalas; entendemos por tamaño o escala de un remolino el orden de magnitud de la distancia en que la velocidad varía apreciablemente. Cuando el número de Reynolds aumenta, aparecen en primer lugar grandes remolinos; estos remolinos aparecen tanto más tarde cuanto más pequeños sean. Para números de Reynolds muy grandes, están presentes remolinos de todos los tamaños, desde los mayores hasta los menores. Los remolinos más grandes juegan una parte importante en cualquier flujo turbulento, siendo estos remolinos del orden de las dimensiones

de la región en la que tiene lugar el flujo; en lo que sigue designaremos por l este orden de magnitud para un flujo turbulento determinado cualquiera. Estos grandes remolinos o torbellinos tienen las mayores amplitudes. La velocidad en ellos es comparable con la variación de la velocidad media a lo largo de la distancia l; designaremos mediante Δu el orden de magnitud de esta variación.† Las frecuencias correspondientes a estos remolinos son del orden de u/l, cociente entre la velocidad media u (y no de su variación Δu) y la dimensión l. En efecto, es la frecuencia lo que determina el período con el que se reproduce la imagen o espectro del movimiento cuando se observa en un sistema de referencia fijo. Sin embargo, relativamente a dicho sistema, la imagen o esquema completo se mueve con el fluido a una velocidad del orden de u.

Los remolinos menores, por otra parte, que corresponden a frecuencias grandes, participan en el flujo turbulento con amplitudes mucho menores. Pueden considerarse con una estructura detallada fina superpuesta sobre los remolinos turbulentos fundamentales grandes. Sólo una parte comparativamente pequeña de la energía cinética total del fluido radica en estos remolinos pequeños.

A partir de la descripción del flujo turbulento dado anteriormente, podemos obtener una conclusión respecto al modo de variación de la velocidad fluctuante desde un punto a otro en un instante dado cualquiera. En distancias grandes (comparables con l), la variación de la velocidad fluctuante viene dada por la variación de la velocidad de los remolinos grandes, y, por consiguiente, es comparable con Δu. En distancias pequeñas (en comparación con l), viene determinada por los remolinos pequeños, y, por consiguiente, es pequeña (comparada con Δu).‡ Se obtiene el mismo tipo de descripción si observamos la variación de la velocidad con el tiempo en un punto dado cualquiera. En intervalos de tiempo cortos (en comparación con $T \sim l/u$), la velocidad no varía apreciablemente, mientras que en intervalos largos varía en una cantidad del orden de Δu.

La longitud l aparece como una dimensión característica en el número de Reynolds R, el cual determina las propiedades de un flujo dado. Además, podemos introducir el concepto cualitativo de los números de Reynolds correspondientes a remolinos turbulentos de diversos tamaños. Si λ es el orden

† No estamos ahora hablando del orden de magnitud, ni de la propia velocidad media, sino de su variación (en distancias del orden de l), puesto que esta variación Δu es la que caracteriza la velocidad del flujo turbulento. La velocidad media propiamente puede tener cualquier valor, dependiendo del sistema de referencia utilizado.

Puede mencionarse también que los resultados experimentales indican que el tamaño de los remolinos más grandes es realmente un poco menor que l y que su velocidad es algo menor que Δu.

‡ Pero grande comparada con la variación de la velocidad media sobre estas distancias reducidas.

de magnitud del tamaño de un remolino dado y v_λ el orden de magnitud de su velocidad, entonces el número de Reynolds correspondiente se define como $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$. Este número es tanto menor cuanto más pequeño sea el tamaño del remolino.

Cuando se tienen números de Reynolds R grandes, los números de Reynolds R_λ de los remolinos grandes son también elevados. Sin embargo, números de Reynolds altos equivalen a viscosidades pequeñas. Por consiguiente, podemos sacar la conclusión de que en el caso de remolinos grandes, que son la base de cualquier flujo turbulento, la viscosidad carece de importancia y puede igualarse a cero, de modo que el movimiento de este remolino obedece a la ecuación de Euler. En particular, se deduce que no existe ninguna disipación apreciable de energía en los remolinos grandes.

La viscosidad del fluido resulta importante únicamente en el caso de los remolinos más pequeños, cuyo número de Reynolds es comparable con la unidad. Designaremos el tamaño de dichos remolinos por λ_0, valor que determinaremos en la sección siguiente. La disipación de la energía se produce en estos remolinos pequeños, que carecen de importancia respecto al esquema o modelo general de flujo turbulento.

Llegamos así a la siguiente concepción de la disipación de energía en el flujo turbulento. La energía pasa de los remolinos grandes a otros más pequeños, prácticamente sin que se produzca ninguna disipación en este proceso. Podemos decir que existe un flujo continuo de energía desde los remolinos grandes a los pequeños, es decir, desde frecuencias pequeñas a grandes. Este flujo de energía se disipa en los remolinos más pequeños, en donde se transforma la energía cinética en calor.†

Puesto que la viscosidad de fluido tiene importancia únicamente en el caso de remolinos pequeños, podemos decir que ninguna de las magnitudes que pertenecen a los remolinos de tamaño $\lambda \gg \lambda_0$ pueden depender de ν (más exactamente, estas cantidades no pueden modificarse si ν varía mientras se mantienen invariables las demás condiciones del movimiento). Esta circunstancia reduce el número de magnitudes que determinan las propiedades del flujo turbulento y da como resultado el que los rozamientos de semejanza, en los que intervienen las dimensiones de las magnitudes disponibles, resultan muy importantes en la investigación de la turbulencia.

Apliquemos estos razonamientos para determinar el orden de magnitud de la disipación de energía en el flujo turbulento. Sea ϵ la disipación media de energía por unidad de tiempo y por unidad de masa de fluido.‡ Hemos visto que esta energía se deduce de los remolinos grandes, de donde se va

† Para que se mantenga un estado estacionario es necesario, naturalmente, que estén presentes fuentes externas de energía que suministren energía de modo continuo a los remolinos grandes.

‡ En este capítulo ϵ designa la disposición media de energía y no la energía interna del fluido.

transfiriendo gradualmente a los remolinos menores hasta que se disipa en los de tamaño $\sim \lambda_0$. De aquí que, aunque la disipación se deba finalmente a la viscosidad, puede determinarse únicamente el orden de magnitud de ϵ para aquellas magnitudes que caracterizan a los remolinos grandes. Estas son la densidad del fluido ρ, la dimensión l y la velocidad Δu. A partir de estas tres magnitudes sólo podemos formar otra que posea las dimensiones de ϵ, es decir, dimensiones de erg/g s = cm^2/s^3. Así pues, encontramos

$$\epsilon \sim (\Delta u)^3/l, \tag{31.1}$$

y esta expresión determina el orden de magnitud de la disipación de energía del flujo turbulento.

En algunos aspectos un fluido en movimiento turbulento puede describirse cualitativamente diciendo que posee una «viscosidad turbulenta» ν_{turb} que difiere de la verdadera viscosidad cinética ν. Puesto que ν_{turb} caracteriza las propiedades del flujo turbulento, su orden de magnitud está determinado por ρ, Δu y l. La única magnitud que puede formarse con ellas con las dimensiones de la viscosidad dinámica es, por tanto,

$$\nu_{turb} \sim l\Delta u. \tag{31.2}$$

El cociente entre la viscosidad turbulenta y la viscosidad ordinaria es, en consecuencia, $\nu_{turb}/\nu \sim R$, es decir, aumenta con el número de Reynolds.†

La disipación de energía ϵ se expresa en función de ν_{turb} por

$$\epsilon \sim \nu_{turb}(\Delta u/l)^2 \tag{31.3}$$

de acuerdo con la definición normal de la viscosidad. Mientras que ν determina la disipación de energía en función de las derivadas espaciales de la verdadera velocidad, ν_{turb} la relaciona con el gradiente ($\sim \Delta u/l$) de la velocidad media.

También se pueden aplicar razonamientos de semejanza para determinar el orden de magnitud Δp de la variación de la presión en la región del flujo turbulento. La única magnitud que tiene la dimensión de la presión y que puede formarse con ρ, l y Δu es $\rho(\Delta u)^2$. De aquí que tengamos

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u)^2. \tag{31.4}$$

§ 32. Turbulencia local

Consideremos ahora las propiedades de la turbulencia considerando los tamaños de remolinos λ en el caso en que sean pequeños en comparación con el tamaño fundamental de remolino l. Nos referiremos a estas propie-

† Sin embargo, en realidad, debe incluirse un coeficiente numérico bastante grande. Este se debe a que, como mencionamos antes, l y Δu pueden diferir considerablemente de la escala y velocidad reales del flujo turbulento. El cociente ν_{turb}/ν puede escribirse con más exactitud como $\nu_{turb}/\nu \sim R/R_{cr}$, fórmula que tiene en cuenta de que deben ser de valor comparable, en realidad no para $R \sim 1$, sino para $R \sim R_{cr}$.

dades como propiedades *locales* de la turbulencia. Consideremos el fluido que está lejos de todas las superficies sólidas (de modo más preciso que está a distancia de ellas, que son grandes en comparación con λ).

Es natural admitir que dicha turbulencia a pequeña escala, lejos de los cuerpos sólidos, es *isótropa*. Esto significa que, en regiones cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con l, las propiedades del flujo turbulento son independientes de la dirección; en particular, no dependen de la dirección de la velocidad media. Debe resaltarse que ahora y en lo que sigue de la sección presente, cuando hablamos de las propiedades del flujo turbulento en una pequeña región del fluido, significamos el movimiento relativo de las partículas del fluido en dicha región y no el movimiento absoluto de la región como un todo, que se debe a los remolinos mayores.

Resulta que pueden obtenerse varios resultados muy importantes relativos a las propiedades locales de la turbulencia utilizando razonamientos de semejanza. Estos resultados se deben a A. N. KOLMOGOROV y a A. M. OBUKHOV (1941). Para obtenerlos, determinaremos en primer lugar qué parámetros pueden intervenir en las propiedades del flujo turbulento en regiones pequeñas en comparación con l, pero grandes en comparación con las distancias λ_0, en las que la viscosidad del fluido empieza a ser importante. Estudiaremos a continuación lo que ocurre a estas distancias intermedias. Los parámetros en cuestión son las densidades del fluido ρ y otra magnitud que caracteriza cualquier flujo turbulento que es la energía ϵ disipada por unidad de tiempo y por unidad de masa del fluido. Hemos visto que ϵ es el «flujo de energía» que pasa continuamente desde los remolinos mayores a los menores. De aquí que aunque la disipación de energía se deba en último término a la viscosidad del fluido y se produzca en los remolinos más pequeños, la magnitud ϵ viene determinada por las propiedades de los remolinos grandes. Es natural suponer que (para valores de ρ y ϵ dados) las propiedades locales de la turbulencia son independientes de la dimensión l y de la velocidad Δu del flujo como un todo. Tampoco puede aparecer la viscosidad del fluido ν en cualquiera de las magnitudes en que estamos interesados en el momento actual (recordemos que nos preocupan las distancias $\lambda \gg \lambda_0$).

Determinemos el orden de magnitud v_λ de la variación de la velocidad de turbulencia en distancias del orden de λ. Debe determinarse únicamente mediante ρ, ϵ y, como es natural, la propia distancia λ. A partir de estas tres magnitudes podemos formar solamente otra que tenga dimensiones de la velocidad, $(\epsilon\lambda)^{1/3}$. De aquí que podamos decir que debe ser válida la relación

$$v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{\frac{1}{3}} \tag{32.1}$$

Así pues, se llega a un resultado muy importante: la variación de velocidad

a lo largo de una distancia pequeña es proporcional a la raíz cúbica de la distancia (*ley de Kolmogorov y Obukhov*). También puede considerarse la magnitud v_λ como la velocidad de los remolinos turbulentos cuyo tamaño es del orden de λ.†

Planteemos ahora el problema de modo ligeramente distinto y determinemos el orden de magnitud v_τ de la variación de velocidad en un punto determinado a lo largo de un intervalo de tiempo τ que es corto en comparación con el tiempo $T \sim l/u$ que caracteriza el flujo como un todo. Para ello, observaremos que, puesto que existe un flujo medio neto, cualquier parte del fluido se ve desplazada durante el intervalo τ a lo largo de una distancia del orden de τu, siendo u la velocidad media. De aquí que la porción del fluido que esté en un punto determinado en el instante τ habrá estado a una distancia τu de dicho punto en el instante inicial. Por consiguiente, podemos obtener la magnitud requerida v_τ sustituyendo directamente λ por τu en (32.1):

$$v_\tau \sim (\epsilon \tau u)^{\frac{1}{3}}. \tag{32.2}$$

Así pues, la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo τ es proporcional a la raíz cúbica de dicho intervalo.

Puede distinguirse la magnitud v_τ de la que denominaremos v_τ', variación de la velocidad de una parte del fluido cuando se mueve en el espacio. Esta variación evidentemente puede depender únicamente de ρ y ϵ, que determinan las propiedades locales de la turbulencia y, como es natural, del propio τ. Formando la única combinación de ρ, ϵ y τ que tienen dimensiones de velocidad, se obtiene

$$v_\tau' \sim (\epsilon \tau)^{\frac{1}{3}}. \tag{32.3}$$

A diferencia de la variación de velocidad en un punto determinado, resulta proporcional a la raíz cuadrada de τ y no a su raíz cúbica. Es fácil ver que, en el caso de τ pequeño en comparación con T, v_τ' es siempre menor que v_τ.‡

† La variación v_λ de la velocidad en distancias pequeñas es fundamentalmente la variación de la parte fluctuante de la velocidad; la variación de la velocidad media en distancias reducidas es pequeña en comparación con la variación de la velocidad fluctuante en aquellas distancias.

Puede obtenerse la relación (32.1) por otro procedimiento, expresando la disipación ϵ, que es una constante en función de magnitudes que caractericen los remolinos de tamaño λ; ϵ debe ser proporcional al gradiente al cuadrado de la velocidad v_λ y al coeficiente de viscosidad turbulenta apropiado

$$\nu_{\text{turb},\lambda} \sim v_\lambda \lambda$$

[ver (31.2), (31.3)]:

$$\epsilon \sim \nu_{\text{turb},\lambda}(v_\lambda/\lambda)^2 \sim v_\lambda^3/\lambda,$$

de donde se obtiene (32.1).

‡ En la deducción de (32.2) se ha supuesto en esencia la desigualdad $v_\tau' \ll v_\tau$.

Utilizando la expresión (31.1) para ϵ, podemos volver a escribir (32.1) como

$$v_\lambda \sim \Delta u(\lambda/l)^{\frac{1}{3}}. \tag{32.4}$$

Análogamente podemos escribir v_τ como

$$v_\tau \sim \Delta u(\tau/T)^{\frac{1}{3}}, \tag{32.5}$$

en donde $T \sim l/u$.

Encontremos ahora a qué distancias empieza a ser importante la viscosidad del fluido. Estas distancias λ_0 determinan también el orden de magnitud del tamaño de los remolinos más pequeños en el flujo turbulento (denominada «escala interna» de la turbulencia a diferencia de la «escala externa» l). Para determinar λ_0, formemos el número de Reynolds $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$; utilizando (32.4), obtenemos

$$R_\lambda \sim \Delta u \cdot \lambda^{4/3}/\nu l^{1/3}.$$

Introduciendo el número de Reynolds $R \sim l\Delta u/\nu$ para el flujo como un todo, podemos volver a escribir esta expresión como $R_\lambda \sim R(\lambda/l)^{4/3}$. El orden de magnitud de λ_0 es aquél para el cual $R_{\lambda_0} \sim 1$. De aquí se tiene

$$\lambda_0 \sim l/R^{\frac{3}{4}}. \tag{32.6}$$

Puede obtenerse la misma expresión formando mediante ρ, ϵ y ν, la única combinación que posee las dimensiones de longitud, a saber, $\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, y expresando ϵ en función de Δu y l mediante (31.1).

Así pues, la escala interna de la turbulencia es inversamente proporcional a $R^{3/4}$. Para la velocidad correspondiente tenemos

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u/R^{\frac{1}{4}}; \tag{32.7}$$

la cual disminuye también cuando R aumenta. Finalmente, el orden de magnitud de las frecuencias correspondiente a los remolinos de este tamaño es $\omega_0 \sim u/\lambda_0$, o sea,

$$\omega_0 \sim uR^{\frac{3}{4}}/l. \tag{32.8}$$

Esta expresión nos da el orden de magnitud del extremo superior del espectro de frecuencias de la turbulencia; el extremo inferior corresponde a frecuencias del orden de u/l. Así pues, el margen de frecuencias aumenta con el número de Reynolds proporcionalmente a $R^{3/4}$.

Razonamientos semejantes nos permiten determinar el orden de magnitud del número de grados de libertad de un flujo turbulento. Designemos por n el número de grados de libertad por unidad de volumen del fluido; n tiene dimensiones de $1/cm^3$. Este número puede únicamente depender de ρ, ϵ y también de la viscosidad ν, puesto que esta última determina el límite inferior de las dimensiones de los remolinos turbulentos. A partir de estas tres magnitudes podemos formar únicamente otra que posea las dimensio-

nes $1/\text{cm}^3$, a saber, $(\epsilon/\nu^3)^{3/4}$; ésta resulta ser exactamente $1/\lambda_0^3$, como era previsible. Así pues, tenemos

$$n \sim 1/\lambda_0^3 \sim \mathrm{R}^{9/4}/l^3. \tag{32.9}$$

Se tiene el número total N de grados de libertad multiplicando n por el volumen de la región de flujo turbulento, que es del orden de l^3:†

$$N \sim \mathrm{R}^{9/4}. \tag{32.10}$$

Finalmente, consideremos las propiedades del flujo en regiones cuya dimensión l es pequeña en comparación con λ_0. En dichas regiones el flujo es regular y su velocidad varía suavemente. De aquí que podamos desarrollar v_λ en una serie de potencias de λ y, reteniendo únicamente el primer término, se obtiene $v_\lambda = \text{constante} \times \lambda$. El orden de magnitud de la constante es v_{λ_0}/λ_0, puesto que para $\lambda \sim \lambda_0$ debemos tener $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Sustituyendo las expresiones de (32.6) y (32.7), se obtiene finalmente

$$v_\lambda \sim \Delta u \cdot \mathrm{R}^{\frac{1}{4}}\lambda/l. \tag{32.11}$$

También podía haberse obtenido directamente esta fórmula igualando dos expresiones para la disipación de energía ϵ: la expresión $(\Delta u)^3/l$ (31.1), que determina ϵ en función de las magnitudes que caracterizan los remolinos grandes, y la expresión $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$, que determina ϵ en función del gradiente de velocidades ($\sim v_\lambda/\lambda$) para los remolinos en los que realmente se produce la disipación de la energía.

PROBLEMA

Dos partículas de fluido están a una distancia λ_1 ($\gg \lambda_0$). Determinar el orden de magnitud del tiempo τ requerido para que la partícula recorra una distancia λ_2 ($\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll l$).

Solución. Si $\lambda \gg \lambda_0$, tenemos a partir de consideraciones dimensionales que $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t \sim (\epsilon\lambda)^{1/3}$. Integrando esta expresión y utilizando el hecho de que $\lambda_2 \gg \lambda_1$, resulta $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}$.

§ 33. Correlación de velocidades

La fórmula (32.1) determina cualitativamente la *correlación de velocidades* en la turbulencia local, es decir, la relación entre las velocidades que existen en dos puntos vecinos. Definiremos ahora algunas magnitudes que

† Las fórmulas (32.6)-(32.10) determinan la forma en que varían las magnitudes correspondientes con el número de Reynolds. Sin embargo, desde el punto de vista cuantitativo debe recordarse que puede aparecer en ellas realmente un factor numérico considerable. Por ejemplo, el número de grados de libertad debe ser del orden de la unidad, no para $\mathrm{R} \sim 1$, sino para $\mathrm{R} \sim \mathrm{R}_{cr}$. De aquí que en (32.10) debamos escribir el coeficiente $\mathrm{R}/\mathrm{R}_{cr}$ en lugar de R:

$$N \sim (\mathrm{R}/\mathrm{R}_{cr})^{9/4}.$$

van a servir para caracterizar cuantitativamente esta correlación.† Una de ellas puede ser, por ejemplo, el tensor cuyos componentes son

$$B_{ik} = \overline{(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})}, \tag{33.1}$$

en donde $\mathbf{v}_2$ y v_1 son las velocidades del fluido en dos puntos vecinos y la barra designa la operación de promediar respecto al tiempo.‡ El radio vector desde el punto 1 al punto 2 se designará por $\mathbf{r}$; suponemos que su módulo r es pequeño en comparación con l (pero no necesariamente grande en comparación con la escala interna de turbulencia λ_0).

Como la turbulencia local es isótropa, el tensor B_{ik} no puede depender de la dirección espacial. El único vector que puede aparecer en la expresión correspondiente a B_{ik} es el radio vector $\mathbf{r}$. En otras palabras, B_{ik} puede contener, aparte del módulo r de $\mathbf{r}$, únicamente el tensor unidad δ_{ik} y el vector unidad $\mathbf{n}$ en la dirección de $\mathbf{r}$. La forma más general de un tensor de rango dos de este tipo es

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k. \tag{33.2}$$

Tomaremos los ejes coordenados, de modo que uno de ellos esté en la dirección de $\mathbf{n}$, designando la componente de velocidad a lo largo del mismo por v_r y la componente perpendicular a $\mathbf{n}$ por v_t. La componente B_{rr} es entonces el valor medio del cuadrado de la velocidad relativa de dos partículas de fluido vecinas a lo largo de la línea que las une. Análogamente, B_{tt} es el valor medio del cuadrado de la velocidad transversal de una película respecto a la otra, mientras que B_{rt} es el valor medio del producto de ambos componentes de velocidad. Puesto que $n_r = 1$, $n_t = 0$, tenemos a partir de (33.2)

$$B_{rr} = A+B, \qquad B_{tt} = A, \qquad B_{rt} = 0 \tag{33.3}$$

Deduzcamos ahora una relación entre B_{rr} y B_{tt}. Para ello observaremos primero que la variación de la velocidad a lo largo de distancias pequeñas se debe principalmente a los pequeños remolinos. Las propiedades de la turbulencia local no dependen de los remolinos grandes que se superponen sobre el mismo. De aquí que para calcular el tensor B_{ik} basta tomar el caso particular de flujo turbulento completamente isótropo y homogéneo, en el

† Los resultados mencionados en esta sección se deben a T. VON KÁRMÁN y L. HOWARTH (1938) y a A. N. KOLMOGOROV (1941). Posteriormente se darán relaciones análogas para las fluctuaciones de temperatura en un flujo turbulento con calentamiento no uniforme (ver § 54, problemas 3 y 4).

‡ Si no existiese correlación entre las velocidades en los puntos 1 y 2, los valores medios de los productos en (33.1) se reducirán a los productos del valor medio de cada factor separadamente y, por tanto, serían nulos.

que la velocidad media del fluido es cero.† Desarrollando los paréntesis en (33.1), tenemos

$$B_{ik} = \overline{v_{1i}v_{1k}} + \overline{v_{2i}v_{2k}} - \overline{v_{1i}v_{2k}} - \overline{v_{1k}v_{2i}}.$$

Puesto que el flujo es completamente homogéneo e isótropo, tenemos $\overline{v_{1i}v_{1k}} = \overline{v_{2i}v_{2k}}$, y $\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1k}v_{2i}}$. Así pues,

$$B_{ik} = 2\overline{v_{1i}v_{1k}} - 2\overline{v_{1i}v_{2k}}. \tag{33.4}$$

Derivemos dicha expresión respecto a las coordenadas del punto 2:

$$\partial B_{ik}/\partial x_{2k} = -2\overline{v_{1i}\partial v_{2k}/\partial x_{2k}}.$$

Sin embargo, debido a la ecuación de continuidad $\partial v_{2k}/\partial x_{2k} = 0$, de modo que $\partial B_{ik}/\partial x_{2k} = 0$. Puesto que B_{ik} es una función sólo de las componentes $x_i = x_{2i} - x_{1i}$ del vector $\mathbf{r}$, la derivación respecto a x_{2k} es equivalente a derivar respecto a x_k. Sustituyendo (33.2) tenemos, después de un cálculo simple, que $A' + B' + 2B/r = 0$, designando con el símbolo prima la derivación respecto a r. Sustituyendo (33.3), podemos escribir esta expresión como $B'_{rr} + 2(B_{rr} - B_{tt})/r = 0$, de donde se obtiene, finalmente, la relación general existente entre B_{rr} y B_{tt}:

$$2rB_{tt} = \mathrm{d}(r^2B_{rr})/\mathrm{d}r. \tag{33.5}$$

A distancias r grandes en comparación con λ_0, la diferencia de velocidad es proporcional a $r^{1/3}$, de acuerdo con (32.1). Por tanto, las componentes del tensor B_{ik} para dicho valor de r son proporcionales a $r^{2/3}$. Sustituyendo en (33.5) $B_{rr} = \text{constante} \times r^{2/3}$, $B_{tt} = \text{constante} \times r^{2/3}$, obtenemos la relación simple

$$B_{tt} = \tfrac{4}{3}B_{rr}. \tag{33.6}$$

En el caso de distancias r pequeñas en comparación con λ_0, la diferencia de velocidades es proporcional a r y, por tanto, B_{rr} y B_{tt} son proporcionales a r^2. La fórmula (33.5) nos da entonces la relación

$$B_{tt} = 2B_{rr}. \tag{33.7}$$

A estas distancias ($r \ll \lambda_0$), B_{tt} y B_{rr} pueden también expresarse separadamente en función de la disipación de energía media ϵ. Escribamos $B_{rr} = ar^2$, siendo a una constante y combinando (33.2), (33.3) y (33.4), obtenemos

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1i}v_{1k}} - ar^2\delta_{ik} + \tfrac{1}{2}ar^2n_in_k.$$

† Podemos imaginarnos este flujo como el de un fluido sometido a una fuerte agitación y abandonado a sí mismo. Como es natural, el flujo irá disminuyendo con el transcurso del tiempo. La operación de promedio de la fórmula (33.1) debe tomarse entonces hablando estrictamente, no como promedio a lo largo del tiempo, sino extendido a todas las posiciones posibles de los puntos 1 y 2 (para una distancia r dada entre ellos) en un instante dado.

Derivando esta relación, se encuentra

$$\overline{\frac{\partial v_{1t}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2t}}{\partial x_{2l}}} = 15a, \qquad \overline{\frac{\partial v_{1t}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2t}}} = 0.$$

Puesto que estas expresiones son válidas para un valor de r arbitrariamente pequeño, podemos hacer $x_{1i} = x_{2i}$, y de aquí:

$$\overline{\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_l}\right)^2} = 15a, \qquad \overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_t}} = 0.$$

Sin embargo, de acuerdo con la fórmula general (16.3), tenemos como valor de la disipación de energía media

$$\epsilon = \tfrac{1}{2}\nu\overline{\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_t}\right)^2} = \nu\left[\overline{\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_l}\right)^2} + \overline{\frac{\partial v_t}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_t}}\right] = 15a\nu,$$

es decir, $a = \epsilon/15\nu$. Por tanto, se obtienen las relaciones siguientes que nos darán B_{rr} y B_{tt} en función de la disipación de energía media:†

$$B_t = \tfrac{2}{15}\epsilon r^2/\nu, \qquad B_{rr} = \tfrac{1}{15}\epsilon r^2/\nu. \tag{33.8}$$

Podemos también estudiar la *correlación triple*

$$B_{ikl} = \overline{(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})(v_{2l}-v_{1l})}. \tag{33.9}$$

De nuevo supondremos que el flujo es completamente homogéneo e isótropo. Consideremos en primer lugar el tensor auxiliar $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$. Este tensor es simétrico en los sufijos i y k, y en virtud de la isotropía debe ser expresable en función de n_i y δ_{ik}, como B_{ik}. La forma más general de dicho tensor es

$$\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} = C(r)\delta_{ik}n_l + D(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r)n_in_kn_l. \tag{33.10}$$

Derivando respecto a x_{2l}, tenemos, mediante la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}}\overline{(v_{1i}v_{1k}v_{2l})} = \overline{v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}}} = 0.$$

Sustituyendo la expresión correspondiente a $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$, tenemos, después de un cálculo simple (que omitimos), dos ecuaciones:

$$\mathrm{d}[r^2(3C+2D+F)]/\mathrm{d}r = 0,$$

$$C' + 2(C+D)/r = 0.$$

† Podría pensarse que, en principio, existe una posibilidad de obtener una fórmula universal, aplicable a un flujo turbulento cualquiera, que diese B_{rr} y B_{tt} para todas las distancias r que son pequeñas en comparación con l. Sin embargo, de hecho, no puede existir tal fórmula, como puede verse mediante el razonamiento siguiente. En principio, puede expresarse el valor instantáneo de $(v_{2i}-v_{1i})(v_{2k}-v_{1k})$ como una función universal de la disipación de energía ϵ en el instante considerado. Sin embargo, al promediar estas expresiones jugará un papel principal la ley de variación de ϵ en tiempos del orden de los períodos de los remolinos grandes (de tamaño $\sim l$) y esta ley es distinta para los diferentes flujos. Por tanto, el resultado del promedio no puede ser universal.

La integración de la primera nos da $3C + 2D + F = \text{constante}/r^2$. Para $r = 0$, las funciones C, D y F deben permanecer finitas. Por tanto, debemos poner la constante igual a cero, de modo que $3C + 2D + F = 0$. A partir de las dos ecuaciones así obtenidas se encuentra

$$D = -(C+\tfrac{1}{2}rC'), \qquad F = rC' - C. \tag{33.11}$$

Desarrollemos ahora los paréntesis en (33.9). Es fácil ver que, en virtud de la isotropía del flujo, los valores medios $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{1l}}$ y $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{2l}}$ son nulos. En efecto, en estos productos las tres velocidades se toman en un solo punto; así pues, el único tensor en función del cual puede expresarse el tensor $\overline{v_iv_kv_l}$ es δ_{ik}. Sin embargo, es imposible construir un tensor simétrico de orden tres mediante tensores unidad. Por otra parte, los valores medios de este tipo como $\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}}$ y $\overline{v_{2i}v_{2k}v_{1l}}$ tienen el mismo valor pero signo opuesto, puesto que el vector n_i en (33.10) varía de signo cuando se intercambian los puntos 1 y 2. El resultado es

$$B_{ikl} = 2(\overline{v_{1i}v_{1k}v_{2l}} + \overline{v_{1i}v_{2k}v_{1l}} + \overline{v_{2i}v_{1k}v_{1l}}).$$

Sustituyendo (33.10) y (33.11), se tiene la expresión

$$B_{ikl} = 2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(rC' - C)n_in_kn_l. \tag{33.12}$$

Tomando de nuevo uno de los ejes coordenados paralelo a $\mathbf{n}$, obtenemos las componentes del tensor B_{ikl}: $B_{rrr} = -12C$, $B_{rtt} = -2(C + rC')$, $B_{rrt} = B_{ttt} = 0$. De aquí vemos que se mantiene la relación

$$6B_{rtt} = \mathrm{d}(rB_{rrr})/\mathrm{d}r \tag{33.13}$$

entre las componentes no nulas B_{rtt} y B_{rrr}.

Finalmente, es posible también encontrar una relación entre las componentes de los tensores B_{ik} y B_{ikl}. Para ello calculemos las derivadas $\partial(\overline{v_{1i}v_{2k}})/\partial t$, recordando que un flujo completamente homogéneo e isótropo necesariamente se amortigua con el tiempo. Expresando las derivadas $\partial v_{1i}/\partial t$ y $\partial v_{2k}/\partial t$ mediante la ecuación de Navier-Stokes, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(v_{1i}v_{2k})} = -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\overline{(v_{1i}v_{1l}v_{2k})} - \frac{\partial}{\partial x_{2l}}\overline{(v_{1i}v_{2k}v_{2l})} - \frac{\partial}{\partial x_{1i}}\left(\overline{\frac{p_1v_{2k}}{\rho}}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\overline{\frac{p_2v_{1i}}{\rho}}\right) + \nu\triangle_1\overline{(v_{1i}v_{2k})} + \nu\triangle_2\overline{(v_{1i}v_{2k})}.$$

Al utilizar las propiedades de homogeneidad e isotropía debe recordarse que el signo de $\mathbf{r}$ varía cuando se intercambian los puntos 1 y 2 y, por tanto, el signo de la primera derivada espacial debe cambiarse. Los dos primeros términos son, por tanto, iguales y lo mismo ocurre con los dos últimos tér-

minos. Los términos tercero y cuarto son nulos. En efecto, en virtud de la isotropía, el valor medio $p_1 v_{2k}$ debe ser de la forma $f(r)n_k$. La divergencia $\partial(p_1 v_{2k})/\partial x_{2k} = p_1\, \partial v_{2k}/\partial x_{2k}$ es cero. Pero el único vector con simetría central, cuya divergencia es en todo punto nula, es una constante multiplicada por $(1/r^2)n_k$. Dicho vector resultaría infinito para $r = 0$, lo cual es imposible. Por consiguiente, la constante debe ser cero.

Así pues,

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(v_{1i}v_{2k})} = -2\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\overline{(v_{1i}v_{1l}v_{2k})} + 2\nu\triangle_1\overline{v_{1i}v_{2k}}. \tag{33.14}$$

Aquí debemos sustituir, de acuerdo con la fórmula deducida anteriormente,

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{2i}v_{2k}} - \tfrac{1}{2}B_{ik},$$

$$\overline{v_{1i}v_{1l}v_{2k}} = -\tfrac{1}{12}B_{rrr}\delta_{il}n_k + \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}rB_{rrr}' + B_{rrr})(\delta_{ik}n_l + \delta_k n_i) - \tag{33.15}$$

$$-\tfrac{1}{12}(rB_{rrr}' - B_{rrr})n_i n_k n_l.$$

En la primera expresión sustituiremos $\overline{v_{2i}v_{2k}}$ por $1/3\overline{v^2}\,\delta_{ik}$, utilizando la completa homogeneidad e isotropía del flujo:

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \tfrac{1}{3}\overline{v^2}\,\delta_{ik} - \tfrac{1}{2}B_{ik}. \tag{33.16}$$

La derivada respecto al tiempo de la energía cinética por unidad de masa $1/2\overline{v^2}$ es exactamente la disipación de energía $-\epsilon$; por tanto, $\partial(1/3\overline{v^2})/\partial t = -2/3\epsilon$. Un cálculo sencillo, aunque largo, da la ecuación

$$-\tfrac{2}{3}\epsilon - \frac{1}{2}\frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4}\frac{\partial(r^4 B_{rrr})}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right). \tag{33.17}$$

Como se supone que r es pequeño, podemos con exactitud suficiente poner $r = 0$ el primer miembro, es decir, despreciar $\partial B_{rr}/\partial t$ en comparación con ϵ. Multiplicando la ecuación resultante por r^4, integrando respecto a r y utilizando el hecho de que las funciones de correlación se anulan para $r = 0$, obtenemos la siguiente relación entre B_{rr} y B_{rrr}:

$$B_{rrr} = -\tfrac{4}{5}\epsilon r + 6\nu\mathrm{d}B_{rr}/\mathrm{d}r. \tag{33.18}$$

La relación (33.18), como (33.13), es válida tanto si r es mayor o menor que λ_0. Para $r \gg \lambda_0$, el término de viscosidad es pequeño y tenemos simplemente

$$B_{rrr} = -\tfrac{4}{5}\epsilon r. \tag{33.19}$$

Si $r \ll \lambda_0$, podemos sustituir la expresión (33.8) para B_{rr} en (33.18), obte-

niendo $B_{rrr} = 0$; esto es así debido a que B_{rrr}, en este caso, debe ser del tercer orden en r y así los términos de primer orden deben anularse.†

§ 34. Región de turbulencia y el fenómeno de separación

El flujo turbulento es, en general, rotacional. Sin embargo, la distribución de la vorticidad $\omega(\equiv \mathbf{rot}\,\mathbf{v})$ en el fluido tiene ciertas peculiaridades en el flujo turbulento (para R muy grande): en el flujo turbulento «estacionario» que rodea los cuerpos, puede normalmente dividirse el volumen total del fluido en dos regiones separadas. En una de ella el flujo es rotacional, mientras que en la otra la vorticidad es cero y tenemos un flujo potencial. Así pues, la vorticidad es no nula únicamente en una parte del fluido (aunque no, en general, sólo en una parte finita).

El que dicha región limitada de flujo rotacional pueda existir es una consecuencia del hecho de que puede considerarse el flujo turbulento como el movimiento de un fluido ideal que satisface las ecuaciones de Euler.‡ Hemos visto (§ 8) que, en el caso de movimiento de un fluido ideal, es válida la ley de conservación de la circulación. En particular, si en un punto cualquiera de una línea de corriente $\omega = 0$, entonces es válida igualmente en todos los puntos de dicha línea de corriente. Inversamente, si en un punto cualquiera de una línea de corriente $\omega \neq 0$, entonces ω no se anula en ningún punto de la misma. De aquí resulta claro que la existencia de regiones limitadas de flujo rotacional e irrotacional es compatible con las ecuaciones del movimiento si la región del flujo rotacional es de tal forma que las líneas de corriente dentro de la misma no penetren en la región exterior a ella. Dicha distribución de ω será estable y la vorticidad valdrá cero más allá de la superficie de separación.

Una de las propiedades de la región del flujo turbulento rotacional es que el intercambio de fluido entre esta región y el espacio que la rodea puede producirse sólo en una dirección. El fluido puede entrar en esta región procedente de la región del flujo potencial, pero nunca puede abandonarla.

Resaltaremos que los razonamientos dados hasta ahora no pueden, como es natural, considerarse como si proporcionaran una prueba rigurosa de las afirmaciones realizadas hasta aquí. Sin embargo, parece que está confirmada experimentalmente la existencia de regiones limitadas de flujo turbulento rotacional.

† El cociente $|B_{rrr}/B_{rr}^{3/2}|$ debe tener valores constantes en los intervalos $\lambda \gg r \gg \lambda_0$ y $r \ll \lambda_0$. Los resultados experimentales demuestran que, de hecho, esta magnitud es aproximadamente constante para todo r, valiendo 0,4 aproximadamente.

‡ La aplicabilidad de estas ecuaciones al flujo turbulento termina a distancias del orden de λ_0. Por tanto, sólo dentro de estas condiciones se define el límite nítido entre flujo rotacional e irrotacional.

El flujo es turbulento tanto en el caso de la región rotacional como en el de la irrotacional. Sin embargo, la naturaleza de la turbulencia es totalmente diferente en esta dos regiones. Para aclarar la razón de esta diferencia podemos señalar la propiedad siguiente general del flujo potencial, que obedece la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$. Supongamos que el flujo es periódico en el plano xy, de modo que en ϕ interviene únicamente x e y a través de un factor de la forma $e^{ik_1x+ik_2y}$. Entonces

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = -(k_1^2+k_2^2)\phi = -k^2\phi,$$

y, puesto que la suma de las derivadas de segundo orden debe ser nula, la derivada segunda de ϕ respecto a z debe ser igual a ϕ multiplicada por un coeficiente positivo: $\partial^2\phi/\partial z^2 = k^2\phi$. La dependencia de ϕ con z viene dada entonces por un factor de amortiguamiento de la forma e^{-kz} para $z>0$ (evidentemente es totalmente imposible el incremento ilimitado dado por e^{kz}. Así pues, si el flujo potencial es periódico en un plano, debe amortiguarse en la dirección perpendicular a dicho plano. Además, cuanto mayor sean k_1 y k_2 (es decir, menor sea el período del flujo en el plano xy), más rápidamente se verá amortiguado el flujo a lo largo del eje z. Todos estos razonamientos permanecen cualitativamente válidos en los casos en que el movimiento no es estrictamente periódico, pero tiene ciertamente alguna cualidad periódica.

A partir de estos razonamientos se obtiene de modo inmediato el resultado siguiente. Fuera de la región de flujo rotacional, deben amortiguarse los remolinos turbulentos y deben hacerlo tanto más rápidamente cuanto menor sea su tamaño. En otras palabras, los remolinos pequeños no llegan a penetrar muy lejos en la región del flujo potencial. En consecuencia, únicamente tienen importancia los remolinos grandes en esta región; estos se ven amortiguados a distancias del orden de la dimensión (transversal) de la región rotacional, que coincide con la escala externa de turbulencia en este caso. A distancias mayores que esta dimensión no existe prácticamente turbulencia y el flujo puede considerarse como laminar.

Hemos visto que la disipación de energía en el flujo turbulento se produce en los remolinos más pequeños; en los remolinos grandes no interviene ninguna disipación apreciable, razón por la cual es aplicable la ecuación de Euler. De lo que acabamos de decir se obtiene el resultado importante de que la disipación de energía se produce principalmente en la región del flujo turbulento rotacional y escasamente en el exterior de dicha región.

Recordando todas estas propiedades del flujo rotacional e irrotacional llamaremos, de ahora en adelante y para mayor brevedad, a la región de flujo turbulento rotacional simplemente *región de flujo turbulento* o *región turbulenta*. En las secciones siguientes estudiaremos la forma de esta región en distintos casos.

La región turbulenta debe estar limitada en alguna dirección por parte de la superficie del cuerpo, alrededor del cual tiene lugar el flujo. La línea que limita esta parte de la superficie se denomina *línea de separación.* A partir de ella empieza la superficie de separación entre el fluido turbulento y el resto del mismo. La formación de una región turbulenta en el flujo que rodea un cuerpo se denomina *fenómeno de separación.*

La forma de la región turbulenta queda determinada por las propiedades del flujo en el cuerpo principal del fluido (no en la vecindad inmediata de la superficie). Una teoría completa de la turbulencia (que no existe todavía) debería permitir, en principio, determinar la forma de esta región utilizando las ecuaciones del movimiento correspondiente a un fluido ideal, dada la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. Sin embargo, la posición real de la línea de separación está determinada por las propiedades del flujo en la proximidad inmediata de la superficie (conocida como *capa límite*), en donde la viscosidad juega una parte vital (ver § 40).

§ 35. Chorro turbulento

Puede establecerse en ciertos casos y mediante los elementos simples de semejanza la forma de la región turbulenta y algunas otras propiedades básicas de la misma. Entre estos casos podemos incluir, además de otros, diversos tipos de chorros turbulentos libres en un espacio lleno de fluido (L. PRANDTL, 1925).

Como primer ejemplo, consideremos la región turbulenta formada cuando un flujo se ve «separado» en un ángulo formado por dos planos infinitos que se cortan (que puede verse en un corte en la figura 16). En el caso laminar (figura 3, § 10), el flujo a lo largo de una de las caras del ángulo (por ejemplo, en la cara *AO*) rodearía suavemente la esquina y fluiría a lo largo de la otra cara alejándose del ángulo (*OB*). En el flujo turbulento el esquema del flujo es totalmente diferente.

El flujo a lo largo de una cara del ángulo no se curva ahora al alcanzar el vértice, sino que continúa en su dirección primitiva. Aparece ahora un flujo a lo largo de la otra cara en la dirección *BO*. Los dos flujos «se mezclan» en la región turbulenta;† habiéndose mostrado los límites de esta región, a trazos, en el corte de la figura 16. Puede verse el origen de esta región del modo siguiente. Imaginemos un flujo en el que existe una corriente uniforme a lo largo de *AO* y continúa en la misma dirección ocupando la totalidad del espacio encima del plano *AO* y su continuación en el fluido de la derecha, mientras que el fluido por debajo de este plano está

† Recordemos que, fuera de la región turbulenta, existe un flujo irrotacional que gradualmente se transforma en laminar cuando nos alejamos de sus límites.

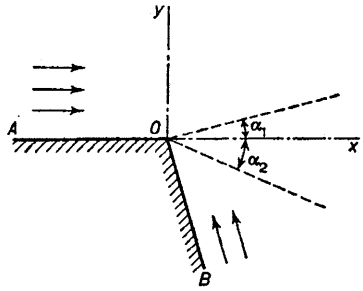

FIG. 16

en reposo. En otras palabras, tenemos una superficie de separación (el plano *AO* producido) entre el fluido que se mueve con velocidad constante y un fluido estacionario. Sin embargo, dicha superficie de discontinuidad es inestable y no puede existir en la práctica (ver § 30) Esta inestabilidad conduce a la mezcla y a la formación de una región turbulenta. El flujo a lo largo de *BO* surge debido a que cierta cantidad de fluido debe entrar en la región turbulenta procedente de abajo.

Determinemos la forma de la región turbulenta. Tomemos el eje x en la dirección indicada en la figura 16, estando el origen en *O*. Designaremos mediante Y_1 e Y_2 las distancias del plano xz a los límites superior e inferior de la región turbulenta, y lo que pretendemos es determinar Y_1 e Y_2 en función de x. Esto puede hacerse fácilmente mediante consideraciones de semejanza. Como los planos son infinitos en todas direcciones, no existen parámetros constantes en nuestra disposición que tengan las dimensiones de longitud. De aquí se deduce que Y_1 e Y_2 solamente pueden ser directamente proporcionales a la distancia x:

$$Y_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1, \qquad Y_2 = x \operatorname{tg} \alpha_2. \tag{35.1}$$

Los coeficientes de proporcionalidad son constantes numéricas simples; les escribiremos en la forma $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$, de modo que α_1 y α_2 son los ángulos formados entre los dos límites de la región turbulenta y el eje x. Así pues, la región turbulenta está limitada por dos planos que se cortan a lo largo del vértice del ángulo.

Los valores de α_1 y α_2 dependen únicamente del tamaño del ángulo y no, por ejemplo, de la vorticidad de la corriente principal. No pueden calcularse teóricamente; los resultados experimentales para el flujo que rodea un ángulo recto son $\alpha_1 = 5°$, $\alpha_2 = 10°$.†

† Aquí y en lo que sigue, nos referimos a los datos experimentales sobre la distribución de velocidades en una sección recta transversal del flujo turbulento, reducida mediante cálculos basados en la teoría de la longitud de mezcla (W. TOLLMIEN, 1926) (ver la nota final de esta sección). Esta teoría contiene una constante arbitraria, cuyo valor se escoge de modo que se obtenga el mejor acuerdo posible con los datos experimentales.

Las velocidades de los flujos a lo largo de las dos caras del ángulo no son iguales; su cociente es un número definido que depende nuevamente sólo del tamaño del ángulo. Cuando no está próximo a π, una de las velocidades es considerablemente mayor y coincide con la de la corriente principal que está en la misma dirección (AO) que la región turbulenta. Por ejemplo, en el flujo que rodea un ángulo recto, la velocidad a lo largo del plano AO es treinta veces mayor que la del flujo a lo largo de BO.

Podemos mencionar también que la diferencia existente entre las presiones del fluido en las dos caras de la región turbulenta es muy pequeña. Por ejemplo, se encuentra que en el flujo que rodea a un ángulo recto $p_1 - p_2 = 0{,}003\ \rho U_1^2$, siendo U_1 la velocidad de la corriente principal (a lo largo de AO), p_1 la presión en dicha corriente y p^2 la presión en la corriente a lo largo de BO.

En el caso límite del flujo que rodea un ángulo de 2π, tenemos simplemente el borde de una placa con un fluido que se mueve en sus dos caras. En ángulo $\alpha_1 + \alpha_2$ de la región turbulenta es cero, es decir, no existe región turbulenta; resultan iguales las velocidades de los flujos a lo largo de ambas caras. Cuando aumenta el ángulo AOB, se alcanza un punto en el que el plano BO forma el límite inferior de la región turbulenta; entonces el ángulo AOB es obtuso. Cuando el ángulo aumenta más, la región turbulenta continúa estando limitada por el plano BO en una cara. Aquí tenemos simplemente una separación en la que coincide la línea de separación con el vértice del ángulo. El ángulo de la región turbulenta permanece finito.

Como segundo ejemplo consideremos el problema de un chorro turbulento de fluido que sale del extremo de un tubo estrecho y entra en un espacio infinito lleno con el mismo fluido. En § 23 resolvimos el problema del flujo laminar en dicho «chorro sumergido». A distancias grandes (las únicas que consideraremos), comparadas con las dimensiones de la boca del tubo, el chorro tiene simetría axial cualquiera que sea la forma de la abertura.

Determinemos la forma de la región turbulenta en el chorro. Tomemos el eje del chorro como eje x y llamemos R al radio de la región turbulenta; pretendemos determinar R en función de x (que se mide a partir del extremo del tubo). Como en el ejemplo anterior, esta función se determina fácilmente y de modo directo mediante consideraciones de semejanza. A distancias grandes, en comparación con las dimensiones de la boca del tubo, la forma real y el tamaño de la abertura no puede influir en la forma del chorro. De aquí que no tengamos a nuestra disposición ningún parámetro característico de las dimensiones de una longitud. Por consiguiente, se deduce como antes que R debe ser proporcional a x:

$$R = x \operatorname{tg} \alpha, \tag{35.2}$$

en donde la constante numérica $\operatorname{tg}\alpha$ es la misma para todos los chorros. Así pues, la región turbulenta es un cono; el valor experimental del ángulo 2α es de 25 a 30° (figura 17).†

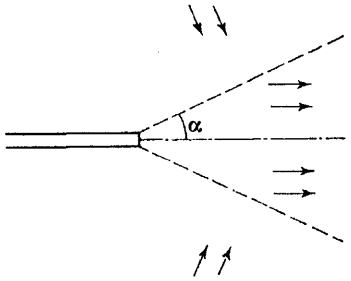

FIG. 17

La distribución de velocidades (promediada en el tiempo) en una sección recta del chorro tiene las siguientes propiedades. El flujo está dirigido principalmente a lo largo del chorro. La componente de velocidad longitudinal disminuye rápidamente cuando nos alejamos del eje del chorro; resulta ser igual a $1/2u_0$ (siendo u_0 la velocidad en el eje) a una distancia de únicamente 0,35 R del eje, y en límite de la región turbulenta es del orden de 0,01 u_0. La componente de velocidad transversal tiene un orden de magnitud aproximadamente uniforme en toda la sección recta de la región turbulenta y en el límite de esta región vale aproximadamente $-0{,}025\ u_0$, estando dirigida hacia el chorro. Esta componente transversal produce un flujo hacia el interior de la región turbulenta. La distribución de velocidades en el exterior de la región turbulenta (para un ángulo α dado) puede determinarse teóricamente (ver problema 1).

La velocidad en el chorro también disminuye cuando nos alejamos de la boca del tubo. Se encuentra con facilidad la ley de esta disminución. Para ello utilizaremos el método siguiente. El flujo total de impulso a través de una superficie esférica situada en la boca del tubo debe ser independiente del radio de la superficie. La densidad del flujo de impulso en el chorro es del orden de ρu^2, en donde u es del orden de cierta velocidad media del chorro; esta es la única magnitud con las dimensiones correctas que puede formarse mediante la densidad del fluido ρ, la velocidad u y la distancia x. El área de la parte de la sección recta del chorro, en donde u es apreciablemente distinto de cero, es del orden de R^2. De aquí que el

† Se observa experimentalmente cierta dependencia de la constante α con las condiciones iniciales (perfil de velocidades) en la boca del tubo. Es razonable suponer que esta dependencia se debe al efecto de las dimensiones finitas de la abertura, efecto que desaparece a distancias mayores.

flujo de impulso total sea del orden de $\rho u^2 R^2$. Igualando esta expresión a una constante y poniendo R = constante $\times$ x, obtenemos

$$u \sim \text{constante}/x, \tag{35.3}$$

es decir, la velocidad disminuye de modo inversamente proporcional a la distancia a la boca del tubo.

La cantidad Q del fluido que pasa por la unidad de tiempo a través de una sección recta de la región turbulenta del chorro es del orden del producto de su área ($\sim R^2$) por la velocidad media u. Sustituyendo, tenemos†

$$Q = Bx. \tag{35.4}$$

Así pues, la descarga o caudal a través de una sección recta de la región turbulenta aumenta con x, es decir, entra dentro de la región turbulenta alguna parte del fluido exterior.‡ La constante que aparece en (35.4) puede determinarse del modo siguiente. A distancias del orden de las dimensiones de la boca del tubo, Q debe coincidir con la cantidad Q_0 de fluido emitido del tubo por unidad de tiempo, que es un valor fijo para un chorro particular concreto. De aquí que pongamos que $B \sim Q_0/a$, en donde a corresponde a la dimensión transversal de la boca del tubo (por ejemplo, el radio, si la abertura es circular). Así pues, podemos escribir

$$B = cQ_0/a, \tag{35.5}$$

en donde c es una constante numérica que depende únicamente de la forma de la abertura. Si ésta es circular, experimentalmente se encuentra que c vale aproximadamente 1,5.

El flujo en cualquier sección de la longitud del chorro está caracterizado por el número de Reynolds de dicha sección, definido como uR/ν. Sin embargo, en virtud de (35.2) y (35.3), el producto uR es constante a lo largo del chorro, de modo que el número de Reynolds es el mismo para todas estas secciones. Por ejemplo, puede tomarse como $B/\rho\nu$. La constante B que aparece aquí es el único parámetro que determina el flujo en el chorro. Cuando aumenta «la intensidad» Q_0 del chorro (permaneciendo constante el valor de a), el número de Reynolds $B/\rho\nu$, finalmente, alcanza un valor típico,

† Si dos cantidades que varían dentro de márgenes amplios son siempre del mismo orden de magnitud, entonces deben ser proporcionales. De aquí que, en este caso (y en otros análogos), podamos escribir Q = constante $\times$ x en lugar de $Q \sim$ constante $\times$ x.

‡ El flujo de masa total a través de cualquier plano infinito que corta al chorro es infinito, es decir, un chorro que penetra en un espacio infinito lleva con él una cantidad infinita de fluido.

después del cual el flujo se hace simultáneamente turbulento a lo largo de la longitud total del chorro.†

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo medio en el chorro fuera de la región turbulenta.

Solución. Tomemos coordenadas esféricas r, θ, ϕ, estando el eje polar situado a lo largo del eje del chorro y el origen en su punto de emergencia. Debido a que el chorro tiene una simetría axial, la componente u_ϕ de la velocidad media es cero, mientras que u_θ y u_r son funciones únicamente de r y θ. Si utilizamos los mismos razonamientos que en el problema del chorro laminar (§ 23), se ve que u_θ y u_r deben tener las formas $u_\theta = f(\theta)/r$, $u_r = F(\theta)/r$. Fuera de la región turbulenta tenemos un flujo potencial, es decir, $\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = 0$, de modo que $\partial u_r/\partial\theta - \partial(ru_\theta)/\partial r = 0$. Pero ru_θ es independiente de r, de modo que $\partial u_r/\partial\theta = (1/r)\,\mathrm{d}F/\mathrm{d}\theta = 0$, de aquí que F = constante $= -b$, por ejemplo, o sea

$$u_r = -b/r. \tag{1}$$

A partir de la ecuación de continuidad,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \,\mathrm{sen}\,\theta) = 0,$$

obtenemos, entonces,

$$f = \frac{\text{constante} - b\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}.$$

La constante de integración debe ser $-b$ si la velocidad no es infinita para $\theta = \pi$ (no importa que sea f infinita para $\theta = 0$, puesto que la solución en cuestión se refiere única-

† Con objeto de hacer cálculos más detallados para los diversos tipos de flujo, es costumbre emplear ciertas teorías «semiempíricas», basadas en hipótesis relativas a la dependencia existente entre el coeficiente de viscosidad turbulenta y el gradiente de la velocidad media. Por ejemplo, se admite en la teoría de Prandtl que (en el caso de un flujo plano)

$$\nu_{\text{turb}} = l^2\left|\partial u_x/\partial y\right|,$$

en donde se escoge la relación entre l (denominada *longitud de mezcla*) y las coordenadas de acuerdo con los resultados de semejanza; por ejemplo, en el flujo turbulento se pone $l = cx$, siendo c una constante empírica. Normalmente estas teorías suelen estar en buen acuerdo con los resultados experimentales y, por tanto, resultan útiles para los cálculos de interpolación. Sin embargo, no es posible dar valores universales a las constantes empíricas que caracterizan cada teoría; por ejemplo, el valor del cociente entre la longitud de mezcla l y la dimensión transversal de la región turbulenta ha de escogerse de modo diferente en los distintos casos. También debe señalarse que es posible obtener una buena concordancia con los resultados experimentales a partir de diversas expresiones de la viscosidad turbulenta.

Un estudio más detallado de estas teorías puede verse en los textos de L. G. Loytsianski, *Aerodynamics of Boundary Layers* (*Aérodinamika pogranichnogo sloya*), Moscow, 1941; G. N. Abramovich, *Free Turbulent Jets of Liquids and Gases* (*Turbulentnye svobodnye strui zhidkostei i gazov*), Moscow, 1948; H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, London, 1955.

mente al espacio exterior o región turbulenta, mientras que $\theta = 0$ cae dentro de dicha región). Así pues,

$$u_\theta = -\frac{b(1+\cos\theta)}{r\,\mathrm{sen}\,\theta} = -\frac{b}{r}\cot\tfrac{1}{2}\theta. \tag{2}$$

La componente de la velocidad en la dirección del chorro (u_x) y su valor absoluto son

$$u_x = \frac{b}{r} = \frac{b\cos\theta}{x}, \qquad u = \frac{b}{r\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\theta}. \tag{3}$$

Puede relacionarse la constante b con la constante B de (35.4). Consideremos un segmento del cono formado por la región turbulenta, limitado por dos secciones rectas infinitamente próximas del cono. La masa del fluido que entra en este segmento por unidad de tiempo es $dQ = -2\pi r\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot u_\theta dr = 2\pi b\rho(1+\cos\alpha)dr$, mientras que según la forma (35.4) tenemos $dQ = B\,dx = B\cos\alpha\,dr$. Comparando ambas expresiones, obtenemos

$$b = \frac{B\cos\alpha}{2\pi\rho(1+\cos\alpha)}. \tag{4}$$

En el límite de la región turbulenta, la velocidad **u** está dirigida hacia el interior de esta región formando un ángulo $1/2(\pi - \alpha)$ con la dirección positiva del eje x.

Comparando la velocidad media $\bar{u}_x$ dentro de la región turbulenta (definida como $\bar{u}_x = Q/\pi\rho R^2 = B/\pi\rho x\,\mathrm{tg}^2\alpha$) con la velocidad $(u_x)_{\mathrm{pot}}$ en el límite de la región. Tomando la primera ecuación (3) con $\theta = \alpha$, tenemos

$$(u_x)_{\mathrm{pot}}/\bar{u}_x = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha).$$

Para $\alpha = 12°$, esta ecuación es 0,011, es decir, la velocidad en el límite de la región turbulenta es pequeña en comparación con la velocidad media en el interior de la misma.

Problema 2. Determinar la ley del tamaño y velocidad en un chorro turbulento sumergido que procede de una rendija delgada de longitud infinita.

Solución. Mediante el mismo razonamiento que el caso del chorro axial se obtiene la conclusión de que la región turbulenta está limitada por dos planos que se cortan sobre la rendija, es decir, la semianchura del chorro es $Y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. El flujo del impulso del chorro (por unidad de longitud de la rendija) es del orden de $\rho u^2 Y$. La dependencia de la velocidad media u con x viene dada, por tanto, por $u = \text{constante}/\sqrt{x}$. El caudal a través de una sección recta de la región turbulenta es $Q \sim \rho u Y$, de aquí que $Q = \text{constante} \times \sqrt{x}$. Los datos experimentales dan un valor de 25° a 33° para el ángulo 2α de un chorro plano paralelo (ver la tercera nota a pie de página de esta sección).

§ 36. Estela turbulenta

Cuando se tienen números de Reynolds considerablemente superiores al valor crítico en un flujo que rodea a un cuerpo sólido, se forma detrás del mismo una región muy larga de flujo turbulento. Dicha región se denomina *estela turbulenta.* A distancias grandes en comparación con la dimensión del cuerpo, algunos razonamientos sencillos nos permiten determinar la forma de esta estela y el modo en que disminuye allí la velocidad del fluido (L. PRANDTL, 1926).

Como en el caso del estudio de la estela laminar en § 21, llamaremos **U** a la velocidad del chorro incidente y tomaremos la dirección de **U** como eje x. La velocidad del fluido en un punto cualquiera, promediada respecto a las fluctuaciones turbulentas, se escribe en forma $\mathbf{U} + \mathbf{u}$. Designando por a cierta anchura media de la estela, obtendremos a en función de x. Si no existe sustentación, entonces a distancias grandes del cuerpo la estela tiene simetría axial y una sección recta circular; en este caso a puede ser el radio de la estela. Si está presente una fuerza de sustentación, se selecciona una dirección en el plano yz y entonces la estela carece de simetría axial a una distancia cualquiera del cuerpo.

La componente de velocidad longitudinal del fluido en una estela es del orden de U, mientras que la componente transversal es del orden de cierto valor medio u de la velocidad turbulenta. El ángulo formado por las líneas de corriente y el eje x es, por tanto, del orden de u/U. La estela termina, como sabemos, en aquellos límites más allá de los cuales las líneas de corriente del movimiento turbulento de rotación no pueden pasar. De aquí se deduce que el ángulo entre el límite de la estela y el eje x es también del orden de u/U. Esto significa que podemos escribir

$$\mathrm{d}a/\mathrm{d}x \sim u/U. \tag{36.1}$$

A continuación, utilizaremos las fórmulas (21.1), (21.2), que determinan las fuerzas sobre el cuerpo en función de integrales de la velocidad del fluido en la estela (ahora se interpreta la velocidad como su valor medio). La región de integración en estas integrales es del orden de a^2. De aquí que una estimación de la integral nos de $F \sim \rho U u a^2$, siendo F del orden del arrastre o de la sustentación. Así pues,

$$u \sim F/\rho U a^2. \tag{36.2}$$

Sustituyendo en (36.1), se encuentra la expresión $\mathrm{d}a/\mathrm{d}x \sim F/\rho U^2 a^2$, a partir de la cual se tiene por integración

$$a \sim (Fx/\rho U^2)^{\frac{1}{3}}. \tag{36.3}$$

Así pues, la anchura de la estela aumenta proporcionalmente a la raíz cúbica de la distancia al cuerpo. Para valor de la velocidad u, a partir de (36.2) y (36.3), tenemos

$$u \sim (FU/\rho x^2)^{\frac{1}{3}}, \tag{36.4}$$

es decir, la velocidad media del fluido en la estela es inversamente proporcional a $x^{2/3}$.

El flujo en cualquier sección recta de la estela está caracterizado por el número de Reynolds $\mathrm{R} \sim au/\nu$. Sustituyendo (36.2) y (36.3), se obtiene

$$\mathrm{R} \sim F/\nu\rho U a \sim (F^2/\rho^2 U x \nu^3)^{\frac{1}{3}}.$$

Vemos que este número no es constante a lo largo de la estela, a diferencia de lo que se vio en el caso del chorro turbulento. A distancias suficientemente grandes del cuerpo, R resulta ser tan pequeño que el flujo en la estela deja de ser turbulento. Más allá de este punto tenemos una estela laminar, cuyas propiedades ya se estudiaron en § 21.

En § 21, problema 2, se obtuvieron fórmulas que describen el flujo fuera de la estela y bastante lejos del cuerpo. Estas formas son válidas para el flujo en el exterior de la estela turbulenta, lo mismo que en el exterior de la estela laminar.

Podemos mencionar ahora algunas propiedades generales de la distribución de velocidades alrededor del cuerpo. Tanto en el interior como en el exterior de la estela turbulenta, la velocidad (que ahora entendemos siempre como **u**) disminuye cuando nos alejamos del cuerpo. Sin embargo, la velocidad longitudinal u_x desciende más rápidamente ($\sim 1/x^2$) fuera de la estela que en su interior. Por tanto, lejos del cuerpo podemos suponer que u_x es cero en el exterior de la estela. Podemos decir que u_x disminuye desde cierto valor máximo que se obtiene en el eje de la estela hasta cero en sus límites. Las componentes transversales u_y, u_z en los límites son del mismo orden de magnitud que en el interior de la estela, disminuyendo rápidamente cuando nos alejamos de la estela a una distancia determinada del cuerpo.

§ 37. Teorema de Joukowski

La distribución de velocidades desarrollada alrededor de un cuerpo, descrita al final de la última sección, no es válida para casos excepcionales, en donde el espesor de la estela formada detrás del cuerpo es muy pequeña en comparación con su anchura. Se forma una estela de este tipo en el flujo que rodea a cuerpos cuyo espesor (en la dirección y) es pequeño en comparación con su anchura (en la dirección z); la longitud (en la dirección del flujo, dirección x) puede ser de cualquier valor. Es decir, estamos considerando un flujo que rodea a cuerpos cuya sección recta transversal al flujo es muy alargada. Entre estos cuerpos podemos incluir, en particular, las *alas*, es decir, cuerpos cuya anchura o *envergadura* es grande en comparación con sus otras dimensiones.

Evidentemente en este caso no existe ninguna razón por la cual la componente de velocidad u_y perpendicular al plano de la estela turbulenta deba descender apreciablemente a distancias del orden del espesor de la misma. Por el contrario, esta componente será ahora del mismo orden de magnitud dentro de la estela y a distancias considerables de la misma, del orden de la envergadura. Aquí, como es natural, admitimos que la sustentación no es cero, puesto que en otro caso la velocidad transversal prácticamente se anularía.

Consideremos la fuerza de sustentación vertical F_y que se obtiene como resultado de dicho flujo. De acuerdo con la fórmula (21.2), viene dada por la integral

$$F_y = -\rho U \iint u_y \, dy \, dz, \tag{37.1}$$

en donde, teniendo en cuenta la naturaleza de la distribución de u_y, la integración debe realizarse sobre el plano transversal completo. Además, puesto que es pequeño el espesor de la estela (dirección y), mientras que la velocidad u_y dentro de la misma no es grande en comparación con su valor fuera, podemos realizar la integración sobre y con suficiente aproximación, extendiéndola sobre la región exterior a la estela y escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_y \, dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y \, dy + \int_{-\infty}^{y_1} u_y \, dy,$$

siendo y_1 e y_2 las coordenadas de los límites de la estela (figura 18).

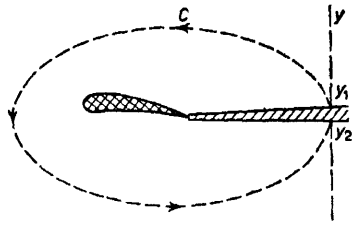

FIG. 18

Sin embargo, fuera de la estela tenemos un flujo potencial y $u_y = \partial\phi/\partial y$; recordando que $\phi = 0$ en el infinito, se obtiene, por tanto,

$$\int u_y \, dy = \phi_2 - \phi_1,$$

en donde ϕ_2 y ϕ_1 son los valores del potencial en ambos lados de la estela. Podemos decir que $\phi_2 - \phi_1$ es la discontinuidad del potencial en la superficie de discontinuidad que puede sustituirse por una estela delgada. Debe permanecer continua la derivada $u_y = \partial\phi/\partial y$. Una discontinuidad en la componente de velocidad normal a la superficie de la estela significaría que fluye cierta cantidad de fluido dentro de la estela; sin embargo, en la aproximación en la cual se desprecia el espesor de la misma, este flujo de entrada debe ser nulo. Así pues, sustituyamos la estela por una superficie de discontinuidad tangencial. A continuación, en la misma aproximación, la presión debe ser también continua en la estela. Puesto que la variación de la presión viene dada en primera aproximación, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, por $\rho U u_x = U \, \partial\phi/\partial x$, se dice que la derivada $\partial\phi/\partial x$ debe ser

también continua. Sin embargo, la derivada $\partial\phi/\partial z$ (la velocidad a lo largo del ala) es, en general, discontinua.

Como la derivada $\partial\phi/\partial x$ es continua, la discontinuidad $\phi_2 - \phi_1$ depende sólo de z, y no de la coordenada x a lo largo de la estela. Así pues, tenemos la siguiente fórmula para la sustentación:

$$F_y = -\rho U \int (\phi_2 - \phi_1) \mathrm{d}z. \tag{37.2}$$

La integración respecto a z puede tomarse sobre la anchura de la estela (como es natural, $\phi_2 - \phi_1 \equiv 0$ fuera de la misma).

Esta fórmula puede escribirse en una forma ligeramente distinta. Para ello, observemos que, utilizando propiedades bien conocidas de la integral del gradiente de un escalar, podemos escribir la diferencia $\phi_2 - \phi_1$ como una integral de contorno o curvilínea

$$\oint \mathbf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{dl} = \oint (u_y \,\mathrm{d}y + u_x \,\mathrm{d}x),$$

tomada a lo largo de un contorno que parte del punto y_1, rodea el cuerpo y termina en el punto y_2, pasando así a través de todos los puntos de la región de flujo potencial. Puesto que la estela es delgada, podemos, sin variar la integral excepto en cantidades de orden superior, cerrar este contorno mediante el segmento corto que va desde y_2 hasta y_1. Designando mediante Γ la circulación de la velocidad alrededor del contorno cerrado C que encierra el cuerpo (figura 18), tenemos

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{dl} = \phi_2 - \phi_1, \tag{37.3}$$

y para la fuerza de sustentación se tiene la fórmula†

$$F_y = -\rho U \int \Gamma \,\mathrm{d}z. \tag{37.4}$$

La relación entre la sustentación y la circulación dada por esta fórmula constituye el *teorema de Joukowski*, deducido en primer lugar por N. E. JOUKOWSKI en 1906.‡

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la ley según la cual se ensancha la estela turbulenta formada en el flujo transversal que rodea a un cilindro de longitud infinita.

† Siempre se escoge el signo de la circulación de la velocidad correspondiente al trayecto contrario al movimiento de las agujas de reloj.

‡ Ver § 46 para la aplicación de este teorema a alas aerodinámicas.

Solución. El arrastre f_x por unidad de longitud del cilindro es del orden de $\rho U u Y$. Combinando este valor con la relación (36.1), se tiene que la anchura de la estela Y es

$$Y = A\sqrt{(xf_x/\rho U^2)}, \tag{1}$$

siendo A una constante. La velocidad media u en la estela disminuye de acuerdo con $u \sim \sqrt{(f_x/\rho x)}$. El número de Reynolds $R \sim Yu/\nu \sim f_x/\rho U\nu$ es independiente de x y, por tanto, no existe estela laminar.

Podemos mencionar que, de acuerdo con los resultados experimentales, el coeficiente constante en (1) es $A = 0{,}93$ [siendo Y la semianchura de la estela; si se toma Y como la distancia a la cual la velocidad u_x disminuye hasta la mitad de su valor máximo (en el centro de la estela), entonces $A = 0{,}41$].

Problema 2. Determinar el flujo en el exterior de la estela formada en el flujo transversal que rodea a un cuerpo de longitud infinita.

Solución. Fuera de la estela tenemos un flujo potencial; designaremos el potencial por Φ para distinguirlo del ángulo ϕ en el sistema de coordenadas cilíndricas que vamos a tomar, situando el eje z a lo largo de la longitud del cuerpo. Como en § 21, problema 2, se tiene la conclusión de que debemos tener

$$\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{grad}\,\Phi \cdot d\mathbf{f} = f_x/\rho U,$$

en donde ahora la integración se extiende a la superficie de un cilindro de radio grande y de longitud unidad con su eje en la dirección x, siendo f_x el arrastre por unidad de longitud del mismo. La solución de la ecuación de Laplace bidimensional $\Delta\Phi = 0$ que satisface esta condición es $\Phi = (f_x/2\pi\rho U)\log r$. A continuación, tenemos para la sustentación, mediante la fórmula (37.2), $f_y = \rho U(\Phi_1 - \Phi_2)$. La solución de la ecuación de Laplace que disminuye con menos rapidez con la distancia y que tiene una discontinuidad en el plano $\phi = 0$ es $\Phi =$ constante $\times\ \phi$; puesto que $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$, la constante es $-f_y/2\pi\rho U$. El flujo viene dado por la suma de estas dos soluciones, es decir,

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\rho U}(f_x \log r - \phi f_y). \tag{1}$$

Las componentes cilíndricas de la velocidad $\mathbf{u}$ son

$$u_r = \partial\Phi/\partial r = f_x/2\pi\rho U r, \qquad u_\phi = (1/r)\partial\Phi/\partial\phi = -f_y/2\pi\rho U r. \tag{2}$$

La velocidad $\mathbf{u}$ forma un ángulo constante $\operatorname{arctag}(f_y/f_x)$ con la dirección r.

Problema 3. Determinar la ley de cambio de forma de la estela detrás de un cuerpo de longitud infinita cuando existe una fuerza de sustentación.

Solución. Si existe una fuerza de sustentación, la estela (considerada como una superficie de discontinuidad) se curva en el plano xy. La función $y = y(x)$ que determina esta modificación viene dada por la ecuación $dx/(u_x + U) = dy/u_y$. Sustituyendo, utilizando (2) del problema 2, $u_y \approx -f_y/2\pi\rho U x$ y despreciando u_x en comparación con U, obtenemos

$$dy/dx = -f_y/2\pi\rho U^2 x,$$

de aquí

$$y = \text{constante} - (f_y/2\pi\rho U^2)\log x.$$

§ 38. Turbulencia isótropa

Ya hemos mencionado en § 33 el caso particular del flujo turbulento que es completamente homogéneo e isótropo, siendo nula la velocidad media en todo el fluido. Dicho flujo puede imaginarse como el de un fluido que se agita vigorosamente y luego se abandona a sí mismo. El movimiento va disminuyendo con el tiempo, como es natural.

El estudio ulterior de la turbulencia isótropa, y en particular la determinación del modo de amortiguarse a lo largo del tiempo, se basa en una ley de conservación deducida en primer lugar por L. G. LOYTSIANSKI (1939). Esta ley, que es válida únicamente en el caso de la turbulencia isótropa, es una consecuencia de la ley general de conservación del momento cinético y puede deducirse del modo siguiente.

Aislemos dentro del fluido ilimitado una parte suficientemente grande de volumen y consideremos la cantidad total de momento cinético o angular **M** contenido en este volumen. **M** tiene un determinado valor aleatorio que, en general, no es cero. Teniendo en cuenta la interacción con las regiones que la rodean, **M** no permanece estrictamente constante. Sin embargo, puesto que la interacción es un efecto superficial, es evidente que el tiempo T, durante el cual **M** varía apreciablemente, debe aumentar con la dimensión L del volumen seleccionado. El tiempo T y la dimensión L pueden ser arbitrariamente grandes y en este sentido se conserva el momento cinético **M**.

Por conveniencia en lo que sigue supondremos que el volumen escogido del fluido está encerrado en un recipiente con paredes fijas; es evidente que las condiciones límites en la superficie de un volumen muy grande no puede tener ningún efecto sobre las propiedades volumétricas del flujo en el que estamos interesados.

De acuerdo con la definición general, el tensor M_{ik}, que es el momento angular total, es igual a la integral

$$\rho \int (x_i v_k - x_k v_i) \mathrm{d}V$$

tomada en todo el volumen. Transformemos esta integral del modo siguiente:

$$\int x_k v_i \mathrm{d}V = \int \frac{\partial}{\partial x_l}(x_i x_k v_l)\mathrm{d}V - \int x_i x_k \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\mathrm{d}V - \int x_i v_k \mathrm{d}V.$$

La primera integral del segundo miembro, al convertirse en una integral de superficie, resulta cero, puesto que las componentes de velocidad normales en las paredes que limitan al fluido son nulas, de modo que $v_k \, \mathrm{d}k_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}f = 0$. La segunda integral es cero si el fluido es incompresible ($\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$). Así pues,

$$\int x_k v_i \mathrm{d}V = - \int x_i v_k \mathrm{d}V,$$

y podemos escribir

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k \mathrm{d}V.$$

La suma de las componentes al cuadrado de M_{ik} es igual al doble del valor absoluto del cuadrado del vector momento cinético

$$\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \mathrm{d}V.$$

Por tanto, tenemos

$$M^2 = 2\rho^2 [\int x_i v_k \mathrm{d}V]^2.$$

La integral al cuadrado puede escribirse como una integral doble:

$$M^2 = 2\rho^2 \iint x_i x'_i v_k v'_k \mathrm{d}V \mathrm{d}V'.$$

Finalmente, observemos que esta expresión puede volverse a escribir

$$M^2 = -\rho^2 \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k \mathrm{d}V \mathrm{d}V'; \qquad (38.1)$$

las integrales que contienen los cuadrados x_i^2 y x'^2_i se anulan, puesto que

$$\iint x'^2_i v_k v'_k \mathrm{d}V \mathrm{d}V' = \int x'^2_i v'_k \mathrm{d}V' \int v_k \mathrm{d}V, \quad \text{y} \quad \int v_k \mathrm{d}V = 0$$

ya que el impulso total de un fluido incompresible en un recipiente fijo es cero.

El factor $v_k v'_k \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$ en el integrando de (38.1) es el producto escalar de las velocidades en dos puntos que tienen coordenadas x_k y x'_k, estando separados a una distancia $r = \sqrt{[(x_k - x'_k)^2]}$. Promediemos este producto respecto todas las posiciones de los puntos x_k y x'_k (para un r dado) dentro del volumen que nos ocupa: esta operación de promedio es la misma que la utilizada en § 33 al definir las funciones de correlación. Puesto que el flujo es isótropo, la magnitud $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$ es sólo una función de r. Disminuye rápidamente al aumentar r, puesto que las velocidades del flujo turbulento en dos puntos separados a una distancia grande puede suponerse que son estadísticamente independientes: el valor medio de su producto se reduce entonces al producto de los valores medios de las velocidades individuales, el cual es cero (puesto que la velocidad media es cero en cualquier punto dentro del flujo considerado).

Efectuando esta operación de promediar bajo el signo integral en (38.1), se tiene

$$M^2 = \rho^2 \int f \mathrm{d}V, \text{ en donde } f = -\int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}\, r^2 \mathrm{d}V'. \qquad (38.2)$$

El integrando correspondiente a f disminuye rápidamente al aumentar r, de modo que la integral converge; esto significa que, cuando la dimensión L de la región tiende a infinito, f tiende a un límite finito. Puesto que el flujo es homogéneo,† la magnitud f es constante en todas partes del fluido

† En toda la región, excepto en una parte muy pequeña cerca de la superficie.

y podemos escribir simplemente $M^2 = \rho^2 fV$. Podemos señalar así que el momento angular o cinético aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del volumen del fluido móvil y no proporcionalmente a dicho volumen. Esto se debe a que el momento angular total es la suma de un gran número de componentes estadísticamente independientes (los momentos angulares de las diversas partes pequeñas del fluido), cuyos valores medios no son nulos.

Así pues, se obtiene la conclusión de que, en el caso de turbulencia isótropa, la constante de M implica la condición de que

$$\int \overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}\, r^2\, dV' = \text{constante}. \tag{38.3}$$

Esta es la *ley de Loytsianski.*†

El integrando (38.3) es notablemente diferente de cero en una región cuyas dimensiones son del orden de la escala l de la turbulencia (el volumen de la región $\sim l^3$), y allí es del orden de $v^2 l^2$. De aquí que tengamos a partir de (38.3)

$$v^2 l^5 = \text{constante}. \tag{38.4}$$

Utilizando esta relación podemos determinar el modo en que disminuye con el tiempo la turbulencia isótropa. Para ello estimemos la derivada temporal de la energía cinética de la unidad de volumen del fluido. Por una parte, puede escribirse que es del orden de $\rho v^2/t$. Además, debe ser igual a la energía disipada en el volumen unidad por unidad de tiempo. De acuerdo con la fórmula (31.1), $\rho\epsilon \sim \rho v^3/l$ (siendo aquí v la velocidad característica). Si son comparables las dos expresiones, tenemos

$$l \sim vt. \tag{38.5}$$

Sustituyendo (38.5) en (38.4), vemos que

$$v = \text{constante}\,/t^{5/7}. \tag{38.6}$$

Así pues, la velocidad en la turbulencia isótropa disminuye con el tiempo, de modo inversamente proporcional a $t^{5/7}$. Para el valor de l tenemos

$$l = \text{constante} \times t^{2/7}, \tag{38.7}$$

es decir, la escala o dimensión externa de la turbulencia aumenta proporcionalmente a $t^{2/7}$ (A. N. KOLMOGOROV, 1941).

† Recientemente se ha expresado más de una duda respecto a la aplicabilidad de la ley de conservación (38.3), teniendo en cuenta el comportamiento de la correlación de velocidades a distancias muy grandes; por ejemplo, si esta correlación no disminuye con suficiente rapidez, la integral (38.3) puede ser divergente. Todo el tema parece estar todavía poco claro.

De acuerdo con las fórmulas (38.6) y (38.7), el número de Reynolds $R \sim vl/\nu$ disminuye proporcionalmente a $t^{-3/7}$, y después de un tiempo suficiente resulta tan pequeño que empieza a ser importante la viscosidad. Se determina entonces la disipación de energía, por una parte, mediante la forma usual (16.3), que da

$$\epsilon = \tfrac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \sim \frac{\nu v^2}{l^2},$$

y, por otra parte, mediante $\epsilon \sim v^2/t$. Comparando, obtenemos

$$l \sim \sqrt{(\nu t)}, \tag{38.8}$$

y luego, a partir de (38.4), tenemos

$$v = \text{constante}/t^{5/4}. \tag{38.9}$$

Estas fórmulas, que se deben a M. D. MILLIONSHCHIKOV (1939), nos dan el modo en que disminuye la turbulencia isótropa en el período final, cuando resulta predominante el efecto de la viscosidad.

Se puede conseguir un flujo turbulento haciendo pasar una corriente a través de una rejilla que posee un número grande de aberturas regularmente espaciadas. Designemos mediante **U** la velocidad del flujo original (tomando el eje x en la dirección de **U**) y la verdadera velocidad por $\mathbf{U} + \mathbf{v}$, de modo que **v** es la velocidad del flujo turbulento que nos interesa. Si introducimos un sistema de referencia móvil con velocidad **U**, entonces respecto a este sistema el fluido realiza un flujo turbulento con velocidad **v**. Cuando nos alejamos de la rejilla el flujo turbulento promediado (con velocidad $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{v}}$) disminuye más rápidamente que el flujo fluctuante. Esto se debe a que el flujo promediado tiene una escala del orden de la dimensión a de las aberturas de las rejillas y éstas son pequeñas en comparación con la escala del flujo fluctuante. En consecuencia, a distancias x suficientemente grandes de la rejilla, la velocidad promediada **u** es casi cero y la velocidad turbulenta **v** coincide prácticamente con la velocidad fluctuante. A esta distancia la turbulencia puede considerarse como totalmente isótropa en regiones pequeñas en comparación con x (aunque no necesariamente pequeñas en comparación con la escala externa de la turbulencia). El tiempo de amortiguamiento de la turbulencia en el sistema móvil de referencia corresponde a un amortiguamiento al aumentar las distancias de las rejillas en el sistema estacionario original. El modo como se produce esta disminución viene dado por las fórmulas deducidas anteriormente, en las que únicamente necesitamos sustituir t por x/U. Recordando que a distancias de la rejilla del orden de a (dimensión de las aberturas), debemos tener $l \sim a$, podemos volver a escribir la fórmula (38.7) como $l \sim a(x/a)^{2/7}$. Para la velocidad tenemos, mediante (38.5), $v \sim lU/x$, de aquí que $v \sim U(a/x)^{5/7}$.

PROBLEMA

Utilizando la ecuación (33.17), obtener para la turbulencia isótropa la ley cuantitativa de amortiguamiento de las magnitudes $\overline{v_{r1}v_{r2}}$ en el período en el cual es importante la viscosidad (L. G. LOYTSIANSKI, M. D. MILLIONSHCHIKOV).

Solución. En este caso podemos despreciar el término B_{rrr} en (33.17), puesto que es de un orden superior en la velocidad (pequeña). Introduciendo la magnitud

$$b_{rr} \equiv \overline{v_{r1}v_{r2}} = \tfrac{1}{3}\overline{v^2} - \tfrac{1}{2}B_{rr}$$

[ver (33.16)], obtenemos para la misma la ecuación

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t} - \frac{2\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial b_{rr}}{\partial r}\right) = 0.$$

La solución de esta ecuación que tiene interés es

$$b_{rr} = \text{constante} \times e^{-r^2/8\nu t}/t^{5/2};$$

véase la solución análoga (51.6) de la ecuación de la conducción térmica. Esta expresión nos da la forma asintótica de la función b_{rr} para condiciones iniciales tales que b_{rr} es una función cualquiera que disminuye con suficiente rapidez al aumentar r [del mismo modo que (51.6) da la ley asintótica de propagación del calor que en el instante inicial se concentra en una pequeña región del espacio].

CAPÍTULO IV

CAPAS LÍMITES

§ 39. Capa límite laminar

Hemos mencionado ya varias veces el hecho de que números de Reynolds muy grandes son equivalentes a viscosidades muy pequeñas y, en consecuencia, un fluido puede considerarse como ideal si R es grande. Sin embargo, nunca puede utilizarse esta aproximación en el caso de que el flujo en cuestión se produzca cerca de unas paredes sólidas. Las condiciones límites, en el caso de un fluido ideal, exigen que únicamente se anule la componente de velocidad normal y, en general, sigue siendo finita la componente tangencial a la superficie. Sin embargo, en el caso de un fluido viscoso, la velocidad junto a la pared sólida debe anularse por completo.

A partir de esta consideración llegamos a la conclusión de que, en el caso de números de Reynolds grandes, la disminución de la velocidad hasta cero se produce casi exclusivamente en una capa delgada junto a la pared. Recibe el nombre de *capa límite* y está caracterizada, por tanto, por la presencia de unos gradientes de velocidad considerables. El flujo en la capa límite puede ser laminar o turbulento. En esta sección consideraremos las propiedades de la capa límite laminar. El límite de la capa no es, como es natural, nítido; la transición desde el flujo laminar en la capa a la corriente principal del fluido es continua.

La disminución rápida de la velocidad en la capa límite se debe, finalmente, a la viscosidad, que no puede despreciarse aunque R sea grande. Matemáticamente, esto se obtiene como consecuencia de que los gradientes de velocidad en la capa límite son grandes y, por tanto, los términos de viscosidad en las ecuaciones del movimiento, que contienen derivadas espaciales de la velocidad, son grandes, aunque ν sea pequeña. La teoría matemática de la capa límite se debe a L. Prandtl.

Deduzcamos las ecuaciones del movimiento del fluido en una capa límite laminar. Para mayor sencillez, consideremos un flujo bidimensional a lo largo de una porción plana de la superficie. Este plano se toma como plano xz, estando situado el eje x en la dirección del flujo. La distribución de velocidades es independiente de z y la velocidad carece de componente z.

Las ecuaciones exactas de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad son, entonces,

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \tag{39.1}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \tag{39.2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{39.3}$$

Se supone que el flujo es estacionario y, por tanto, se omiten las derivadas respecto al tiempo.

Como la capa límite es delgada, es evidente que el flujo en ella tiene lugar principalmente, de modo que resulta paralelo a la superficie, es decir, la velocidad v_y es pequeña en comparación con v_x (como se ve inmediatamente a partir de la ecuación de continuidad).

La velocidad varía rápidamente a lo largo del eje y, produciéndose una variación apreciable a distancias del orden del espesor δ de la capa límite. Por otra parte, a lo largo del eje x la velocidad varía lentamente, produciéndose una variación apreciable de la misma sólo a distancias del orden de la longitud l característica del problema (por ejemplo, la dimensión del cuerpo). De aquí que las derivadas de la velocidad respecto al eje y sean grandes en comparación con las derivadas respecto al eje x. Se deduce, pues, que en la ecuación (39.1) puede despreciarse la derivada $\partial^2 v_x/\partial x^2$ en comparación con $\partial^2 v_x/\partial y^2$; comparando (39.1) y (39.2) vemos que la derivada $\partial p/\partial y$ es pequeña en comparación con $\partial p/\partial x$ (siendo el cociente del mismo orden que v_y/v_x). En la aproximación considerada podemos poner simplemente

$$\partial p/\partial y = 0, \tag{39.4}$$

es decir, se supone que no existe ningún gradiente de presión transversal en la capa límite. En otras palabras, la presión en la capa límite es igual a la presión $p(x)$ de la corriente principal y suponemos que es una función determinada de x con objeto de poder resolver el problema de la capa límite. A continuación, podemos escribir en la ecuación (39.1) la derivada total $\mathrm{d}p(x)/\mathrm{d}x$ en lugar de $\partial p/\partial x$; la derivada anterior puede expresarse en función de la velocidad $U(x)$ de la corriente principal. Puesto que tenemos un flujo potencial fuera de la capa límite, sigue siendo válida la ecuación de Bernoulli, $p + 1/2\rho U^2 = \text{constante}$, de aquí que $(1/\rho)\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -U\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$.

Así pues, obtenemos las ecuaciones del movimiento en la capa límite laminar, en la forma

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=U\frac{dU}{dx},$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{39.5}$$

Puede verse fácilmente que estas ecuaciones, aunque deducidas para el flujo a lo largo de una pared plana, permanecen siendo válidas en el caso más general de cualquier flujo bidimensional (flujo transversal que rodea un cilindro de longitud infinita y sección recta arbitraria). En este caso, x es la distancia medida a lo largo de la circunferencia de la sección recta desde un punto determinado de la misma, e y es la distancia a la superficie.

Llamemos U_0 a una velocidad característica del problema (por ejemplo, la velocidad de la corriente principal en el infinito). En lugar de las coordenadas x, y y de las velocidades v_x, v_y, introduzcamos las variables adimensionales x', y', v'_x, v'_y:

$$x=lx', \qquad y=ly'/\sqrt{\mathrm{R}}, \qquad v_x=U_0v'_x, \qquad v_y=U_0v'_y/\sqrt{\mathrm{R}} \tag{39.6}$$

(y en correspondencia, $U=U_0U'$), en donde $\mathrm{R}=U_0l/\nu$. Entonces las ecuaciones (39.5) toman la forma

$$v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_y}{\partial y'}-\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}=U'\frac{dU'}{dx'},$$
$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=0. \tag{39.7}$$

En estas ecuaciones (y en las condiciones límites que hay que aplicar a las mismas) no interviene la viscosidad. Esto significa que sus soluciones son independientes del número de Reynolds. Así pues, se obtiene el importante resultado de que, cuando se varía el número de Reynolds, el esquema completo del flujo de la capa límite sufre simplemente una transformación de semejanza, permaneciendo invariable en las distancias y velocidades longitudinales, mientras que las distancias y velocidades transversales varían como $1/\sqrt{\mathrm{R}}$.

A continuación, podemos decir que las velocidades adimensionales v'_x, v'_y obtenidas al resolver las ecuaciones (39.7) deben ser del orden de la unidad, puesto que no dependen de R. Lo mismo es cierto cuando se trata del espe-

sor δ de la capa límite en función de las coordenadas x', y'. A partir de la forma (39.6) podemos, por tanto, obtener la conclusión de que

$$v_y \sim U_0/\sqrt{\mathrm{R}}, \tag{39.8}$$

es decir, el cociente entre las velocidades transversales y longitudinales es inversamente proporcional a $\sqrt{\mathrm{R}}$, y que

$$\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}, \tag{39.9}$$

es decir, el espesor de la capa límite disminuye al aumentar el número de Reynolds en la proporción $1/\sqrt{\mathrm{R}}$.

Apliquemos las ecuaciones correspondientes a la capa límite al caso del flujo plano paralelo a lo largo de una lámina plana. Supongamos que el plano de la placa coincide con el semiplano xz correspondiente a los valores de x positivos (de manera que $x = 0$ sea el borde de ataque de la placa). Supongamos también que la placa se extiende indefinidamente en el sentido de los valores de x positivos. La velocidad de la corriente principal en este caso es evidentemente constante (U = constante). Las ecuaciones (39.5) adquieren ahora la forma

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39.10}$$

Las condiciones límites en la superficie de la placa exigen que se anulen ambas componentes de la velocidad: $v_x = v_y = 0$ para $y = 0$, $x \geqslant 0$. Cuando nos alejamos de la placa, la velocidad debe tender asintóticamente a la velocidad U del flujo incidente, es decir, $v_x = U$ para $y \to \pm\infty$. En la solución de las ecuaciones de la capa límite, como hemos visto, v_x/U y $v_y\sqrt{(l/U\nu)}$ pueden ser funciones únicamente de $x' = x/l$ e $y' = y\sqrt{(U/l\nu)}$. Sin embargo, en el problema considerado, la placa tiene una extensión infinita y no existe, por tanto, ninguna longitud característica l. De aquí que v_x/U puede depender únicamente de una combinación de x' e y' en la que no intervenga l, por ejemplo, $y'/\sqrt{x'} = y\sqrt{(U/\nu x)}$. Análogamente, el producto $v'_y\sqrt{x'}$ debe ser una función de $y'/\sqrt{x'}$. Así pues, podemos buscar una solución de la forma

$$v_x = Uf[y\sqrt{(U/\nu x)}], \qquad v_y = \sqrt{(U\nu/x)}f_1[y\sqrt{(U/\nu x)}], \tag{39.11}$$

en donde f y f_1 son funciones adimensionales. Utilizando la segunda ecuación (39.10) podemos expresar f_1 en función de f. El problema se reduce así a la determinación de una sola función f de una única variable $\xi = y\sqrt{(U/\nu x)}$.†

En lo que sigue nos preocupará únicamente la distribución de la velocidad longitudinal v_x (puesto que v_y es pequeña). Podemos obtener una conclusión importante de la fórmula (39.11) sin determinar siquiera la función f.

† Se demuestra fácilmente que, si la función $\phi(\xi)$ cumple que $f(\xi) = \phi'(\xi)$, entonces $f_1(\xi) = (\xi\phi' - \phi)/2$, mientras que ϕ satisface la ecuación $\phi\phi'' + 2\phi''' = 0$, con las condiciones límites $\phi = \phi' = 0$ para $\xi = 0$, $\phi' = 1$ para $\xi = \infty$.

La velocidad v_x aumenta desde cero en la superficie de la placa hasta una fracción definida de U para un valor determinado del argumento de f, es decir, $y\sqrt{(U/\nu x)}$ = una constante dada cualquiera. Aquí podemos obtener la conclusión de que el espesor de la capa límite en el flujo a lo largo de una placa viene dado en orden de magnitud por

$$\delta \sim \sqrt{(\nu x/U)}. \tag{39.12}$$

Así pues, cuando nos alejamos del borde de la placa, δ aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia al borde.

Puede determinarse la función f mediante integración numérica. En la figura 19 se muestra un gráfico de dicha función. Vemos que f tiende muy rápidamente a su valor límite, que es la unidad.†

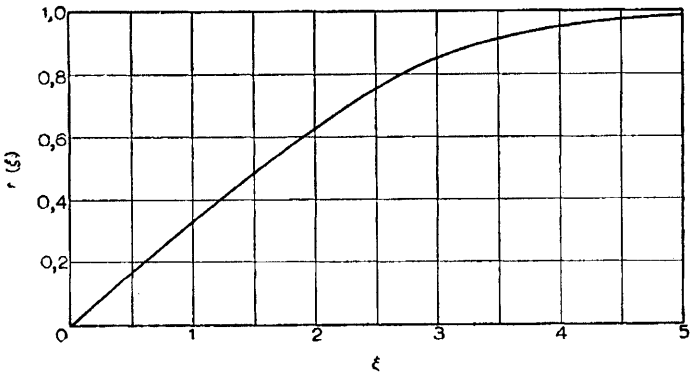

FIG. 19

La fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie de la placa es

$$\sigma_{xy} = \eta(\partial v_x/\partial y)_{y=0}.$$

Un cálculo numérico nos da

$$\sigma_{xy} = 0{,}332\sqrt{(\eta\rho U^3/x)}. \tag{39.13}$$

Si la placa tiene una longitud l (en la dirección x), entonces la fuerza de rozamiento total sobre ella por unidad de longitud en la dirección z es

$$F = 2\int_0^l \sigma_{xy}\,\mathrm{d}x.$$

† Se define el «espesor del desplazamiento» δ^*, utilizado, a veces, para caracterizar el espesor de la capa límite, como

$$\int_0^\infty (U - v_x)\mathrm{d}y = U\delta^*.$$

Es igual a 1,72 $\sqrt{(\nu x/U)}$.

El factor 2 se debe al hecho de que la placa tiene dos caras expuestas al fluido. Sustituyendo (39.13), tenemos

$$F = 1{,}328\sqrt{(\eta\rho l U^3)} \tag{39.14}$$

(H. BLASIUS, 1908). Podemos señalar que la fuerza de rozamiento es proporcional a la potencia 3/2 de la velocidad de la corriente principal. La fórmula (39.14) solamente puede aplicarse a placas bastantes largas, en las que el número de Reynolds Ul/ν es suficientemente grande. Suele expresarse la fuerza en función del *coeficiente de arrastre*, definido como el cociente adimensional

$$C = F/\tfrac{1}{2}\rho U^2 . 2l. \tag{39.15}$$

Según (39.14), esta magnitud, en el caso de un flujo laminar a lo largo de una placa, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de Reynolds:

$$C = 1{,}328/\sqrt{\mathrm{R}}. \tag{39.16}$$

Las fórmulas cuantitativas obtenidas anteriormente son válidas únicamente, como es natural, para el flujo a lo largo de una placa plana. Sin embargo, los resultados cualitativos, tales como (39.8) y (39.9), son válidos para el flujo que rodea a un cuerpo de una forma cualquiera. En dichos casos l es la dimensión del cuerpo en la dirección del flujo.

Podemos hacer una mención especial de dos casos de la capa límite. Si tenemos un disco plano de radio grande, girando en el fluido alrededor de un eje perpendicular a su plano, entonces para estimar el espesor de la capa límite debemos sustituir U en (39.12) por Ωx, siendo Ω la velocidad angular de rotación. Así se tiene

$$\delta \sim \sqrt{(\nu/\Omega)}. \tag{39.17}$$

Vemos que el espesor de la capa límite puede considerarse como una constante en toda la superficie del disco, de acuerdo con la solución exacta de este problema que se obtuvo en § 23. El valor de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el disco, obtenidas a partir de las ecuaciones de la capa límite, coinciden, como es natural, con (23.4), puesto que esta fórmula es exacta y, por tanto, es válida para el flujo laminar con cualquier valor de R.

Finalmente, consideremos la capa límite laminar formada en las paredes de una tubería cerca del punto de entrada del fluido. El fluido normalmente entra en un tubo con una distribución de velocidades que es casi constante en toda su sección recta y la velocidad disminuye hacia cero totalmente dentro de la capa límite. Cuando nos alejamos de la entrada a la tubería, las capas de fluido más próximas al eje se ven retardadas. Puesto que la masa del fluido que pasa por cada sección recta es la misma, la parte interna de la corriente en donde la velocidad es todavía uniforme, debe acelerarse cuando su diámetro se reduce. Esto continúa así hasta que se alcanza asintótica-

mente una distribución de velocidades de Poiseuille; esta distribución se encuentra así sólo a cierta distancia de la entrada de la tubería. Es fácil de determinar el orden de magnitud de la longitud l de la «sección de entrada». Viene dada por el hecho de que, a una distancia l de la entrada, el espesor de la capa límite es del mismo orden de magnitud que el radio de la tubería, de modo que la capa límite rellena casi por completo la sección recta de la misma. Haciendo en (39.12) $x \sim l$ y $\delta \sim a$, obtenemos

$$l \sim a^2U/\nu \sim a\mathrm{R}. \tag{39.18}$$

Así pues, la longitud de la sección de entrada es proporcional al número de Reynolds.†

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el espesor de la capa límite cerca de un punto de estancamiento (ver § 10).

Solución. Cerca del punto de estancamiento la velocidad del fluido (fuera de la capa límite) es proporcional a la distancia x a dicho punto, de modo que podemos poner $U = cx$. Estimando los valores de los términos de las ecuaciones (39.5) se encuentra que $\delta \sim \sqrt{(\nu/c)}$. Así pues, el espesor de la capa límite cerca del punto de estancamiento es finito (y en particular no se anula en el propio punto de estancamiento).

Problema 2. Determinar el flujo en la capa límite de un canal convergente entre dos planos no paralelos (K. POHLHAUSEN, 1921).

Solución. Considerando la capa límite a lo largo de uno de los planos, midamos la coordenada x a lo largo del mismo desde el punto O (figura 8, § 23). En el caso de un fluido ideal deberíamos tener la velocidad $U = Q/\alpha x\rho$; el gradiente de presiones correspondiente viene dado, según la ecuación de Bernoulli, por

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tfrac{1}{2}U^2) = \frac{Q^2}{\alpha^2x^3\rho^2}.$$

Es fácil ver que v_x y v_y deben tener la forma

$$v_x = (Q/\rho\alpha x)f(y/x), \qquad v_y = (Q/\rho\alpha x)f_1(y/x).$$

A partir de la ecuación de continuidad obtenemos $f_1 = (y/x)f$, y la primera ecuación (39.5) da entonces para la función f

$$(\rho\nu\alpha/Q)f'' = 1-f^2,$$

† No estudiaremos aquí la teoría de la capa límite en el caso de un fluido compresible, que resulta, naturalmente, mucho más complicada que la correspondiente a un fluido incompresible. Dicha teoría puede hallarse en N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 2, 3.ª ed., capítulo II, §§ 35, 36, Moscow, 1948; H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, London, 1955; L. HOWARTH, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, vol. 1, Oxford, 1953.

en donde el signo prima designa la derivación de f respecto a su argumento $\xi = y/x$. Las condiciones límites son $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$ [puesto que debemos tener $(v_x)_{y=0} = 0$, $(v_x)_{y=\infty} = Q/\rho\alpha x$). Una primera integral de la ecuación es

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2 = f - \tfrac{1}{3}f^3 + \text{constante}$$

Puesto que f tiende hacia la unidad cuando $y \to \infty$, vemos que f' tiende hacia un límite definido que únicamente puede ser cero. Determinando así la constante, se tiene

$$(\nu\alpha\rho/2Q)f'^2 = -\tfrac{1}{3}(f-1)^2(f+2).$$

Como el segundo miembro es siempre negativo para $0 \leq f \leq 1$, debemos tener $Q < 0$. Es decir, se forma una capa límite del tipo en cuestión únicamente mediante un flujo en un canal convergente (y sólo para números de Reynolds grandes $R = |Q|/\nu\rho$], y no en el caso de un flujo en un canal divergente de acuerdo con los resultados del § 23. Integrando una vez más, tenemos finalmente

$$f = 3 \text{ tg h}^2[\log(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \xi\sqrt{(R/2\alpha)}] - 2.$$

§ 40. Flujo cerca de la línea de separación

Al describir la línea de separación (§ 34) ya hemos mencionado que la posición real de esta línea en la superficie del cuerpo está determinada por las propiedades del flujo en la capa límite. Veremos a continuación que, desde un punto de vista matemático, la línea de separación es aquélla cuyos puntos son puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones del movimiento (de Prandtl) de las capas límites. El problema consiste en determinar las propiedades de estas soluciones cerca de dicha línea de singularidades.†

Ya sabemos que, desde la línea de separación, empieza una superficie que se extiende dentro del fluido y que marca la región de flujo turbulento. El flujo es rotacional en toda la región turbulenta, mientras que en ausencia de separación sería rotacional únicamente en la capa límite en donde es importante la viscosidad; la vorticidad debe ser cero en la corriente principal. De aquí que podamos decir que la separación hace que la vorticidad «penetre» desde la capa límite hacia el fluido. Sin embargo, por la conservación de la circulación, esta «penetración» puede producirse sólo mediante la mezcla directa del fluido que se mueve cerca de la superficie (en la capa límite) con la corriente principal. En otras palabras, el flujo en la capa límite debe separarse de la superficie del cuerpo, y, en consecuencia, las líneas de corriente abandonan la capa superficial y entran en el interior del fluido. Por ello, este fenómeno se denomina *separación*, o bien *separación de la capa límite.*

Las ecuaciones del movimiento en la capa límite conducen, como hemos visto, al resultado de que la componente de velocidad tangencial (v_x) en la capa límite es grande en comparación con la componente (v_y) normal a la

† El enfoque dado aquí al problema se debe a L. D. LANDAU, y es algo diferente al que se encuentra normalmente.

superficie del cuerpo. Esta relación entre v_x y v_y se deduce de nuestras hipótesis básicas que consideran la naturaleza del flujo en la capa límite y deben aparecer necesariamente siempre que las ecuaciones de Prandtl tengan soluciones con significado físico. Matemáticamente esta relación se verifica ciertamente en todos los puntos no situados en la proximidad inmediata de los puntos singulares. Pero si $v_y \ll v_x$ se deduce que el fluido se mueve a lo largo de la superficie del cuerpo y se aleja de dicha superficie sólo muy ligeramente, de modo que no puede existir separación. Por tanto, se llega a la conclusión de que la separación solamente puede producirse en una línea cuyos puntos sean singularidades de la solución de las ecuaciones de Prandtl.

También se deduce inmediatamente la naturaleza de estas singularidades. En efecto, cuando nos acercamos a la línea de separación, el flujo se desvía de la capa límite hacia el interior del fluido. En otras palabras, la componente de velocidad normal deja de ser pequeña en comparación con la componente tangencial y es ahora del mismo orden de magnitud como mínimo. Hemos visto [ver (39.8)] que el cociente v_y/v_x es del orden de $1/\sqrt{R}$, de modo que un aumento de v_y hasta el punto en donde $v_y \sim v_x$ significa un aumento en un factor de $\sqrt{R}$. De aquí que, en el caso de números de Reynolds suficientemente grandes (que son los que estamos considerando, como es natural), podemos suponer que v_y aumenta en un factor infinito. Si utilizamos la ecuación de Prandtl en forma adimensional [ver (39.7)], la situación que acabamos de describir es formalmente equivalente a un valor infinito de la velocidad adimensional v'_y sobre la línea de separación.

Con objeto de simplificar un poco el estudio siguiente, consideraremos el problema bidimensional del flujo transversal que rodea un cuerpo de longitud infinita. Como es normal, x es la coordenada a lo largo de la superficie en la dirección del flujo, mientras que y es la distancia desde la superficie del cuerpo. En lugar de una línea de separación, tenemos ahora un punto de separación, a saber, la intersección de la línea de separación con el plano xy; en las coordenadas utilizadas, este es el punto $x = \text{constante} \equiv x_0$; $y = 0$. Supongamos que es $x < x_0$ la región anterior al punto de separación.

De acuerdo con los resultados anteriores, tenemos que para todo† valor de y

$$v_y(x_0, y) = \infty. \tag{40.1}$$

Sin embargo, en las ecuaciones de Prandtl, v_y es un cierto tipo de parámetro que carece normalmente de interés (teniendo en cuenta su pequeñez) al estudiar el flujo en la capa límite. De aquí que sea necesario discernir las propiedades de la función v_y cerca de la línea de separación.

† Excepto $y = 0$, donde debemos tener siempre $v_y = 0$ de acuerdo con las condiciones límites en la superficie del cuerpo.

Es evidente, según (40.1), que para $x = x_0$, la derivada $\partial v_y/\partial y$ también resulte infinita. A partir de la ecuación de continuidad, $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$, se deduce entonces que $(\partial v_x/\partial x)_{x=x_0}$ es infinita, o sea, $\partial x/\partial v_x = 0$, considerándose a x como una función de v_x e y. Designemos por $v_0(y)$ el valor de la función $v_x(x, y)$ para $x = x_0$: $v_0(y) = v_x(x_0, y)$. Cerca del punto de separación, las diferencias $v_x - v_0$ y $x_0 - x$ son pequeñas y podemos desarrollar $x_0 - x$ en potencias de $v_x - v_0$ (para un valor de y dado). Puesto que $(\partial x/\partial v_x)_{v=v_0} = 0$, deben anularse idénticamente los términos de primer orden de este desarrollo, y tenemos (limitándonos a los términos de segundo orden) $x_0 - x = f(y)(v_x - v_0)^2$, o sea,

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{(x_0 - x)}, \tag{40.2}$$

en donde $\alpha = 1/\sqrt{f}$ es una función determinada de y únicamente. Poniendo ahora

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{(x_0 - x)}}$$

e integrando, tenemos para v_y

$$v_y = \beta(y)/\sqrt{(x_0 - x)}, \tag{40.3}$$

en donde

$$\beta(y) = \tfrac{1}{2}\int \alpha(y)\,dy$$

es otra función de y.

A continuación, utilicemos la primera ecuación (39.5):

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40.4}$$

La derivada $\partial^2 v_x/\partial y^2$ no se hace infinito para $x = x_0$, como se ve en (40.2). Lo mismo es cierto para dp/dx, que queda determinada por el flujo fuera de la capa límite. Sin embargo, los dos términos en el primer miembro de la ecuación (40.4) resultan infinitos. Por tanto, podemos escribir en primera aproximación para la región próxima al punto de separación $v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y = 0$. Sustituyendo $\partial v_x/\partial x = -\partial v_y/\partial y$, podemos volver a escribir esta expresión en la forma

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = 0.$$

Como, en general, la velocidad v_x no se anula para $x = x_0$, se deduce que $\partial(v_y/v_x)/\partial y = 0$, es decir, el cociente v_y/v_x es independiente de y. A partir de (40.2) y (40.3), tenemos, deteniéndonos en los términos de orden superior,

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{(x_0 - x)}}.$$

Si esta expresión es una función exclusiva de x debemos tener $\beta(y) = Av_0(y)/2$, siendo A una constante numérica. Así pues,

$$v_y = \frac{Av_0(y)}{2\sqrt{(x_0 - x)}}. \tag{40.5}$$

Finalmente, observando que α y β obedecen tanto en (40.2) como en (40.3) la relación $\alpha = 2\beta'$, se obtiene $\alpha = A\,dv_0/dy$, de modo que

$$v_x = v_0(y) + A(dv_0/dy)\sqrt{(x_0 - x)}. \tag{40.6}$$

Las fórmulas (40.5) y (40.6) determinan v_x y v_y como funciones de x cerca del punto de separación. Vemos que cada una de ellas puede desarrollarse en esta región en potencias de $\sqrt{(x_0 - x)}$, empezando el desarrollo de v_y con la potencia -1, de modo que v_y resulta infinito, del mismo modo que lo es $(x_0 - x)^{-1/2}$ para $x \to x_0$. Para $x > x_0$, es decir, más allá del punto de separación, carecen de significado los desarrollos (40.5) y (40.6), puesto que las raíces cuadradas resultan imaginarias; esto significa que las soluciones de las ecuaciones de Prandtl, que dan el flujo hasta el punto de separación, no pueden continuarse más allá de dicho punto.

A partir de las condiciones límites en la superficie del cuerpo, debemos siempre tener $v_x = v_y = 0$ para $y = 0$. Por tanto, de (40.5) y (40.6) se obtiene la conclusión

$$v_0(0) = 0, \qquad (dv_0/dy)_{y=0} = 0. \tag{40.7}$$

Así pues, se obtiene el resultado importante (debido a Prandtl) de que, en el propio punto de separación ($x = x_0$, $y = 0$), no sólo la velocidad v_x, sino también su primera derivada respecto a y son nulas.

Debe resaltarse que la ecuación $\partial v_x/\partial y = 0$ en la línea de separación es válida sólo cuando v_y se hace infinita para dicho valor de x. Si resulta que es cero la constante A en (40.5), de modo que $v_y(x_0, y) \neq \infty$, entonces el punto $x = x_0$, $y = 0$ en el cual se anula la derivada $\partial v_x/\partial y$ no tiene ninguna propiedad particular y no sería un punto de separación. Sin embargo, el que A llegue a anularse es una cuestión puramente fortuita y dicho suceso es totalmente improbable. En la práctica un punto en la superficie del cuerpo en el cual $\partial v_x/\partial y = 0$ es siempre un punto de separación.

Si no existe separación en el punto $x = x_0$ (es decir, si $A = 0$), entonces para $x > x_0$ tenemos $(\partial v_x/\partial y)_{y=0} < 0$, es decir, v_x resulta negativa (con módulo creciente) cuando nos alejamos de la superficie, siendo todavía pequeño y. Es decir, el fluido más allá del punto $x = x_0$ se mueve, en las partes inferiores de la capa límite, en sentido opuesto al de la corriente principal; existe «flujo de retorno» del fluido en este punto. Debe observarse que a partir de estos razonamientos no podemos obtener la conclusión de que exista necesariamente un punto de separación en donde $\partial v_x/\partial y = 0$; todo el esquema del flujo completo con el «flujo de retorno» puede estar compren-

dido (como sucede para $A = 0$) dentro de la capa límite y no entrar en la corriente principal, mientras que la característica de la separación es que el flujo entra en la corriente principal del fluido.

En la sección anterior se ha visto que el esquema de flujo en la capa límite es semejante para números de Reynolds diferentes y, en particular, permanece sin variar la escala en la dirección x. Se deduce de ello que el valor x_0 de la coordenada x para la cual es cero, la derivada $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$ es la misma para todo R. Así pues, tenemos el resultado importante de que la posición del punto de separación en la superficie del cuerpo es independiente del número de Reynolds (en tanto que la capa límite permanece laminar, como es natural; ver § 45).

Expongamos ahora también las propiedades de la distribución de presiones $p(x)$ cerca del punto de separación. Para $y = 0$ el primer miembro de la ecuación (40.4) es nulo junto con v_x y v_y, quedando

$$\nu(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0} = (1/\rho)\mathrm{d}p/\mathrm{d}x. \tag{40.8}$$

Resulta claro a partir de esta expresión que el signo de $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ es el mismo que el de $(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0}$. Cuando $(\partial v_x/\partial y)_{y=0} > 0$, no podemos decir nada respecto al signo de la segunda derivada. Sin embargo, puesto que v_x es positiva y aumenta alejándose de la pared (por delante del punto de separación), podemos tener siempre $(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0} > 0$ para el propio punto $x = x_0$, en donde $\partial v_x/\partial y = 0$. De aquí, se llega a la conclusión de que

$$(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)_{x=x_0} > 0, \tag{40.9}$$

es decir, el fluido cerca del punto de separación se mueve desde la región de presión menor hacia la región de presión mayor. El gradiente de presiones está relacionado con el gradiente de velocidades $U(x)$ fuera de la capa límite por la expresión $(1/\rho)\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -U\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$. Como el sentido positivo del eje es el mismo que el de la corriente principal, $U > 0$, y, por tanto,

$$(\mathrm{d}U/\mathrm{d}x)_{x=x_0} < 0, \tag{40.10}$$

es decir, la velocidad U disminuye en el sentido del flujo cerca del punto de separación.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente podemos deducir que debe existir una separación en alguna parte de la superficie del cuerpo. En efecto, existe tanto en la parte delantera como en la trasera del cuerpo un punto (punto de estancamiento) en el cual la velocidad del fluido es cero para el caso de un flujo potencial de fluido ideal. En consecuencia, para un cierto valor de x, la velocidad $U(x)$ debe empezar a disminuir y, finalmente, resulta cero. Sin embargo, es claro que el fluido que se mueve sobre la superficie del cuerpo se retarda más fuertemente cuanto más próximo está de la superficie (es decir, cuanto más pequeño sea y). De aquí que, antes de que la velocidad $U(x)$ sea cero en el límite exterior de la capa límite, la velo-

cidad en la proximidad inmediata de la superficie debe ser nula. Matemáticamente, esto significa evidentemente que la derivada $\partial v_x/\partial y$ debe siempre anularse (y, por tanto, debe existir la separación) para un valor x menor que el valor para el cual $U(x) = 0$.

Puede llevarse a cabo el cálculo correspondiente al flujo que rodea al cuerpo de una forma cualquiera de un modo totalmente semejante, y así se llega al resultado de que las derivadas $\partial v_x/\partial y$, $\partial v_z/\partial y$ de las dos componentes de velocidad v_x y v_z tangenciales a la superficie del cuerpo se anulan en la línea de separación (el eje y, como antes, está dirigido a lo largo de la normal a la parte de superficie considerada).

Podemos dar un razonamiento sencillo que demuestra la necesidad de separación en los casos en que el fluido tendría en otro caso un aumento rápido de presión (y, por tanto, una disminución rápida de la velocidad U) en el sentido de su flujo alrededor del cuerpo. En una distancia pequeña $\Delta x = x_2 - x_1$, supongamos que la presión p aumenta rápidamente desde p_1 hasta p_2 ($p_2 \gg p_1$). En la misma distancia Δx, la velocidad del fluido U fuera de la capa límite disminuye desde su valor inicial U_1 hasta un valor considerablemente más pequeño U_2 determinado por la ecuación de Bernoulli:

$$\tfrac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) = (p_2 - p_1)/\rho.$$

Como p es independiente de y, el incremento de presión $p_2 - p_1$ es el mismo a cualquier distancia de la superficie. Si el gradiente de presión $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \sim (p_2 - p_1)/\Delta x$ es suficientemente elevado, el término $\nu\partial^2 v_x/\partial y^2$, en el que interviene la viscosidad, puede omitirse de la ecuación del movimiento (40.4) (si, como es natural, y no es pequeño). Entonces, para estimar la variación de la velocidad v en la capa límite podemos utilizar la ecuación de Bernoulli, poniendo $(v_2^2 - v_1^2)/2 = -(p_2 - p_1)/\rho$, o bien, a partir de la ecuación previamente obtenida, $v_2^2 = v_1^2 - (U_1^2 - U_2^2)$. La velocidad v_1 en la capa límite es menor que la correspondiente a la corriente principal y podemos seleccionar un valor de y para el cual $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. La velocidad v_2 es entonces imaginaria, demostrando que las ecuaciones de Prandtl carecen de soluciones con significado físico. De hecho, debe existir separación a la distancia Δx, como resultado de la cual se reduce el gradiente de presiones.

Un caso interesante de aparición de la separación viene dado por el flujo en un ángulo formado por dos superficies que se cortan. En el caso de un flujo potencial laminar exterior a un ángulo (figura 3), la velocidad del fluido en el vértice del ángulo resultaría infinita (ver § 10, problema 6), aumentando cuando la corriente se aproxima al vértice y disminuyendo en la corriente que sale del vértice. En realidad, la disminución rápida de velocidad (y el aumento correspondiente de presión) más allá del vértice conduciría a la separación, siendo la línea de separación aquélla en la cual se cortan las superficies. El esquema del flujo resultante es el estudiado en § 35.

En el flujo laminar en el interior de un ángulo (figura 4) la velocidad del fluido es cero en el vértice. En este caso la velocidad disminuye (y la presión aumenta) en el flujo cuando se acerca al vértice. El resultado es que, en general, aparece una separación, estando la línea de separación corriente arriba respecto al vértice del ángulo.

PROBLEMA

Determinar el mínimo aumento posible Δp de presión que puede producirse (en la corriente principal) en una distancia Δx y producir separación.

Solución. Sea y la distancia desde la superficie del cuerpo en la cual en primer lugar puede aplicarse la ecuación de Bernoulli y en segundo lugar es menor la velocidad al cuadrado $v^2(y)$ en la capa límite que la variación $|\Delta U^2|$ de la velocidad al cuadrado fuera de dicha capa. Para $v(y)$ podemos escribir, en órdenes de magnitud, $v(y) \approx y\, dv/dy \sim Uy/\delta$, en donde $\delta \sim \sqrt{(\nu l/U)}$ es la anchura de la capa límite y l la dimensión del cuerpo. Igualando, en orden de magnitud, los dos términos en el segundo miembro de la ecuación (40.4), tenemos

$$(1/\rho)\Delta p/\Delta x \sim \nu v(y)/y^2 \sim \nu U/\delta y.$$

A partir de la condición

$$v^2 = |\Delta U^2| = (2/\rho)\Delta p \text{ tenemos } U^2y^2/\delta^2 \sim \Delta p/\rho.$$

Eliminando y, finalmente obtenemos

$$\Delta p \sim \rho U^2(\Delta x/l)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 41. Estabilidad del flujo en una capa límite laminar

El flujo laminar en la capa límite, como cualquier otro flujo laminar, se hace inestable en cierta extensión para valores de los números de Reynolds suficientemente grandes. El modo de perderse la estabilidad en la capa límite es semejante a lo que ocurre cuando estudiamos el flujo en una tubería (§ 29).

El número de Reynolds en el caso del flujo en la capa laminar varía a lo largo de la superficie del cuerpo. Por ejemplo, en el flujo sobre una placa podemos definir el número de Reynolds como $R_x = Ux/\nu$, siendo x la distancia desde el borde de ataque de la placa y U la velocidad del fluido fuera de la capa límite. Una definición más adecuada para la capa límite es, sin embargo, aquélla en la que el parámetro de longitud caracteriza directamente el espesor de la capa; por ejemplo, tal es el «espesor de desplazamiento» δ^* (ver la segunda nota a pie de página en § 39). Entonces tenemos $R_{\delta^*} = U\delta^*/\nu$. Puesto que la relación entre el espesor de la capa límite y la distancia x viene dada por la fórmula (39.12), es claro que $R_{\delta^*} \sim \sqrt{R_x}$.†

† Por ejemplo, en una capa límite laminar sobre una placa plana $R_{\delta^*} = 1{,}72\sqrt{R_x}$.

Como la variación del espesor de la capa con la distancia es comparativamente lenta, podemos despreciarla al estudiar la estabilidad del flujo en una parte pequeña de la capa y considerar un flujo bidimensional rectilíneo con un perfil de velocidades que no varíe a lo largo del eje x.† Entonces, desde un punto de vista matemático, el problema es totalmente análogo al de la estabilidad del flujo entre dos planos paralelos estudiado en § 29. La única diferencia radica en la forma del perfil de velocidades; en lugar de un perfil simétrico con $v = 0$ en ambas caras, tenemos ahora un perfil asimétrico en el que la velocidad varía desde cero en la superficie del cuerpo hasta un valor determinado U, que es la velocidad del flujo fuera de la capa límite. El estudio realizado conduce a los resultados siguientes (LIN, 1945; ver C. C. LIN, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955).

La forma de la curva límite de la estabilidad en el plano ωR (ver § 29) depende de la forma del perfil de velocidades en la capa límite. Si el perfil de velocidades no tiene ningún punto de inflexión y la velocidad v_x aumenta monótonamente con la curva $v_x = v_x(y)$ en todas las partes en que sea convexa hacia arriba (figura 20*a*), entonces el límite de la región estable es completamente semejante en cuanto a su forma al que se obtiene en el caso de un flujo en una tubería: existe un valor mínimo $R = R_{cr}$, en el cual aparecerán primero perturbaciones amplificadas, y para $R \to \infty$, ambas ramas de la curva son asintóticas al eje de abscisas (figura 21*a*). En el caso del perfil de velocidades que se produce en la capa límite de una placa plana, el número de Reynolds crítico se encuentra mediante el cálculo y resulta ser $R_{\delta^*,cr} \approx 420$.‡

No puede presentarse un perfil de velocidades del tipo incidado en la figura 20*a* si la velocidad del fluido, fuera de la capa límite, disminuye corriente abajo. En este caso, el perfil de velocidades debe tener un punto de inflexión. En efecto, consideremos una pequeña parte de la superficie que consideraremos plana, y supongamos de nuevo que x es la coordenada en el sentido del flujo e y la distancia a la pared. A partir de (40.8) tenemos

$$\nu(\partial^2 v_x/\partial y^2)_{y=0} = (1/\rho)\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -U\,\partial U/\partial x.$$

Aquí vemos que, si U disminuye aguas abajo ($\partial U/\partial x < 0$), debemos tener $\partial^2 v_x/\partial y^2 > 0$ cerca de la superficie, es decir, la curva $v_x = v_x(y)$ es cóncava hacia arriba. Cuando y aumenta, la velocidad v_x debe tender asintóticamente hacia el límite finito U. Resulta entonces evidente, a partir de consideraciones geométricas, que la curva debe hacerse convexa hacia arriba y, por tanto,

† Al considerarlo así, soslayamos, como es natural, la cuestión de la influencia que pueda tener la curvatura de la superficie sobre la estabilidad de la capa límite.

‡ Cuando $R_{\delta^*} \to \infty$, ω tiende a cero sobre las dos ramas I y II de la curva límite, como $R_{\delta^*}{}^{-1/2}$ y $R_{\delta^*}{}^{-1/5}$, respectivamente.

debe tener un punto de inflexión (figura 20*b*). En este caso la forma de la curva que define la región estable se modifica ligeramente: las dos ramas tienen asíntotas diferentes para $R \to \infty$, una tendiendo hacia el eje de las abscisas y la otra hacia un valor finito no nulo de ω (figura 21*b*). La presencia de un punto de inflexión reduce también considerablemente el valor de R_{cr}.

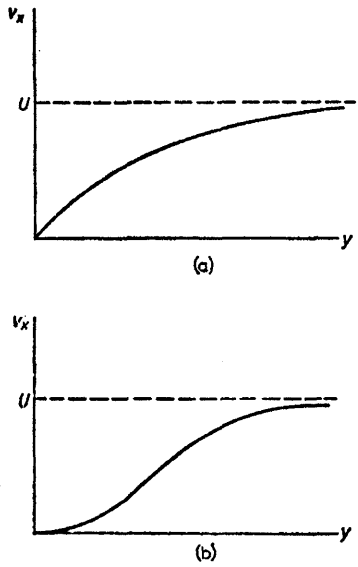

FIG. 20

El hecho de que el número de Reynolds aumente a lo largo de la capa límite, hace que sea poco usual el comportamiento de las perturbaciones cuando se ven trasladadas corriente abajo. Consideremos el flujo a lo largo de una placa plana y supongamos que se produce una perturbación con una frecuencia dada ω en un punto determinado de la capa límite. Su propagación corriente abajo corresponde a un movimiento de la figura 21*a* hacia la derecha a lo largo de una línea horizontal de ω = constante. La perturbación al principio está amortiguada: luego, al alcanzar la rama I de la curva de estabilidad, empieza a amplificarse. Esta amplificación continúa hasta que se alcanza la rama II, en donde la perturbación se amortigua de nuevo. El «coeficiente de amplificación» total para la perturbación durante su paso a través de la región de inestabilidad aumenta muy rápidamente cuando esta región se mueve hacia los valores grandes de R (es decir, cuando el segmento horizontal correspondiente entre las ramas I y II se mueve hacia abajo).

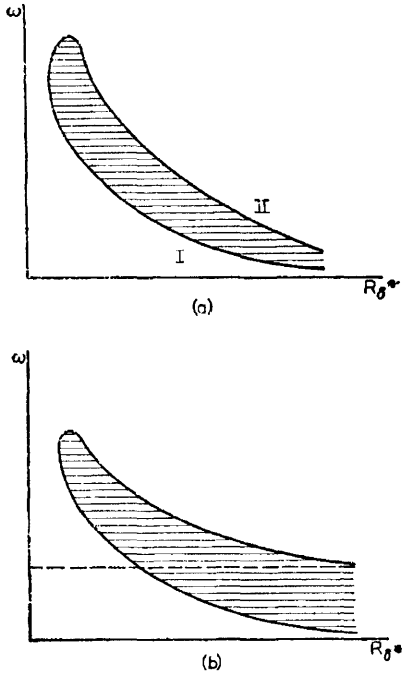

FIG. 21

Sin embargo, estos resultados no contestan a la pregunta de si es cierto que se produce la inestabilidad absoluta en la capa límite laminar para valores de R suficientemente grandes —es decir, aquella inestabilidad debida a la amplificación en el tiempo de las perturbaciones en un punto dado (ver § 29). Lo mismo que sucede en el flujo en una tubería, dicho estudio todavía no se ha realizado.

Los resultados experimentales correspondientes al flujo a lo largo de una placa plana muestran que el punto en donde aparece la turbulencia en la capa límite† depende, en una considerable extensión, de la intensidad de las perturbaciones que existen en la corriente principal. En el caso de perturbaciones notables, se observó que la capa límite se hacía turbulenta para $R_{\delta^*} \approx 560$. Cuando disminuye la intensidad de las perturbaciones, se pospone el inicio de la turbulencia a valores más elevados de R_{δ^*} que parecen tender hacia un límite finito de 3000 aproximadamente.

† Como el número de Reynolds varía a lo largo de la placa, no se transforma en turbulenta inmediatamente toda la capa límite, sino sólo aquella parte en que R_{δ^*} supera un determinado valor. Para una velocidad incidente determinada, esto significa que la turbulencia empieza a una distancia definida del borde de ataque; cuando la velocidad aumenta, esta distancia tiende a cero.

Es posible que la existencia de este límite indique la presencia de una inestabilidad absoluta verdadera para valores suficientemente elevados de R. Por otra parte, puede ser que, debido al aumento extremadamente rápido del «coeficiente de amplificación» respecto a R, la inestabilidad «del desplazamiento» del tipo descrito anteriormente puede tener la apariencia de una inestabilidad verdadera.

§ 42. Perfil logarítmico de velocidades

Consideremos el flujo turbulento plano paralelo a lo largo de una superficie plana ilimitada; se aplica, como es natural, el término «plano paralelo» al promedio temporal del flujo.† Tomemos el sentido del flujo como eje x y el plano de la superficie como plano xz, de modo que y sea la distancia a la superficie. Las componentes y y z de la velocidad media son cero: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. No existe ningún gradiente de presiones y todas las magnitudes dependen únicamente de y.

Designemos mediante σ la fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie; esta fuerza está claramente en la dirección del eje x. La magnitud σ coincide con el impulso transmitido por el fluido a la superficie por unidad de tiempo; es el flujo constante de la componente x del impulso que tiene el sentido negativo del eje de las y y da la cantidad de impulso transmitido desde las capas de fluido más alejadas de la superficie a aquéllas que están más próximas a la misma.

Se debe la existencia de este flujo del impulso, como es natural, a la presencia de un gradiente en la dirección y de la velocidad media u. Si el fluido se moviese con la misma velocidad en todos los puntos no habría ningún flujo del impulso. También puede enunciarse el problema inverso: dado un valor definido determinado de σ, ¿cuál debe ser el movimiento de un fluido de densidad dada ρ para que dé origen a un flujo del impulso σ? En el caso de números de Reynolds grandes, la viscosidad ν carece de importancia, como es normal; resulta importante únicamente para distancias y pequeñas (ver a continuación). Así pues, el valor del gradiente de velocidades du/dy en todos los puntos debe estar determinado por los parámetros constantes ρ, σ y, como es lógico, la propia distancia y. Las dimensiones de estas magnitudes son, respectivamente, g/cm^3, g/cm s^2 y cm. Las dimensiones de la derivada du/dy son 1/s. La única combinación de ρ, σ e y que tiene las dimensiones correctas es $\sqrt{(\sigma/\rho y^2)}$. De aquí resulta

$$du/dy = \sqrt{(\sigma/\rho)/by}, \tag{42.1}$$

† Los resultados que se citan en §§ 42-44 se deben a T. von Kármán y L. Prandtl.

siendo b una constante numérica; b no puede calcularse teóricamente, sino que debe determinarse experimentalmente. Resulta valer †

$$b = 0{,}417. \tag{42.2}$$

Introduzcamos la notación más conveniente $v_* = \sqrt{(\sigma/\rho)}$, de modo que

$$\sigma = \rho v_*^2. \tag{42.3}$$

La magnitud v_* tiene las dimensiones cm/s y actúa como una velocidad característica para el flujo turbulento que se considera; entonces (42.1) se transforma en $du/dy = v_*/by$, de donde

$$u = (v_*/b)(\log y + c), \tag{42.4}$$

en donde c es una constante de integración. Para determinar esta constante no podemos utilizar las condiciones límites ordinarias en la superficie, puesto que para $y = 0$ el primer término de (42.4) se hace infinito. La razón de ello es que la expresión anterior es realmente inaplicable a distancias muy pequeñas de la superficie, puesto que el efecto de la viscosidad resulta entonces importante y no puede despreciarse. Tampoco existen condiciones en el infinito, puesto que para $y = \infty$ la expresión (42.4) se hace otra vez infinita. Esto se debe a que en las condiciones ideales que hemos impuesto la superficie resulta sin límite y su influencia se extiende, por tanto, a distancias infinitamente grandes.

Antes de determinar la constante c, podemos en primer lugar señalar la propiedad importante siguiente del flujo considerado: contrariamente a lo que suele suceder, no existe ningún parámetro constante característico de longitud que pueda dar la escala externa de turbulencia. Por consiguiente, esta escala se determina mediante la propia distancia y: la escala del flujo turbulento a una distancia y de la superficie es del orden de y. La velocidad fluctuante de la turbulencia es del orden de v_*. Esto también se deduce a partir de razonamientos dimensionales, puesto que v_* es la única magnitud que tiene las dimensiones de la velocidad y que puede formarse a partir de las magnitudes σ, ρ e y a nuestra disposición. Debe resaltarse que, mientras la velocidad media disminuye con y, la velocidad fluctuante permanece con el mismo orden de magnitud a toda distancia de la superficie. Este resultado está de acuerdo con la regla general de que el orden de magnitud de la velocidad fluctuante está determinado por la variación Δu de la velocidad media (§ 31). En el caso presente no existe ninguna longitud característica respecto a la cual pueda tomarse la variación de la velocidad media; Δu debe definirse ahora razonablemente como la variación de u cuando se modifica apreciablemente la distancia y. De acuerdo con (42.4) tal variación de y produce un cambio de la velocidad u que es precisamente del orden de v_*.

† El valor de esta constante y el de la fórmula (42.8) se obtienen a partir de mediciones de la distribución de velocidades cerca de las paredes de una tubería en la que existe un flujo turbulento.

A distancias suficientemente pequeñas de la superficie, la viscosidad del fluido empieza a ser importante; designemos el orden de magnitud de estas distancias por y_0, que puede determinarse del modo siguiente. La escala de turbulencia a esta distancia es del orden de y_0 y la velocidad es del orden de v_*. De aquí que el número de Reynolds que caracteriza el flujo a distancias del orden de y_0 sea $R \sim v_* y_0/\nu$. La viscosidad empieza a ser importante cuando R se hace del orden de la unidad. De aquí encontramos que

$$y_0 \sim \nu/v_*, \tag{42.5}$$

y esto determina y_0.

A distancias de la superficie que sean pequeñas en comparación con y_0, el flujo está determinado por el rozamiento viscoso ordinario. Ahora puede obtenerse directamente la distribución de velocidades a partir de la forma usual correspondiente al rozamiento viscoso: $\sigma = \rho\nu\, du/dy$, de donde

$$u = \sigma y/\rho\nu = v_*^2 y/\nu. \tag{42.6}$$

Así pues, inmediatamente junto a la pared existe una capa delgada de fluido donde la velocidad media varía linealmente con y; la velocidad es pequeña en toda esta capa, variando desde cero en la propia superficie hasta valores del orden de v_* para $y \sim y_0$. Denominaremos a esta capa la *subcapa viscosa*.

Debe resaltarse que el flujo considerado es turbulento y en este contexto el nombre acostumbrado «subcapa laminar» es inadecuado. El parecido con el flujo laminar reside únicamente en el hecho de que la velocidad media se distribuye de acuerdo con la misma ley que la velocidad verdadera en el caso de flujo laminar bajo las mismas condiciones. Como es natural, no existe ningún límite nítido entre la subcapa viscosa y el resto del flujo y, por tanto, el concepto de subcapa viscosa es, en cierta extensión, sólo cualitativo.

La componente longitudinal v'_x de la velocidad fluctuante en la subcapa viscosa es del mismo orden de magnitud que la velocidad media, y en particular es proporcional a $y\,(\sim v_* y/y_0)$. Por consiguiente, se deduce de la ecuación de continuidad que la derivada $\partial v'_y/\partial y = -\partial v'_x/\partial x$ es proporcional a y, y por la misma razón la componente transversal v'_y de la velocidad fluctuante varía como $y^2\,(\sim v_* y^2/y_0^2)$. A continuación, se deduce a partir de la linealidad de las ecuaciones del movimiento en la subcapa viscosa (siendo pequeños los términos no lineales en comparación con los términos de viscosidad) que los períodos de los remolinos turbulentos son los mismos a través de todo el espesor de la subcapa. Multiplicando estos períodos por la velocidad fluctuante, encontramos que las distancias longitudinales recorridas por las partículas del fluido en su movimiento fluctuante son proporcionales a y en orden de magnitud y que las distancias transversales son proporcionales a $y^2\,(\sim y^2/y_0)$.

En lo que sigue prescindiremos del estudio del flujo dentro de la subcapa viscosa. Su presencia ha de tenerse en cuenta únicamente al hacer la selección apropiada de la constante de integración en (42.4). Debe escogerse esta constante de modo que la velocidad resulte del orden de v_* a distancias del orden de y_0. Para que sea así debemos hacer $c = -\log y_0$, de modo que $u = (v_*/b)\log(y/y_0)$, o sea,

$$u = (v_*/b)\log(yv_*/\nu). \tag{42.7}$$

Esta fórmula determina (para un cierto margen de valores de y) la distribución de velocidades en la corriente turbulenta que fluye a lo largo de la superficie. Esta distribución se conoce como *perfil logarítmico de velocidades.*

El argumento del logaritmo de la fórmula (42.7) debe incluir un coeficiente numérico. Sin embargo, en las fórmulas que deduciremos solamente se necesita una exactitud «logarítmica». Esto significa que el argumento del logaritmo se supone grande y despreciaremos no sólo los términos proporcionales a las potencias inferiores del argumento, sino también aquellos en los que aparece el logaritmo elevado a potencias inferiores que en el término principal. Introducir un coeficiente numérico pequeño en el argumento del logaritmo en (42.7) es equivalente a adicionar un término de la forma constante $\times v_*$, en donde la constante es del orden de la unidad; este término nó contiene el logaritmo y puede, por tanto, despreciarse. Sin embargo, debe recordarse que el argumento de logaritmo en las fórmulas deducidas aquí no es tan grande como para que su logaritmo sea también muy grande y de esta forma la exactitud de las fórmulas no es muy alta.

Pueden hacerse más exactas estas fórmulas introduciendo un coeficiente numérico en el argumento de logaritmo o, lo que es lo mismo, sumando una constante al logaritmo. Sin embargo, no pueden calcularse estas constantes teóricamente y hemos de determinarlas a partir de resultados experimentales. Por ejemplo, una fórmula más exacta para la distribución de velocidades puede escribirse en la forma

$$u = v_*[2{\cdot}40\log(yv_*/\nu) + 5{\cdot}84]. \tag{42.8}$$

No es difícil determinar la disipación de energía ϵ por unidad de masa del fluido. σ es el valor medio de la componente Π_{xy} del tensor densidad de flujo del impulso $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \eta(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$. Fuera de la subcapa viscosa el término de viscosidad puede omitirse, de modo que $\sigma = \rho\overline{v_x v_y}$. Introduciendo la velocidad fluctuante $\mathbf{v}'$, podemos escribir $v_x = u + v'_x$; la propia velocidad v_y es la velocidad fluctuante v'_y, puesto que su valor medio es cero. El resultado es

$$\sigma = \rho\overline{v_x v_y} = \rho\overline{v'_x v'_y} + \rho u\overline{v'_y} = \rho\overline{v'_x v'_y}.$$

A continuación, podemos escribir la densidad de flujo de energía en la direc-

ción y en la forma $(p + 1/2\rho v^2)v_y$, habiéndose omitido de nuevo el término de la viscosidad. Poniendo en el segundo término

$$v^2 = (u+v'_x)^2+v'_y{}^2+v'_z{}^2$$

y promediando, se obtiene

$$\overline{pv'_y}+\tfrac{1}{2}\rho(\overline{v'_x{}^2v'_y}+\overline{v'_y{}^3}+\overline{v'_z{}^2v'_y})+\rho u\overline{v'_xv'_y}.$$

En esta última expresión sólo necesita retenerse el último término. La razón es que la velocidad fluctuante es del orden de v_* y, por tanto, dentro de la exactitud logarítmica, es pequeña en comparación con u. Las fluctuaciones turbulentas de la presión p son del orden de $\rho v_*{}^2$ [(ver (31.4)], y así podemos, con la misma exactitud, despreciar el término correspondiente en el flujo de energía. Así pues, tenemos para la densidad de flujo de energía media $\rho\overline{u'_xv'_y} = u\sigma$. Cuando nos acercamos a la superficie, este flujo disminuye debido a que la energía se disipa. La disminución de la densidad de flujo de energía al aproximarse a la superficie en una distancia dy es $\sigma(du/dy)dy$. Esta es la cantidad de energía convertida en calor en una capa de fluido de espesor dy y de área unidad. Por tanto, se llega a la conclusión de que la disipación de energía por unidad de masa es $(\sigma/\rho)du/dy$, o sea,

$$\epsilon = v_*{}^3/by = (\sigma/\rho)^{\frac{3}{2}}/by. \tag{42.9}$$

§ 43. Flujo turbulento en tuberías

Apliquemos ahora los resultados anteriores al flujo turbulento en un tubo. Cerca de las paredes del tubo (a distancias pequeñas en comparación con su radio a), la superficie puede considerarse aproximadamente como un plano y la distribución de velocidades debe venir dada por la fórmula (42.7) o (42.8). Como la función $\log y$ varía sólo lentamente, podemos utilizar la fórmula (42.7) dentro de una exactitud logarítmica para dar la velocidad media U del flujo en la tubería si sustituimos y en dicha fórmula por a:

$$U = (v_*/b)\log(av_*/\nu). \tag{43.1}$$

Por U entendemos el volumen del fluido que pasa a través de una sección recta de la tubería por unidad de tiempo, dividida por el área de la sección recta: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Con objeto de relacionar la velocidad U al gradiente de presiones $\Delta p/l$ que mantiene el flujo (siendo Δp la diferencia de presiones en los extremos de la tubería y l su longitud), observamos que la fuerza ejercida sobre una sección recta del flujo es $\pi a^2\Delta p$. Esta fuerza ha de compensar el rozamiento de las paredes. Puesto que la fuerza de rozamiento por unidad de área de la pared es $\sigma = \rho v_*{}^2$, la fuerza de rozamiento total es $2\pi al\rho v_*{}^2$. Igualando ambas fuerzas, tenemos

$$\Delta p/l = 2\rho v_*{}^2/a. \tag{43.2}$$

Las ecuaciones (43.1) y (43.2) determinan, por intermedio del parámetro v_*, la relación existente entre la velocidad de flujo en las tuberías y el gradiente de presiones. Esta relación se denomina *ley de resistencia* de la tubería, Expresando v_* en función de $\Delta p/l$ por (43.2) y sustituyendo en (43.1), obtenemos la ley de resistencia en la forma

$$U = \sqrt{(a\Delta p/2b^2\rho l)}\log[(a/\nu)\sqrt{(a\Delta p/2\rho l)}]. \tag{43.3}$$

En esta fórmula es costumbre introducir lo que se denomina el *coeficiente de resistencia* de la tubería, magnitud adicional definida como

$$\lambda = \frac{2a\Delta p/l}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \tag{43.4}$$

La relación existente entre λ y el número de Reynolds adimensional $R = 2aU/\nu$ viene dada en forma implícita por la ecuación

$$1/\sqrt{\lambda} = 0{,}85\log(R\sqrt{\lambda}) - 0{,}55. \tag{43.5}$$

En esta expresión hemos sustituido b por el valor (42.2) y sumado al logaritmo una constante determinada empíricamente.† El coeficiente de resistencia determinado por esta fórmula es una función lentamente decreciente del número de Reynolds. Para posterior comparación, daremos la ley de resistencia correspondiente al flujo laminar en una tubería. Introduciendo el coeficiente de resistencia en la fórmula (17.10), se obtiene

$$\lambda = 64/R. \tag{43.6}$$

En el flujo laminar el coeficiente de resistencia disminuye al aumentar el número de Reynolds de modo más rápido que en el caso del flujo turbulento.

La figura 22 muestra un gráfico logarítmico de λ en función de R. La línea recta de mayor pendiente corresponde al flujo laminar [fórmula (43.6)], y la curva de menor pendiente (que coincide también casi con una recta) al flujo turbulento. La transición de la primera línea a la segunda se produce, al aumentar el número de Reynolds, en el punto en donde el flujo se hace turbulento; esto puede ocurrir para diversos números de Reynolds, dependiendo de las condiciones reales (la intensidad de las perturbaciones; ver § 29). El coeficiente de la resistencia aumenta abruptamente en el punto de transición.

Hasta ahora hemos admitido que la superficie de la pared es fundamentalmente lisa. Si es rugosa, las fórmulas obtenidas anteriormente deben

† El coeficiente del logaritmo en esta fórmula se ajusta para que se corresponda con el de la fórmula (42.8) correspondiente al perfil logarítmico de velocidades. Sólo en este caso, la fórmula (43.5) tiene el significado teórico de ser una fórmula límite para el flujo turbulento a valores suficientemente grandes del número de Reynolds. Si se escogen arbitrariamente los valores de las dos constantes que aparecen en la fórmula (43.5), entonces sólo vale como fórmula empírica para describir la relación entre λ y R. Sin embargo, en este caso no hay ninguna razón para preferirla a cualquier otra fórmula empírica más sencilla que represente adecuadamente los resultados experimentales.

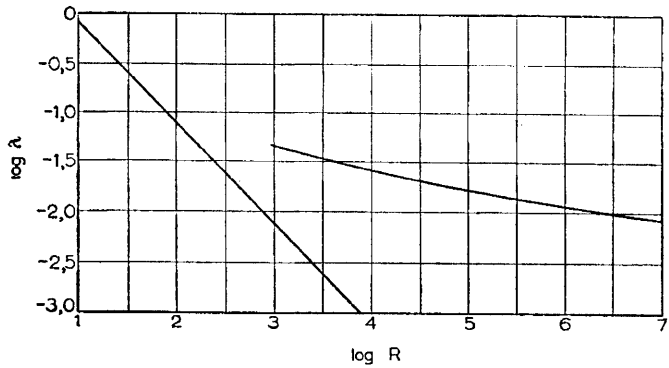

FIG. 22

cambiarse un poco. Como medida de la rugosidad de la pared podemos tomar el orden de magnitud de las irregularidades que designaremos por d. Los valores relativos de d y el espesor y_0 de la subcapa tienen importancia. Si y_0 es grande en comparación con d, la rugosidad carece de importancia; esto es lo que entendemos al decir que la superficie es bastante lisa. Si y_0 y d son del mismo orden de magnitud, no puede obtenerse ninguna fórmula general.

En el caso límite opuesto de rugosidad extrema ($d \gg y_0$), pueden establecerse de nuevo algunas relaciones generales. En este caso no podemos claramente hablar de una subcapa viscosa. El flujo turbulento se produce alrededor de las irregularidades de la superficie y este flujo está caracterizado por las magnitudes ρ, σ, d; como es normal, la viscosidad ν no puede aparecer directamente. La velocidad de este flujo es del orden de magnitud de v_*, que es la única magnitud a nuestra disposición que tiene las dimensiones de la velocidad. Así pues, vemos que, en el flujo a lo largo de una superficie rugosa, la velocidad se hace pequeña ($\sim v_*$) a distancias $y \sim d$, en lugar de $y \sim y_0$, como sucedía en el caso del flujo a lo largo de una superficie lisa. Aquí resulta claro que la distribución de velocidades viene dada por una fórmula que se obtiene a partir de (42.7) sustituyendo d por ν/v_*. Así pues,

$$u = (v_*/b)\log(y/d). \tag{43.7}$$

Las fórmulas correspondientes al flujo en una tubería deben variarse de modo semejante. Es suficiente sustituir simplemente ν/v_* en ellas por d. En el caso de la ley de resistencia tenemos, en lugar de (43.3), la fórmula

$$U = \sqrt{(a\Delta p/2b^2\rho l)}\log(a/d). \tag{43.8}$$

Ahora el argumento del logaritmo no es constante y no interviene el gradiente de presiones como sucedía en (43.3). Vemos que la velocidad media es simplemente proporcional a la raíz cuadrada del gradiente de presiones en la tubería. Si introducimos el coeficiente de resistencia, (43.8) se transforma en

$$\lambda = 8b^2/\log^2(a/d) = 1{,}4/\log^2(a/d), \tag{43.9}$$

es decir, λ es una constante y no depende del número de Reynolds.

§ 44. Capa límite turbulenta

El hecho de que hayamos obtenido una distribución logarítmica de velocidades, que formalmente es válida en todo el espacio en el caso del flujo turbulento plano paralelo, se debe a que hemos estado considerando un flujo a lo largo de una superficie de área infinita. En el caso del flujo a lo largo de una superficie correspondiente a un cuerpo finito, únicamente tiene un perfil logarítmico† el movimiento a distancias cortas de la superficie — en la capa límite. Podemos mencionar también que una capa límite turbulenta puede existir tanto en el caso de un fluido que se mueve turbulentamente dentro de la corriente principal como en el caso de un flujo laminar.

La disminución de la velocidad media, tanto en la capa límite turbulenta como en la laminar, se debe en último término a la viscosidad del fluido. Sin embargo, el efecto de la viscosidad aparece en la capa límite turbulenta de un modo poco usual. La manera en que se produce la variación de la velocidad media en la capa no depende por sí misma directamente de la viscosidad; la viscosidad aparece en la expresión correspondiente al gradiente de velocidades sólo en la subcapa viscosa. Sin embargo, el espesor total de la capa límite está determinado por la viscosidad y se anula cuando ésta es cero (ver a continuación). Si la viscosidad fuese exactamente nula, no existiría capa límite.

Apliquemos el resultado del § 43 a una capa límite turbulenta formada en el flujo a lo largo de una placa plana delgada, tal como la estudiada en § 39 cuando analizábamos el flujo laminar. En el límite de la capa turbulenta,

† El espesor de la capa límite aumenta a lo largo de la superficie del cuerpo en el sentido del flujo, de acuerdo con una ley que determinaremos posteriormente. Esto explica por qué, en el caso del flujo en una tubería, el perfil logarítmico es válido para toda la sección recta de la misma. El espesor de la capa límite en la pared de la tubería aumenta al alejarnos del punto de entrada del fluido. A cierta distancia finita de este punto, la capa límite llena la casi totalidad de la sección recta de la tubería. Por ello, si suponemos la tubería suficientemente larga y no tenemos en cuenta la parte correspondiente a la entrada, el flujo en toda la tubería será de la misma clase que en la capa límite turbulenta. Recordemos que se produce una situación análoga en el flujo laminar dentro de una tubería. Dicho flujo obedece a la fórmula de Poiseuille para todos los números de Reynolds. En el flujo de Poiseuille la viscosidad es importante a todas las distancias de la pared y su efecto nunca se limita a una capa delgada junto a ella.

la velocidad del fluido es casi igual a la velocidad de la corriente principal que designaremos por U. Sin embargo, para determinar esta velocidad en el límite podemos utilizar la fórmula (42.7) con exactitud logarítmica, poniendo el espesor δ de la capa límite en lugar de y. Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$U = (v_*/b)\log(v_*\delta/\nu). \tag{44.1}$$

Aquí U es un parámetro constante para un flujo dado; sin embargo, el espesor δ varía a lo largo de la placa y, por tanto, v_* es también una función con variación lenta de x. La fórmula (44.1) es inadecuada para determinar estas funciones; necesitamos alguna otra ecuación que relacione v_* y δ con x.

Para obtenerla, utilizaremos los mismos razonamientos que empleábamos al deducir la fórmula (36.3) para la anchura de la estela turbulenta. Como allí, la derivada $d\delta/dx$ debe ser del orden del cociente de la velocidad a lo largo del eje y, y la velocidad a lo largo del eje x en el límite de la capa. Esta última velocidad es del orden de U, mientras que la primera se debe a la velocidad fluctuante y, por tanto, es del orden de v_*. Así pues, $d\delta/dx \sim v_*/U$, de aquí que

$$\delta \sim v_* x/U. \tag{44.2}$$

Las fórmulas (44.1) y (44.2) determinan, en conjunto, v_* y δ como funciones de la distancia x.† Sin embargo, estas funciones no pueden escribirse explícitamente. Expresaremos δ en función de una magnitud auxiliar. Puesto que v_* es una función lentamente variable de x, se ve, a partir de (44.2), que el espesor de la capa varía esencialmente de la misma forma que x. Podemos recordar que el espesor de la capa límite laminar aumenta con $\sqrt{x}$, es decir, más lentamente que en la capa límite turbulenta.

Determinemos la dependencia respecto a x de la fuerza de rozamiento σ que actúa sobre la unidad de área de la placa. Esta relación viene dada por dos fórmulas:

$$\sigma = \rho v_*^2, \qquad U = (v_*/b)\log(v_*^2 x/U\nu).$$

La última se obtiene sustituyendo (44.2) en (44.1) y es válida hasta la exactitud logarítmica. Introduzcamos un coeficiente de arrastre c (referido al área unidad de la placa), definido como el cociente adimensional

$$c = 2\sigma/\rho U^2 = 2(v_*/U)^2. \tag{44.3}$$

Entonces, eliminando v_* entre ambas ecuaciones, obtenemos la siguiente expresión que nos da (hasta la exactitud logarítmica) c en forma de función implícita de x:

$$\sqrt{(2b^2/c)} = \log(c\mathrm{R}_x), \qquad \mathrm{R}_x = Ux/\nu. \tag{44.4}$$

† Si existe sobre la placa una capa límite laminar de extensión considerable, hablando estrictamente, debe estimarse x aproximadamente como la distancia a partir del punto en que la capa laminar se convierte en turbulenta.

Para aumentar la exactitud de esta fórmula podemos añadir una constante numérica empírica al logaritmo. La fórmula queda entonces como

$$1/\sqrt{c} = 1{,}7 \log(c\mathrm{R}_x) + 3{,}0. \tag{44.5}$$

El coeficiente de arrastre c, dado por esta fórmula, es una solución lentamente decreciente de la distancia x.

Finalmente, expresemos el espesor de la capa límite en función de $c(x)$. Tenemos que $v_* = \sqrt{(\sigma/\rho)} = U\sqrt{(c/2)}$. Sustituyendo en (44.2), hallamos

$$\delta = \text{constante} \times x\sqrt{c}. \tag{44.6}$$

Esta fórmula puede escribirse con el signo de igualdad solamente en los casos de una capa límite turbulenta bajo un flujo laminar, como es natural, que es cuando δ tiene un significado exacto (como siempre, la región turbulenta se distingue nítidamente de la región laminar). El factor constante en (44.6) debe determinarse a partir de los resultados experimentales.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar a partir de la fórmula (44.5) la fuerza total que actúa sobre ambas caras de la placa.

Solución. La fuerza necesaria por unidad de longitud del borde de la placa es

$$F = 2\int_0^l \sigma \, \mathrm{d}x,$$

siendo l la longitud de la placa. Introduciendo en lugar de F el coeficiente de arrastre

$$C = F/\tfrac{1}{2}\rho U^2 . 2l,$$

obtenemos

$$C = \frac{1}{l}\int_0^l c \, \mathrm{d}x.$$

Si tomamos únicamente los términos que contienen el logaritmo en su potencia más elevada (primera), entonces la integral anterior es simplemente $c(l)$, que corresponde al valor de c para $x = l$. Con objeto de tener un valor más exacto para C, correspondiente a la fórmula (44.5), debemos efectuar la integración teniendo en cuenta los términos del orden siguiente que contienen el logaritmo elevado a la potencia cero. Para esto, escribamos

$$\int_0^l c \, \mathrm{d}x = [xc]_0^l - \int_0^l x\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Se calcula la derivada $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$ mediante la fórmula (44.5), que escribiremos en la forma $c = 1/A^2 \log^2 Bxc$, obteniendo con la precisión necesaria

$$C = c(l) + \frac{2}{A^2 \log^3 Blc} = c(l)\left[1 + \frac{2}{\log Blc}\right],$$

y así

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(1 - \frac{1}{\log Blc}\right) = A(\log Blc - 1) = A\log(Blc/e)$$
$$\approx A\log(BlC/e).$$

Sustituyendo los valores de A y B a partir de (44.5), obtenemos la fórmula siguiente que da el coeficiente de arrastre total C en función del número de Reynolds $R = Ul/\nu$:

$$1/\sqrt{C} = 1{,}7\log(CR) + 1{,}3.$$

En el caso de R grande, el coeficiente de arrastre dado por esta fórmula disminuye proporcionalmente a $1/\log^2 R$. En el caso de capa límite laminar, C disminuye proporcionalmente a $1/\sqrt{R}$ [ver (39.16)], es decir, con mayor rapidez. Así pues, podemos decir que en el caso de números de Reynolds grandes, la fuerza de rozamiento en una capa límite turbulenta es mayor que en otra laminar.

Problema 2. Determinar el coeficiente de arrastre de una placa rugosa en función del número de Reynolds en el caso de una capa límite turbulenta.

Solución. Sustituyendo en lugar del espesor y_0 ($\sim \nu/v_*$) de la subcapa laminar la dimensión d de los salientes, obtenemos a partir de (44.1) y (44.2) $U = (v_*/b)\log(xv_*/Ud)$. Introduciendo el coeficiente de arrastre c, tenemos a partir de aquí $0{,}59/\sqrt{c} = \log(x\sqrt{c}/d)$. Análogamente, el coeficiente de arrastre total para la placa es (de nuevo con exactitud logarítmica) $0{,}59/\sqrt{C} = \log(l\sqrt{C}/d)$. Podemos señalar que el coeficiente de arrastre para una placa rugosa es independiente del número de Reynolds.

§ 45. Crisis de arrastre o resistencia

A partir de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, podemos deducir conclusiones importantes respecto a la ley de arrastre para números de Reynolds grandes, es decir, la relación entre la fuerza de arrastre o de resistencia que actúa sobre el cuerpo y el valor de R cuando este último es grande.

Ya hemos descrito el esquema de flujo correspondiente a valores grandes de R (único caso que estudiaremos) y es como sigue. Puede considerarse como ideal todo el cuerpo principal del fluido, con un flujo potencial en todas partes, excepto en la estela turbulenta (es decir, en todas partes, excepto en la capa límite que ahora nos interesa). La anchura de la estela depende de la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. Es importante señalar que, aunque esta posición está determinada por las propiedades de la capa límite, resulta ser independiente del número de Reynolds, como hemos visto en § 40. Así pues, podemos decir que el esquema de flujo completo para números de Reynolds grandes es casi independiente de la viscosidad, es decir, de R (en tanto que la capa límite siga siendo laminar; ver a continuación).

De aquí se deduce que el arrastre también debe ser independiente de la viscosidad. Permanecen a nuestra disposición sólo tres magnitudes: la velo-

cidad U de la corriente principal, la densidad del fluido ρ y la dimensión l del cuerpo. A partir de éstas podemos construir solamente una magnitud que posea las dimensiones de fuerza, a saber, $\rho U^2 l^2$. En lugar de la dimensión lineal al cuadrado del cuerpo, l^2, introduciremos, como es costumbre, la magnitud proporcional a la misma S, que es el área de la sección recta transversal a la dirección del flujo, poniendo

$$F = \text{constante} \times \rho U^2 S, \tag{45.1}$$

en donde la constante es un número que depende sólo de la forma del cuerpo. Así pues, el arrastre debe ser (para R grande) proporcional al área de la sección recta del cuerpo y al cuadrado de la velocidad de la corriente principal. Podemos recordar, para comparación, que para valores muy pequeños de R ($\ll 1$), el arrastre es proporcional a la dimensión lineal del cuerpo y a la propia velocidad ($F \sim \nu \rho l U$; ver § 20).†

Como hemos dicho, es costumbre introducir, en lugar de la fuerza de arrastre F, el coeficiente de arrastre C definido por $C = F/1/2\rho U^2 S$. Esta magnitud es adimensional y puede depender únicamente de R. La fórmula (45.1) se transforma entonces en

$$C = \text{constante}, \tag{45.2}$$

es decir, el coeficiente de arrastre depende solamente de la forma del cuerpo.

El comportamiento anterior de la fuerza de arrastre no puede continuar hasta números de Reynolds arbitrariamente grandes. La razón es que, en el caso de R suficientemente grande, la capa límite laminar (en la superficie del cuerpo hasta por lo menos la línea de separación) resulta inestable y, por lo tanto, turbulenta. Sin embargo, la capa límite completa no se hace turbulenta, sino sólo una parte de la misma. Por consiguiente, la superficie del cuerpo puede dividirse en tres partes: en la parte delantera existe una capa límite laminar, luego una capa turbulenta y, finalmente, la región más allá de la línea de separación.

La iniciación de la turbulencia en la capa límite tiene un efecto importante sobre el esquema completo del flujo en la corriente principal. Produce un desplazamiento considerable de la línea de separación hacia la parte posterior del cuerpo (es decir, corriente abajo), de modo que se contrae la estela turbulenta más allá del cuerpo, como se ve en la figura 23, en donde está sombreada la región de la estela.‡ La contracción de la estela turbulenta conduce a una reducción de la fuerza de arrastre. Así pues, el origen de la

† El flujo junto a una burbuja de gas es un caso especial; el arrastre permanece proporcional a U incluso para R grande; ver problema.

‡ Por ejemplo, en el flujo transversal alrededor de un cilindro largo, el establecimiento de la turbulencia en la capa límite traslada el punto de separación de 95° a 60° (midiendo el ángulo azimutal sobre el cilindro en el sentido del flujo).

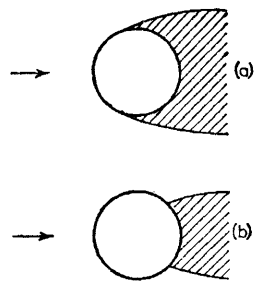

FIG. 23

turbulencia de la capa límite a números de Reynolds grandes se ve acompañado por una disminución del coeficiente de arrastre, que disminuye en un factor considerable en un margen relativamente estrecho del número de Reynolds cerca de 10^5. Denominaremos este fenómeno *crisis de la fuerza de arrastre.* La disminución del coeficiente de arrastre es tan grande, que el propio arrastre, que en el caso de C constante es proporcional al cuadrado de la velocidad, disminuye realmente al aumentar la velocidad dentro de este margen de los números de Reynolds.

Conviene mencionar que el grado de turbulencia en la corriente principal influye sobre la crisis de arrastre; cuanto mayor es la turbulencia incidente, más pronto se hará turbulenta la capa límite (es decir, será menor el número R cuando esto suceda). Por tanto, la disminución del coeficiente de arrastre empieza a un número más pequeño de Reynolds y se extiende en un margen más amplio de valores de R.

Las figuras 24 y 25 dan gráficos obtenidos experimentalmente, en los que se muestra el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds $R = Ud/\nu$ en el caso de una esfera; la figura 24 es una representación doble logarítmica. En el caso de valores muy pequeños de R ($\ll 1$), el coeficiente de arrastre disminuye de acuerdo con $C = 24/R$ (fórmula de Stokes). El descenso de C continúa más lentamente hasta que $R \approx 5 \times 10^3$, en donde C alcanza un mínimo más allá del cual empieza a crecer un poco. En el margen de números de Reynolds comprendidos entre 2×10^4 y 2×10^5, es válida la ley (45.2), es decir, C es casi constante. La crisis de arrastre se produce para R comprendido entre 2×10^5 y 3×10^5, y entonces el coeficiente de arrastre disminuye en un factor de 4 ó 5.

Por comparación, podemos dar un ejemplo de flujo en el que no existe un número de Reynolds crítico. Consideremos el flujo que rodea a un disco plano en dirección perpendicular al mismo. En este caso, la posición de la separación es evidente a partir de consideraciones puramente geométricas: es claro que la separación se produce en el borde del disco y no se mueve

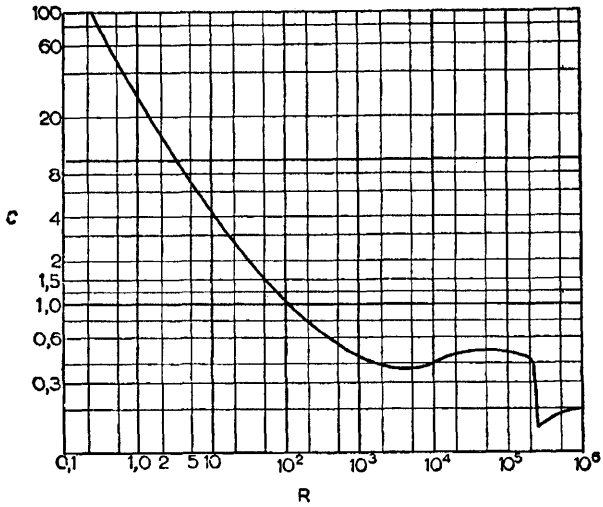

FIG. 24

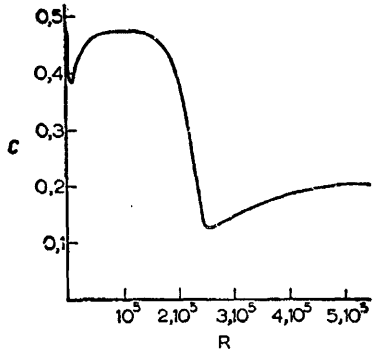

FIG. 25

de allí. De aquí que, cuando R aumenta, el coeficiente de arrastre del disco permanece constante y no existe crisis de arrastre.

Debe recordarse que, en el caso de velocidades elevadas en las que se produce la crisis de arrastre, la compresibilidad del fluido puede empezar a tener un efecto notable. El parámetro que caracteriza la extensión de este efecto es el *número de Mach* $M = U/c$, siendo c la velocidad del sonido; si $M \ll 1$, el fluido puede considerarse como incompresible (§ 10). Puesto que de los dos números M y R solamente uno contiene la dimensión del cuerpo, estos números pueden variar independientemente.

Los datos experimentales indican que la compresibilidad tiene, en general, un efecto estabilizador sobre el flujo en la capa límite laminar. Cuando

aumenta M crece el valor crítico de R. Por ejemplo, cuando en el caso de una esfera M varía desde 0,3 a 0,7, se pospone la crisis del arrastre desde $R \approx 4 \times 10^5$ a $R \approx 8 \times 10^5$.

Podemos también señalar que, al aumentar M, la posición del punto de separación de la capa límite laminar se mueve aguas arriba hacia el frente del cuerpo y esto origina cierto crecimiento de la fuerza de arrastre.

PROBLEMA

Determinar la fuerza de arrastre sobre una burbuja de gas que se mueve en un líquido a números de Reynolds grandes (V. G. LEVICH, 1949).

Solución. En el límite entre el líquido y el gas la componente tangencial de la velocidad del fluido no se anula, pero sí lo hace su derivada normal (despreciamos la viscosidad del gas). De aquí que el gradiente de velocidades cerca del límite no sea particularmente elevado y, por tanto, no exista capa límite en el sentido del § 39; por tanto, no existirá ninguna separación prácticamente en la superficie completa de la burbuja. Al calcular la disipación de energía a partir de la integral de volumen (16.3) podemos, por consiguiente, utilizar en todo el espacio la distribución de velocidades correspondiente al flujo potencial que rodea a una esfera (§ 10, problema 2), despreciando la capa superficial de líquido y la estela turbulenta muy estrecha. Utilizando la fórmula obtenida en § 16, problema, se encuentra

$$E_k = -\eta \int \left(\frac{\partial v^2}{\partial r}\right)_{r=R} 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -12\pi\eta RU^2.$$

De aquí vemos que la fuerza de arrastre disipativa requerida es† $F = 12\pi\eta RU$.

§ 46. Flujo que rodea a cuerpos con forma aerodinámica

Puede preguntarse cuál sería la forma de un cuerpo (de un área de sección recta determinada, por ejemplo) para que resulte tan pequeño como sea posible el arrastre sobre el mismo como resultado de su movimiento en el interior de un fluido. A partir de lo anterior, para que esto sea así, es evidente que la separación debe estar tan lejos y hacia atrás como sea posible: la separación debe entonces producirse cerca del extremo final del cuerpo, de modo que la estela turbulenta sea lo más estrecha posible. Ya sabemos que la aparición de la separación se facilita por la presencia de un incremento rápido de la presión corriente abajo a lo largo del cuerpo. De aquí que el cuerpo deba tener una forma tal que la variación de presión a lo largo del mismo, donde la presión esté creciendo, tenga lugar tan lenta y suavemente como sea posible. Esto puede conseguirse dando al cuerpo una forma alargada en la dirección del flujo, de modo que tienda suavemente

† El margen de aplicabilidad de esta fórmula no es realmente grande, puesto que la burbuja deja de ser esférica cuando la velocidad aumenta suficientemente.

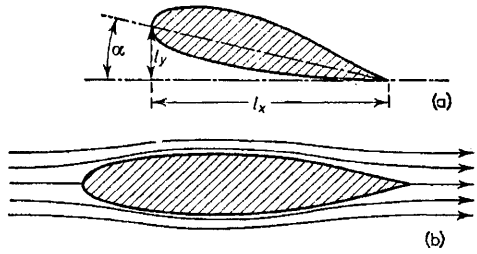

FIG. 26

a coincidir en un solo punto corriente abajo, de modo que el flujo a lo largo de ambas partes del cuerpo llegue a encontrarse sin brusquedades y sin tener que rodear ninguna esquina o girar un ángulo considerable respecto a la dirección de la corriente principal. El frente delantero del cuerpo debe estar redondeado; si allí existiese un ángulo, la velocidad del fluido en su vértice sería infinita (ver § 10, problema 6), y, en consecuencia, la presión aumentaría rápidamente corriente abajo, resultando inevitablemente la separación.

Todos estos requisitos se satisfacen cumplidamente con las formas del tipo indicado en la figura 26. El perfil indicado en la figura 26*b* puede ser, por ejemplo, la sección recta de un sólido de revolución alargado o la sección recta de un cuerpo con una «envergadura» grande (convencionalmente denominaremos a los cuerpos de este tipo *alas*). El perfil de la sección recta de un ala puede ser asimétrico como en la figura 26*a*. En el flujo que rodea un cuerpo de esta forma la separación se produce únicamente en la proximidad inmediata del extremo puntiagudo y, en consecuencia, el coeficiente de arrastre es relativamente pequeño. Dichos cuerpos se dicen que son *aerodinámicos*.

El rozamiento directo del fluido en la superficie de la capa límite es importante en el arrastre realizado sobre cuerpos aerodinámicos. Este efecto en el caso de cuerpos que no tienen esta propiedad (los cuales se consideraron en la sección anterior) es relativamente pequeño y, por tanto, carece de significado en la práctica. En el caso límite opuesto de flujo paralelo a un disco plano, este efecto resulta ser la única fuente de arrastre (§ 39).

En el caso de un flujo que rodea a un ala aerodinámica inclinada respecto a la corriente principal un ángulo pequeño α, denominado *ángulo de ataque* (figura 26), se desarrolla una fuerza de sustentación grande F_y, mientras que la fuerza de arrastre F_x permanece pequeña y, por tanto, el cociente F_y/F_x puede alcanzar valores grandes ($\sim 10 - 100$). Sin embargo, esto es así sólo mientras el ángulo de ataque es pequeño ($\lesssim 10°$). En el caso de ángulos mayores, el arrastre aumenta muy rápidamente y disminuye la sustentación. Esto se explica por el hecho de que, para valores grandes del

ángulo de ataque, el cuerpo deja de ser aerodinámico: el punto de separación se mueve considerablemente hacia la parte delantera del cuerpo y entonces la estela resulta más ancha. Debe recordarse que el caso límite de un cuerpo muy delgado, por ejemplo, una placa plana, es aerodinámico únicamente en el caso de un ángulo muy pequeño de ataque; se produce separación en el borde delantero de la placa cuando está inclinada incluso un pequeño ángulo respecto a la corriente principal.

Por definición, el ángulo de ataque α se mide desde la posición del ala para el cual la fuerza de sustentación es cero. En el caso de ángulos de ataque pequeños, podemos desarrollar la sustentación en una serie de potencias de α. Tomando únicamente el primer término, podemos suponer que la fuerza F_y es proporcional a α. A continuación, por los mismos razonamientos dimensionales que en el caso de la fuerza del arrastre, la sustentación debe ser proporcional a ρU^2. Introduciendo también la envergadura l_z del ala, podemos escribir

$$F_y = \text{constante} \times \rho U^2 \alpha l_x l_z, \tag{46.1}$$

en donde la constante numérica depende únicamente de la forma del ala y en particular del ángulo de ataque. Cuando las alas son muy largas, la sustentación puede suponerse que es proporcional a la envergadura, en cuyo caso la constante depende únicamente de la forma de la sección recta del ala.

En lugar de la sustentación en el ala, se utiliza frecuentemente el *coeficiente de sustentación*; se define como

$$C_y = F_y / \tfrac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z. \tag{46.2}$$

En el caso de alas muy largas y de acuerdo con lo que hemos dicho anteriormente, el coeficiente de sustentación es proporcional al ángulo de ataque y no depende de la velocidad ni de la envergadura:

$$C_y = \text{constante} \times \alpha. \tag{46.3}$$

Para calcular la sustentación en el caso de un ala aerodinámica, mediante la fórmula de Zhukovskii, es necesario determinar la circulación de la velocidad Γ. Esto se hace del modo siguiente. Recordemos que tenemos un flujo potencial en todas partes fuera de la estela. En el caso presente, la estela es muy delgada y ocupa en la superficie del ala sólo un área muy pequeña cerca de su borde trasero apuntado. De aquí que, para determinar la distribución de velocidades (y por tanto la circulación Γ), podemos resolver el problema del flujo potencial de un fluido ideal alrededor de un ala. Se tiene en cuenta entonces la existencia de la estela mediante la presencia de una discontinuidad tangencial que se extiende dentro del fluido desde el borde agudo nítido trasero del ala en donde el potencial tiene una discontinuidad $\phi_2 - \phi_1 = \Gamma$. Como se ha visto en § 37, la derivada $\partial\phi/\partial z$ tiene también una

discontinuidad en esta superficie, mientras que las derivadas $\partial\phi/\partial x$ y $\partial\phi/\partial y$ son continuas. Cuando se trata de un ala de envergadura finita el problema planteado en esta forma tiene una solución única. Sin embargo, hallar la solución exacta es muy complicado. El problema ha sido resuelto por N. E. KOCHIN† para un ala en forma de disco circular inclinado un ángulo de ataque pequeño.

Si el ala es muy larga (y tiene una sección recta uniforme), entonces, considerándola como infinita en la dirección z, podemos tratar el flujo como bidimensional (en el plano xy). Es evidente, a partir de la simetría del problema, que la velocidad $v_z = \partial\phi/\partial z$ debe ser cero a lo largo del ala. Por consiguiente, en este caso debemos buscar una solución en la cual únicamente tenga una discontinuidad el potencial, siendo continua su derivada; en otras palabras, no existe superficie de discontinuidad tangencial y tenemos simplemente una función multiforme $\phi(x, y)$, que recibe un incremento finito Γ cuando rodeamos un contorno cerrado que encierra el perfil del ala. Sin embargo, en esta forma el problema del flujo bidimensional no tiene una solución única, puesto que admite soluciones para cualquier discontinuidad dada del potencial. Para obtener un resultado único debemos exigir que se cumpla otra condición que fue formulada en primer lugar por S. A. CHAPLYGIN en 1909.

Esta condición, denominada de *Chaplygin-Zhukovskii*, se basa en exigir que la velocidad del fluido no se haga infinita en el borde nítido de salida del ala; a este respecto debemos recordar que la velocidad del fluido en general se hace infinita en el vértice de un ángulo cuando un fluido ideal lo rodea, de acuerdo con una ley de potencias (§ 10, problema 6). Podemos decir que la condición enunciada implica que los chorros que proceden de las dos caras del ala deben encontrarse suavemente sin girar ningún ángulo. Cuando se cumple este condición, como es natural, la solución del problema del flujo potencial da un esquema muy parecido al verdadero, en donde la velocidad es en todos puntos finita y se produce únicamente la separación en el borde de salida. La solución resulta ahora única y, en particular, la circulación Γ que es necesaria para calcular la fuerza de sustentación tiene un valor definido.

§ 47. Arrastre inducido

Una parte importante del arrastre en el caso de un ala aerodinámica (de envergadura finita) está formada por el arrastre debido a la disipación de energía en la estela turbulenta delgada. Esta fuerza de resistencia se denomina *arrastre inducido*.

† *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **4**, 3, 1940; **9**, 13, 1945.

Se ha visto en § 21 como podemos calcular la fuerza de arrastre debida a la estela, mediante la consideración del flujo bastante lejos del cuerpo. Sin embargo, la fórmula (21.1) no es aplicable al caso presente. De acuerdo con dicha fórmula, el arrastre viene dado por la integral de v_x extendida a la sección recta de la estela, es decir, la descarga o caudal a través de la misma. Sin embargo, teniendo en cuenta que la estela es muy delgada detrás de un ala aerodinámica, resulta que el caudal es pequeño en el caso presente y puede despreciarse en la aproximación que utilizaremos a continuación.

Como en § 21, escribiremos la fuerza F_x como la diferencia existente entre los flujos totales de la componente x del impulso a través de los planos $x = x_1$ y $x = x_2$ que se encuentran, respectivamente, bastante detrás y bastante delante del cuerpo. Escribiendo las tres componentes de la velocidad como $U + v_x$, v_y, v_z, tenemos para la componente Π_{xx} de la densidad de flujo del impulso la expresión $\Pi_{xx} = p + \rho(U + v_x)^2$, de modo que la fuerza de arrastre es

$$F_x = \Big(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1}\Big)[p+\rho(U+v_x)^2]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{47.1}$$

Para tener en cuenta el espesor de la estela podemos despreciar en la integral extendida al plano $x = x_1$ la integral respecto a la sección recta de la estela y así integrar únicamente respecto a la región exterior a la misma. Sin embargo, en dicha región tenemos un flujo potencial y es válida la ecuación de Bernoulli $p + 1/2\rho(\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_0 + 1/2\rho U^2$; de aquí que,

$$p = p_0 - \rho U v_x - \tfrac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \tag{47.2}$$

Ahora no podemos despreciar los términos cuadráticos como hicimos en § 21, puesto que estos términos son los que determinan la fuerza de arrastre requerida en el caso que estamos considerando. Sustituyendo (47.2) en (47.1), obtenemos

$$F_x = \Big(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1}\Big)[p_0+\rho U^2+\rho U v_x+\tfrac{1}{2}\rho(v_x^2-v_y^2-v_z^2)]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

La diferencia de las integrales de la constante $p_0 + \rho U^2$ es cero; la diferencia de las integrales de $\rho U v_x$ es igualmente cero, puesto que los flujos de masa

$$\iint \rho v_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

a través de los planos delantero y trasero deben ser iguales (despreciamos el caudal o descarga a través de la estela en la aproximación que estamos considerando. A continuación, si tomamos el plano $x = x_2$ suficientemente lejos por delante del cuerpo, la velocidad v en este plano es muy pequeña,

de modo que la integral de $1/2\rho(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)$ respecto a este plano puede despreciarse. Finalmente, en el flujo que rodea a un ala aerodinámica, la velocidad v_x fuera de la estela es pequeña en comparación con v_y y v_z. De aquí que podamos despreciar v_x^2 en comparación con $v_y^2 + v_z^2$ en la integral extendida al plano $x = x_1$. Así obtenemos,

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho \int\int (v_y^2 + v_z^2)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{47.3}$$

en donde la integración debe realizarse en todo el plano $x =$ constante, que está a una distancia grande detrás del cuerpo, excluyéndose la sección recta de la estela de la región de integración.†

El arrastre sobre un ala aerodinámica calculada de este modo puede expresarse en función de la circulación de la velocidad que determina también la sustentación. Para ello, observemos, en primer lugar, que, a distancia suficientemente grande del cuerpo, la velocidad depende sólo ligeramente de la coordenada x y así podemos considerar $v_y(y, z)$ y $v_z(y, z)$ como la velocidad de un flujo bidimensional, que se supone es independiente de x. Es conveniente utilizar como magnitud auxiliar la función de corriente (§ 10), de modo que $v_z = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial z$. Entonces,

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho \int\int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

en donde la integración respecto a la coordenada vertical y se extiende desde $+\infty$ hasta y_1 y desde y_2 hasta $-\infty$, siendo y_1 e y_2 las coordenadas de los límites superior e inferior de la estela (ver figura 18, § 37). Como tenemos fuera de la estela un flujo potencial (**rot v** $= 0$), $\partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2 = 0$. Utilizando la fórmula de Green bidimensional, se encuentra así

$$F_x = -\tfrac{1}{2}\rho \oint \psi(\partial\psi/\partial n)\mathrm{d}l,$$

en donde la integral se toma a lo largo de un contorno que limita la región de integración de la integral original y $\partial/\partial n$ designa la derivación en la dirección de la normal al contorno hacia fuera. En el infinito $\psi = 0$, y, por tanto, la integral se toma a lo largo del contorno de la sección recta de la estela originada por el plano yz, lo que da

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho \int \psi\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1\right]\mathrm{d}z.$$

† Para evitar malas interpretaciones, resaltemos lo siguiente. La fórmula (47.3) puede dar la impresión de que el orden de magnitud de las velocidades v_y, v_z, no disminuyen al aumentar x. Esto es cierto en tanto que el espesor de la estela sea pequeño en comparación con su anchura, como hemos visto al deducir la fórmula (47.3). A distancias muy grandes del ala, la estela se hace finalmente tan gruesa que resulta de sección aproximadamente circular. En este punto, la fórmula (47.3) deja de ser válida, y v_y, v_z, disminuyen rápidamente al aumentar x.

En este caso la integración se extenderá a la anchura de la estela y la diferencia que está entre corchetes es la discontinuidad de la derivada $\partial\psi/\partial y$ a través de la estela. Puesto que $\partial\psi/\partial y = v_z = \partial\phi/\partial z$, tenemos

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_1 = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z},$$

de modo que

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho \int \psi(\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}z)\mathrm{d}z.$$

Finalmente, utilizando una fórmula obtenida en la teoría del potencial,

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right] \log r \,\mathrm{d}l,$$

en donde la integración se realiza a lo largo de un contorno plano, r es la distancia desde dl hasta el punto en donde ha de calcularse ψ y la expresión entre corchetes es la discontinuidad dada de la derivada de ψ en la dirección normal al contorno.† En nuestro caso, el contorno de integración es un segmento del eje z, de modo que podemos escribir el valor de la función $\psi(y, z)$ sobre el eje z en la forma:

$$\psi(0, z) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2\right] \log|z - z'|\mathrm{d}z'$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}\Gamma(z')}{\mathrm{d}z'} \log|z - z'|\mathrm{d}z'.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en F_x, obtenemos la fórmula siguiente para la fuerza de arrastre inducida:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \frac{\mathrm{d}\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\Gamma(z')}{\mathrm{d}z'} \log|z - z'|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z' \qquad (47.4)$$

(L. PRANDTL, 1918). Se designa ahora la envergadura del ala por $l_z = l$, y se toma el origen de z en un extremo de la misma.

Si todas las dimensiones en la dirección z se aumentan por un factor determinado (permaneciendo Γ constante), la integral (47.4) sigue siendo

† En la teoría del potencial bidimensional, esta fórmula da el potencial debido a un contorno plano cargado con una densidad de carga

$$[(\partial\psi/\partial n)_2 - (\partial\psi/\partial n)_1]/2\pi.$$

constante.† Esto demuestra que el arrastre inducido total sobre el ala permanece en el mismo orden de magnitud cuando aumenta su envergadura. En otras palabras, el arrastre inducido por unidad de longitud del ala disminuye al aumentar la longitud.‡ A diferencia del arrastre, la fuerza de sustentación total

$$F_y = -\rho U \int \Gamma \, dz \tag{47.5}$$

aumenta casi linealmente con la envergadura del ala y es constante la fuerza de sustentación por unidad de longitud.

Para el cálculo real de las integrales (47.4) y (47.5) es conveniente utilizar el siguiente método. En lugar de la coordenada z, introduzcamos una nueva variable θ, definida por

$$z = \tfrac{1}{2}l(1-\cos\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi). \tag{47.6}$$

La distribución de la circulación de la velocidad se escribe en forma de una serie de Fourier:

$$\Gamma = -2Ul \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} n\theta. \tag{47.7}$$

La condición de que $\Gamma = 0$ en los extremos del ala ($z = 0$ y l, o bien, $\theta = 0$ y π) se ve entonces cumplida.

Sustituyendo la expresión (47.7) en (47.5) y efectuando la integración (utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ para $n \neq 1$), obtenemos $F_y = \frac{1}{2}\rho U^2 \pi l^2 A_1$. Así pues, la fuerza de sustentación depende sólo del primer coeficiente del desarrollo (47.7). Como valor del coeficiente de sustentación (46.2) tenemos

$$C_y = \pi \lambda A_1, \tag{47.8}$$

en donde hemos introducido el cociente $\lambda = l/l_x$ de la envergadura frente a la anchura del ala.

† Para evitar una interpretación incorrecta, debemos mencionar que no importa que el logaritmo dentro del integrando se vea aumentado en una constante al modificarse la unidad de longitud. En efecto, la integral que difiere de la que aparece en (47.4) porque tiene una constante en lugar de $\log|z-z'|$ es nula, ya que

$$\int (d\Gamma/dz)dz = \Gamma,$$

y la integral definida es nula debido a que Γ se anula en los bordes de la estela.

‡ En el límite de envergadura infinita, el arrastre inducido por unidad de longitud es cero. En realidad persiste una pequeña cantidad de arrastre, determinado por la descarga o caudal de la estela (es decir, la integral $\int\int v_x \, dy \, dz$), que hemos despreciado al deducir la fórmula (47.3). En este arrastre se incluye tanto el de rozamiento como la parte restante debida a la disipación en la estela.

Para calcular el arrastre volvamos a escribir la fórmula (47.4) integrando una vez por partes:

$$F_x = \frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \Gamma(z)\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\frac{dz'dz}{z-z'}. \tag{47.9}$$

Se ve fácilmente que la integral respecto a z' debe tomarse como un valor principal. Un cálculo elemental, con la sustitución (47.7),† conduce a la fórmula siguiente para el coeficiente de arrastre inducido:

$$C_x = \pi\lambda\sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \tag{47.10}$$

El coeficiente de arrastre en el caso de un ala se define como

$$C_x = F_x/\tfrac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z, \tag{47.11}$$

refiriéndose, como en el caso del coeficiente de sustentación, al área unidad en el plano xz.

PROBLEMA

Determinar el valor mínimo de la fuerza de arrastre inducida para una sustentación dada y una envergadura $l_z = l$ también dada.

Solución. A partir de las fórmulas (47.8) y (47.10) se ve que el valor mínimo de C_x para un valor dado de C_y (es decir, para un valor dado de A_1) se obtiene si todos los A_n correspondientes a $n \neq 1$ son cero. Entonces,

$$C_{x,\min} = C_y^2/\pi\lambda. \tag{1}$$

La distribución de la circulación de velocidades a lo largo de la envergadura viene dada por la fórmula

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l}Ul_x C_y\sqrt{[z(l-z)]}. \tag{2}$$

Si la envergadura es suficientemente grande, entonces el flujo a lo largo de cualquier sección recta del ala es, aproximadamente, un flujo bidimensional a lo largo de un ala

† Al integrar respecto a z' necesitamos la integral

$$P\int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}d\theta' = \frac{\pi \operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Al integrar respecto a z se hace uso del hecho de que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi \quad (m = n),$$
$$= 0 \quad (m \neq n).$$

de longitud infinita, pero de la misma sección recta. En este caso podemos decir que la distribución de la circulación (2) se obtiene para un ala cuya forma en el plano xz es un elipse con semieje $l_x/2$ y $l/2$.

§ 48. La sustentación de un ala delgada

El problema de calcular la fuerza de sustentación en el caso de un ala equivale, según el teorema de Zhukovskii, al de hallar la circulación de la velocidad Γ. Una solución general de este último problema puede darse en el caso de un ala aerodinámica delgada de envergadura infinita, siendo la sección recta constante en todo punto.† El elegante método de resolución que damos a continuación se debe a M. V. KELDYSH y L. I. SEDOV (1939).

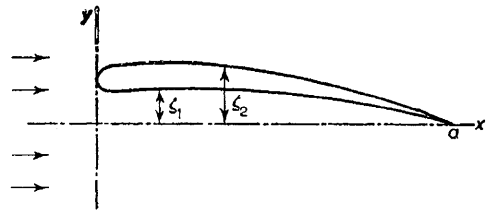

FIG. 27

Sean $y = \zeta_1(x)$ e $y = \zeta_2(x)$ las ecuaciones de las partes inferior y superior del perfil de la sección recta (figura 27). Supongamos que este perfil es delgado y curvado ligeramente, al mismo tiempo que está inclinado formando un pequeño ángulo de ataque respecto a la corriente principal (eje x); es decir, tanto las magnitudes ζ_1, ζ_2 como sus derivadas ζ_1', ζ_2' son pequeñas, lo que equivale a decir que la normal al contorno del perfil es, en todos los puntos, casi paralela al eje y. En estas condiciones podemos suponer que la perturbación $\mathbf{v}$ introducida en la velocidad del fluido y producida por la presencia del ala serán en todos los puntos‡ pequeña en comparación con la velocidad de la corriente principal U. La condición límite en la superficie del ala es $v_y/U = \zeta'$ para $y = \zeta$. En virtud de las hipótesis realizadas podemos suponer que esta condición es válida para $y = 0$ y no para $y = \zeta$. Entonces debemos tener en el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = l_x \equiv a$,

$$v_y = U\zeta_2'(x) \text{para} y \to 0+, \qquad v_y = U\zeta_1'(x) \text{para} y \to 0-. \tag{48.1}$$

† Una descripción más detallada de la teoría del flujo incompresible bidimensional junto a un ala viene dada por N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics* (*Teoreticheskaya gidromekhanika*), parte 1, 4.ª ed., Moscow, 1948; L. I. SEDOV, *Two-dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics* (*Ploskie zadachi gidrodinamiki i aérodinamiki*), Moscow, 1950.

‡ Excepto en una región pequeña cerca del borde de ataque redondeado del ala.

Con objeto de aplicar los métodos de la teoría de funciones de variable compleja introduzcamos la velocidad compleja $dw/dz = v_x - iv_y$ (ver § 10), que es una función analítica de la variable $z = x + iy$. En el caso presente esta función debe satisfacer las condiciones

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(dw/dz) &= -U\zeta_2'(x) \quad \text{para} \quad y \to 0+, \\ \operatorname{im}(dw/dz) &= -U\zeta_1'(x) \quad \text{para} \quad y \to 0-, \end{aligned} \tag{48.2}$$

sobre el segmento $(0, a)$ del eje de abscisas.

Para resolver el problema anterior, representaremos, en primer lugar, la distribución de velocidades requerida $\mathbf{v}(x, y)$ como una suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-$ de dos distribuciones que poseen las siguientes propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} v^-{}_x(x, -y) &= v^-{}_x(x, y), \qquad v^-{}_y(x, -y) = -v^-{}_y(x, y), \\ v^+{}_x(x, -y) &= -v^+{}_x(x, y), \qquad v^+{}_y(x, -y) = v^+{}_y(x, y). \end{aligned} \tag{48.3}$$

Estas propiedades de las distribuciones separadas $\mathbf{v}^-$ y $\mathbf{v}^+$ no violan la ecuación de continuidad ni la del flujo potencial y, puesto que el problema es lineal, pueden buscarse separadamente ambas distribuciones.

La velocidad compleja se representa en correspondencia como una suma

$$w' = w'_+ + w'_-,$$

y las condiciones límites en el segmento $(0, a)$ para los dos términos de la suma son

$$\begin{aligned} [\operatorname{im} w'_+]_{y\to 0+} &= [\operatorname{im} w'_+]_{y\to 0-} = -\tfrac{1}{2}U(\zeta_1' + \zeta_2'), \\ [\operatorname{im} w'_-]_{y\to 0+} &= -[\operatorname{im} w'_-]_{y\to 0-} = \tfrac{1}{2}U(\zeta_1' - \zeta_2'). \end{aligned} \tag{48.4}$$

La función w'_- puede determinarse de una vez por la fórmula de Cauchy:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

en donde la integración en el plano de la variable compleja ξ se toma a lo largo de una circunferencia L de radio pequeño centrada en el punto $\xi = z$ (figura 28). El contorno L puede sustituirse por una circunferencia C' de radio infinito y un contorno C que se recorre en el sentido de las agujas del reloj; este último puede deformarse o reducirse al segmento $(0, a)$ dos veces. La integral a lo largo de C' es cero, puesto que $w'(z)$ se anula en el infinito. La integral a lo largo de C da

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi) - \zeta_1'(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{48.5}$$

Aquí hemos utilizado los valores límites (48.4) de la parte imaginaria de w'_- sobre el segmento $(0, a)$, y el hecho de que, por las condiciones de simetría (48.3), la parte real de w'_- es continua a lo largo de este segmento.

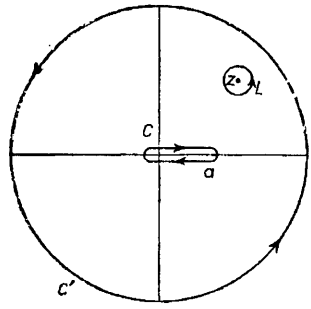

FIG. 28

Para hallar ahora la función w'_+, hemos de aplicar la fórmula de Cauchy, no a la propia función, sino al producto $w'_+(z)g(z)$, siendo $g(z) = \sqrt{[z/(z-a)]}$, y se toma la raíz cuadrada con el signo más para $z = x > a$. Sobre el segmento $(0, a)$ del eje real, la función $g(z)$ es puramente imaginaria y discontinua: $g(x + i0) = -g(x - i0) = -i\sqrt{[x/(a-x)]}$. Es evidente, a partir de estas propiedades de la función $g(z)$, que la parte imaginaria del producto gw'_+ es discontinua sobre el segmento $(0, a)$, mientras que la parte real es continua, lo mismo que sucede en el caso de la función w'_-. Así tenemos, exactamente como en la deducción de la fórmula (48.5),

$$w'_+(z)g(z) = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi)+\zeta_2'(\xi)}{\xi - z} g(\xi + i0)\,d\xi.$$

Reuniendo las expresiones anteriores tenemos la fórmula siguiente para la distribución de velocidades en el flujo que rodea a un ala delgada:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{U}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z}}\int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi)+\zeta_2'(\xi)}{\xi - z}\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}\,d\xi -$$

$$-\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi)-\zeta_1'(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \qquad (48.6)$$

Cerca del extremo delantero redondeado (es decir, para $z \to 0$), esta expresión se hace en general infinita, no siendo válida en esta región la aproximación utilizada anteriormente. Cerca del extremo de salida puntiagudo (es decir, para $z \to a$), el primer término de (48.6) es finito, pero el segundo término se hace infinito aunque sólo logarítmicamente.† Esta singularidad

† Esta divergencia desaparece si ζ_1 y ζ_2 se anulan de la forma $(a - x)^k$, $k > 1$, cerca del borde de salida, es decir, si el punto correspondiente a dicho borde es un punto anguloso.

logarítmica se debe a la aproximación utilizada y desaparece cuando se realiza un estudio más exacto; no existe entonces ninguna divergencia en ley de potencias en el extremo de salida de acuerdo con la condición de Zhukovskii-Chaplygin. Se obtiene el cumplimiento de esta condición mediante una selección apropiada de la función $g(z)$ utilizada anteriormente.

La fórmula (48.6) nos permite determinar inmediatamente la circulación de la velocidad Γ alrededor del perfil del ala. De acuerdo con la regla general (ver § 10), Γ viene dado por el residuo de la función $w'(z)$ en su polo simple $z = 0$. El residuo buscado se encuentra fácilmente como el coeficiente de $1/z$ en un desarrollo de $w'(z)$ en potencias de $1/z$ alrededor del punto en el infinito: $dw/dz = \Gamma/2\pi iz + \ldots$, y Γ viene dado por la fórmula sencilla

$$\Gamma = U \int_0^a (\zeta_1' + \zeta_2') \sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}} d\xi. \tag{48.7}$$

Podemos señalar que únicamente las sumas de las funciones ζ_1 y ζ_2 aparecen aquí. La fuerza de sustentación no se modifica si el ala delgada se sustituye por una placa doblada cuya forma venga dada por la función $(\zeta_1 + \zeta_2)/2$.

Por ejemplo, en el caso de un ala en forma de una placa delgada de longitud infinita, inclinada formando un pequeño ángulo de ataque α, tenemos $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a - x)$, y la fórmula (48.7) da $\Gamma = -\pi\alpha a U$. El coeficiente de sustentación para un ala de este tipo es $C_y = -\rho U\Gamma/\frac{1}{2}\rho U^2 a = 2\pi\alpha$.

CAPÍTULO V

CONDUCCIÓN TÉRMICA EN LOS FLUIDOS

§ 49. Ecuación general de la transferencia de calor

Se ha mencionado al final del § 2 que un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos debe contener cinco ecuaciones. En el caso de un fluido en el que se produzcan procesos de conducción térmica y rozamiento interno, una de estas ecuaciones es, como antes, la ecuación de continuidad y ahora se sustituyen las ecuaciones de Euler por las ecuaciones de Navier-Stokes. La quinta ecuación correspondiente a un fluido ideal es la ecuación de la conservación de entropía (2.6). Como es natural en un fluido viscoso esta ecuación deja de ser válida, puesto que se producen en su interior procesos irreversibles de disipación de energía.

En un fluido ideal la ley de conservación de la energía se expresa por la ecuación (6.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2+w)].$$

La expresión del primer miembro es la variación respecto al tiempo de la energía contenida en la unidad de volumen del fluido, mientras que el segundo miembro es la divergencia de la densidad de flujo de energía. En un fluido viscoso la ley de conservación de la energía, como es natural, sigue siendo válida: la variación por unidad de tiempo de la energía total del fluido en cualquier volumen debe seguir siendo igual al flujo total de energía a través de la superficie que limita dicho volumen. Sin embargo, la densidad de flujo de energía ahora tiene una forma diferente. Además del flujo $\rho\mathbf{v}(v^2/2 + w)$ debido a la transferencia simple de masa por el movimiento de fluido, existe también un flujo debido a los procesos de rozamiento interno. Este último flujo viene dado por el vector $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$, con componentes $v_i\sigma'_{ik}$ (ver § 16). Además, existe otro término que debe incluirse en el flujo de energía. Si no es constante la temperatura del fluido en todo su volumen, éste será, además de las dos medias de transferencia de energía indicadas anteriormente, una transferencia de calor por un mecanismo que se denomina *conducción térmica.* Esto significa la transferencia molecular desde

aquellos puntos en donde la temperatura es alta a los otros en donde es menor. En ella no interviene un movimiento macroscópico y se produce incluso en el caso de un fluido en reposo.

Designemos por **q** la densidad de flujo térmico debida a la conducción térmica. El flujo **q** está relacionado con la variación de temperatura a través del fluido. Esta relación puede escribirse de un modo simple en aquellos casos en que el gradiente de temperatura en el fluido no es grande; en los fenómenos de conducción térmica casi siempre estaremos dentro de estos casos. Podemos entonces desarrollar **q** como una serie de potencias del gradiente de temperatura, y tomar únicamente el primer término del desarrollo. El término constante es evidentemente cero, puesto que **q** debe anularse cuando **grad** T se anule. Así pues, tenemos

$$\mathbf{q} = -\kappa \,\mathbf{grad}\, T. \tag{49.1}$$

La constante κ se denomina *conductividad térmica*. Es siempre positiva, como puede verse considerando que el flujo de energía debe transcurrir desde los puntos de temperatura más alta a aquellos en donde la temperatura es menor. Es decir, **q** y **grad** T deben tener sentidos opuestos. El coeficiente κ es, en general, una función de la temperatura y de la presión.

Así pues, el flujo de energía total en un fluido cuando existe viscosidad y conducción térmica es $\rho\mathbf{v}(v^2/2 + w) - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}' - \kappa\,\mathbf{grad}\,T$. De acuerdo con esto, la ley general de la conservación de energía viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}' - \kappa\,\mathbf{grad}\,T]. \tag{49.2}$$

Podremos tomar esta ecuación para completar el sistema de ecuaciones fluido-mecánicas de un fluido viscoso. Sin embargo, es conveniente ponerla en otra forma transformándola con ayuda de las ecuaciones del movimiento. Para ello, calculemos la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad de fluido a partir de las ecuaciones del movimiento. Tenemos así

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Sustituyendo $\partial\rho/\partial t$ despejada de la ecuación de continuidad y $\partial\mathbf{v}/\partial t$ de la ecuación de Navier-Stokes, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\tfrac{1}{2}v^2\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\tfrac{1}{2}v^2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p +$$

$$+ v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} + \rho\frac{\partial\epsilon}{\partial t} - \epsilon\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}).$$

Utilizando ahora la relación termodinámica $d\epsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + (p/\rho^2)d\rho$, se tiene

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Sustituyendo esta expresión e introduciendo la función entalpía $w = \epsilon + p/\rho$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -(\tfrac{1}{2}v^2 + w)\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\tfrac{1}{2}v^2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p + \\ + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} + v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

A continuación, y a partir de la relación termodinámica $dw = T\,ds + dp/\rho$, tenemos $\mathbf{grad}\,p = \rho\,\mathbf{grad}\,w - \rho T\,\mathbf{grad}\,s$. El último término del segundo miembro de la ecuación anterior puede escribirse

$$v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Sustituyendo estas expresiones y sumando y restando $\operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}' - \kappa\,\mathbf{grad}\,T] + \\ + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T). \qquad (49.3)$$

Comparando esta expresión para la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad con (49.2), tenemos

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T). \qquad (49.4)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación general de transferencia térmica.* Si no existe viscosidad ni conducción térmica el segundo miembro es cero y se obtiene la ecuación de la conservación de entropía (2.6) correspondiente a un fluido ideal.

Debe señalarse también la interpretación siguiente de la ecuación (49.4). La expresión del primer miembro coincide exactamente con la derivada temporal total ds/dt de la entropía, multiplicada por ρT. La magnitud ds/dt da la variación respecto al tiempo de la entropía de una masa unidad de fluido cuando se mueve a lo largo del espacio y, por tanto, $T\,ds/dt$ es la cantidad de calor que gana dicha unidad de masa en el tiempo unidad, de modo que $\rho T\,ds/dt$ es la cantidad de calor que gana por unidad de volumen. Vemos,

a partir de (49.4), que la cantidad de calor adquirido por unidad de volumen del fluido es, por tanto,

$$\sigma'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k + \operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T).$$

El primer término de esta expresión es la energía disipada en calor por la viscosidad, y el segundo es el calor conducido hacia el interior del volumen considerado.

Desarrollemos el término $\sigma'_{ik}\partial v_i/\partial x_k$ en (49.4) sustituyendo σ'_{ik} por la expresión (15.3). Tenemos

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Es fácil comprobar que el primer término puede escribirse como

$$\tfrac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2,$$

y el segundo es

$$\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2.$$

Así pues, la ecuación (49.4) se convierte en

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\right) = \operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T)+\tfrac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2. \tag{49.5}$$

La entropía del fluido aumenta como resultado de los procesos irreversibles de conducción térmica y de rozamiento interno. Aquí, como es natural, no estudiamos la entropía de cada elemento de volumen de fluido por separado, sino la entropía total del fluido completo, que es igual a la integral

$$\int \rho s\,\mathrm{d}V.$$

La variación de entropía por unidad de tiempo viene dada por la derivada

$$\mathrm{d}[\textstyle\int \rho s\,\mathrm{d}V]/\mathrm{d}t = \int[\partial(\rho s)/\partial t]\mathrm{d}V.$$

Utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación (49.5) tenemos

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \rho\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial \rho}{\partial t} = -s\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s+\frac{1}{T}\operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T)+$$
$$+\frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\frac{\zeta}{T}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2.$$

Los dos primeros términos del segundo miembro dan juntos $-\operatorname{div}(\rho s\mathbf{v})$. La integral de volumen de esta expresión se transforma en la integral del flujo de la entropía $\rho s\mathbf{v}$ sobre la superficie. Si consideramos un volumen no limitado del fluido en reposo y en el infinito, la superficie del límite puede trasladarse hacia el infinito; el integrando en la integral de superficie es entonces cero y por la misma razón se anula la propia integral. La integral del tercer término del segundo miembro se transforma del modo siguiente:

$$\int \frac{1}{T}\operatorname{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\,T)\mathrm{d}V = \int \operatorname{div}\left(\frac{\kappa\,\mathbf{grad}\,T}{T}\right)\mathrm{d}V + \int \frac{\kappa(\mathbf{grad}\,T)^2}{T^2}\mathrm{d}V.$$

Suponiendo que la temperatura del fluido tiende con suficiente rapidez a un valor constante en el infinito, podemos transformar la primera integral en otra extendida a una superficie infinitamente remota, sobre la cual $\mathbf{grad}\,T = 0$ y, por tanto, se anula la integral.

El resultado es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho s\,\mathrm{d}V = \int \frac{\kappa(\mathbf{grad}\,T)^2}{T^2}\mathrm{d}V + \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 \mathrm{d}V + \\ + \int \frac{\zeta}{T}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2\,\mathrm{d}V. \qquad (49.6)$$

El primer término del segundo miembro es la variación respecto al tiempo del aumento de entropía debido a la conducción térmica, y los otros dos términos dan la variación respecto al tiempo del aumento debido al rozamiento interno. La entropía solamente puede aumentar; es decir, la suma en el segundo miembro de (49.6) debe ser positiva. En cada término el integrando puede ser no nulo aunque se anulen las otras dos integrales. De aquí se deduce que el segundo coeficiente de viscosidad ζ es positivo, lo mismo que κ y η, que ya sabíamos que eran positivos.

En la deducción de la fórmula (49.1) se ha supuesto tácitamente que el flujo térmico dependía únicamente del gradiente de temperaturas y no del gradiente de presiones. Esta hipótesis, que no es evidente *a priori*, puede justificarse ahora del modo siguiente. Si $\mathbf{q}$ contuviese un término proporcional a $\mathbf{grad}\,p$, la expresión (49.6) para la variación respecto al tiempo de la entropía debería incluir otro término que incluyera el producto $\mathbf{grad}\,p$ por $\mathbf{grad}\,T$ en el integrando. Puesto que este último puede ser positivo o negativo, la derivada respecto al tiempo de la entropía no sería necesariamente positiva, lo cual es imposible.

Finalmente, los razonamientos anteriores deben también refinarse en el aspecto siguiente. Estrictamente, en un sistema que no esté en equilibrio termodinámico, como un fluido con gradientes de velocidad y de temperatura, las definiciones normales de las magnitudes termodinámicas dejan de tener significado y deben modificarse. Las definiciones necesarias son, en

primer lugar, que ρ, ϵ y $\mathbf{v}$ se definen como antes: ρ y $\rho\epsilon$ son la masa y la energía interna por unidad de volumen y $\mathbf{v}$ es el impulso de la unidad de masa de fluido. Las restantes magnitudes termodinámicas se definen entonces como si fuesen las mismas funciones de ρ y ϵ correspondientes al equilibrio térmico. Sin embargo, la entropía $s = s(p, \epsilon)$ deja de ser la verdadera entropía termodinámica: la integral

$$\int \rho s \, dV$$

no es estrictamente hablando la magnitud que debe aumentar con el tiempo. No obstante, es fácil de ver que, en el caso de gradientes de velocidad y de temperatura pequeños, s es la misma que la entropía verdadera en la aproximación que hemos utilizado. Porque, si existen gradientes, se originan en general términos adicionales [además de $s(\rho, \epsilon)$] en la entropía. Sin embargo, los resultados dados anteriormente pueden alterarse únicamente mediante términos que sean lineales en los gradientes (por ejemplo, un término proporcional a la magnitud escalar div $\mathbf{v}$). Dichos términos necesariamente deberían tomar tanto valores positivos como negativos. Pero, por otra parte, han de ser definidos negativos, puesto que el valor de equilibrio $s = s(\rho, \epsilon)$ es el valor máximo posible. De aquí que el desarrollo de la entropía en potencias de gradientes pequeños puede contener (a parte del término de orden cero) solamente términos de segundo orden y órdenes superiores.

También deben hacerse advertencias semejantes en § 15 (ver la primera nota a pie de página de dicha sección), puesto que la presencia de sólo un gradiente de velocidades implica la ausencia de equilibrio termodinámico. La presión p que aparece en la expresión correspondiente al tensor de densidad de flujo del impulso en un fluido viscoso, debe considerarse como la misma función $p = p(\rho, \epsilon)$ que en el equilibrio térmico. En este caso p no será, estrictamente hablando, la presión en el sentido normal, es decir, la fuerza normal sobre un elemento de superficie. A diferencia de lo que ocurre en el caso de la entropía (ver anteriormente), existe ahora una diferencia resultante de la comparación entre el gradiente pequeño y el desarrollo en primer orden; hemos visto que el componente normal de la fuerza incluye, además de p, un término proporcional a div $\mathbf{v}$ (en un fluido incompresible, este término es cero y la diferencia es entonces de orden superior).

Así pues, los tres coeficientes η, ζ, κ que aparecen en las ecuaciones del movimiento de un fluido conductor viscoso determinan completamente las propiedades fluido-mecánicas del fluido en la aproximación considerada (es decir, cuando se desprecian las derivadas espaciales de orden superior de la velocidad, de la temperatura, etc). La introducción de unos términos adicionales cualesquiera (por ejemplo, la inclusión en la densidad de flujo de masa de términos proporcionales al gradiente de densidad o de temperaturas) carece de significado físico y significaría, como mínimo, una variación en la

definición de las magnitudes básicas: en particular, la velocidad dejaría de ser el impulso de la unidad de masa del fluido.†

§ 50. Conducción térmica en un fluido incompresible

La ecuación general de la conducción térmica (49.4) o (49.5) puede simplificarse de modo considerable en ciertos casos. Si la velocidad del fluido es pequeña en comparación con la velocidad del sonido, las variaciones de presión que se producen como resultado del movimiento son tan pequeñas que la variación en la densidad (y en las demás magnitudes termodinámicas) producidas por ellas pueden despreciarse. Sin embargo, un fluido que esté calentado de modo no uniforme ya no es completamente incompresible en el sentido utilizado anteriormente. La razón es que la densidad varía con la temperatura; esta variación ya no puede despreciarse en general y, por lo tanto, incluso a velocidades pequeñas, la densidad de un fluido que está caliente de modo no uniforme no puede considerarse constante. Al determinar las derivadas de las magnitudes termodinámicas en este caso, es necesario, por tanto, suponer que la presión y no la densidad es constante. Así pues, tenemos

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \mathbf{grad}\, s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathbf{grad}\, T,$$

y, puesto que $T(\partial s/\partial T)_p$ es el calor específico a presión constante c_p, obtenemos $T\partial s/\partial t = c_p \partial T/\partial t$, $T\,\mathbf{grad}\, s = c_p\,\mathbf{grad}\, T$. La ecuación (49.4) se transforma en

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, T\right) = \mathrm{div}(\kappa\,\mathbf{grad}\, T) + \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{50.1}$$

Si ha de suponerse la densidad constante en las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido caliente de modo no uniforme, es necesario que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido y también que sean pequeñas las diferencias de temperaturas en el interior del fluido. Resaltemos que queremos decir valores reales de la diferencia de

† Y lo que es peor, la inclusión de dichos términos podría violar las leyes de conservación necesarias. Debe recordarse que, independientemente de las definiciones utilizadas, la densidad de flujo de masa **j** debe ser siempre igual al impulso por unidad de volumen del fluido. En efecto, **j** se define mediante la ecuación de continuidad,

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0;$$

multiplicándola por **r** e integrando respecto a la totalidad del volumen, se tiene

$$\mathrm{d}\left(\int \rho\mathbf{r}\,\mathrm{d}V\right)/\mathrm{d}t = \int \mathbf{j}\,\mathrm{d}V,$$

y resulta claro que la integral $\int \mathbf{j}\,\mathrm{d}V$ es el impulso, puesto que la integral $\int \rho\mathbf{r}\,\mathrm{d}V$ determina la posición del centro de masas.

temperatura y no el gradiente de temperaturas. Entonces el fluido puede suponerse incompresible en el sentido normal, y, en particular, la ecuación de continuidad es simplemente div $\mathbf{v} = 0$. Suponiendo que las diferencias de temperaturas son pequeñas, podemos despreciar también la variación con la temperatura de η, κ y c_p, suponiéndolas constantes. Escribiendo el término $\sigma'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k$ como en (49.5), obtenemos la ecuación de la transferencia térmica en un fluido incompresible de la forma comparativamente sencilla siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,T = \chi \triangle T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{50.2}$$

en donde $\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática, y en donde hemos escrito κ en función de la *conductividad termométrica*, definida como

$$\chi = \kappa/\rho c_p. \tag{50.3}$$

La ecuación de transferencia térmica es particularmente sencilla en el caso de un fluido incompresible en reposo, en el cual la transferencia de energía se debe totalmente a la conducción térmica. Omitiendo en (50.2) aquellos términos en los que interviene la velocidad, tenemos simplemente

$$\partial T/\partial t = \chi \triangle T. \tag{50.4}$$

Esta ecuación se denomina en física matemática *ecuación de la conducción térmica* o *ecuación de Fourier*. Como es natural, puede obtenerse de modo mucho más sencillo sin utilizar la ecuación general de transferencia térmica en el fluido móvil. De acuerdo con la ley de la conservación de la energía, la cantidad de calor absorbida en un volumen determinado en la unidad de tiempo debe ser igual al flujo térmico total que entra en dicho volumen a través de la superficie que lo limita. Como sabemos, dicha ley de conservación puede expresarse como una «ecuación de continuidad» para la cantidad de calor. Esta ecuación se obtiene igualando la cantidad de calor absorbida en la unidad de volumen por unidad de tiempo a la divergencia de la densidad del flujo térmico con signo menos. La primera vale $\rho c_p\,\partial T/\partial t$; debemos tomar ahora el calor específico c_p, puesto que la presión es naturalmente constante en todo el fluido en reposo. Igualando esta expresión a $-\operatorname{div}\mathbf{q} = \kappa \triangle T$, obtenemos la ecuación (50.4).

Debe mencionarse que la aplicabilidad de la ecuación de la conducción térmica (50.4) a los fluidos es realmente muy limitada. La razón es que en el caso de fluidos en el interior de un campo gravitatorio, incluso un gradiente de temperaturas muy pequeño da como resultado normalmente un movimiento considerable (*convección*, ver § 56). De aquí que podemos tener realmente un fluido en reposo con una distribución de temperaturas no uniforme únicamente si el sentido del gradiente de temperaturas es opuesto al de las fuerzas gravitatorias o si el fluido es muy viscoso. Sin embargo, es muy importante un estudio de la ecuación de la conducción térmica en

la forma (50.4), puesto que se describen los procesos de conducción en los sólidos mediante una ecuación de la misma forma. Por tanto, consideraremos esta expresión con más detalle en §§ 51 y 52.

Si la distribución de temperaturas en un medio caliente de modo no uniforme en reposo se mantiene constante en el tiempo (mediante alguna fuente externa de calor), la ecuación de la conducción térmica se transforma en

$$\triangle T = 0. \tag{50.5}$$

Así pues, una distribución de temperaturas estacionarias en un medio en reposo satisface la ecuación de Laplace. En el caso más general en que κ no puede considerarse como constante, tenemos en lugar de (50.5) la ecuación

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{\mathbf{grad}} T) = 0. \tag{50.6}$$

Si el fluido contiene fuentes o focos externos de calor (por ejemplo, la calefacción mediante una corriente eléctrica), la ecuación de la conducción térmica debe contener de modo correspondiente otro término. Sea Q la cantidad de calor generada por estas fuentes en la unidad de volumen del fluido y por unidad de tiempo; Q es, en general, una función de las coordenadas y del tiempo. Entonces la ecuación de balance térmico, es decir, la ecuación de la conducción térmica es

$$\rho c_p \partial T/\partial t = \kappa \triangle T + Q. \tag{50.7}$$

Describamos a continuación las condiciones límites de la ecuación de la conducción térmica que son válidas entre dos medios. Ante todo, las temperaturas de ambos medios deben ser iguales en su frontera:

$$T_1 = T_2. \tag{50.8}$$

Además, el flujo térmico que sale de un medio debe ser igual al flujo térmico que entra en el otro. Tomando un sistema de coordenadas, en el que la parte de la frontera o límite considerado esté en reposo, podemos escribir esta condición como $\kappa_1 \operatorname{\mathbf{grad}} T_1 \cdot \mathbf{df} = \kappa_2 \operatorname{\mathbf{grad}} T_2 \cdot \mathbf{df}$ para cada elemento de superficie $\mathbf{df}$. Poniendo $\operatorname{\mathbf{grad}} T \cdot \mathbf{df} = (\partial T/\partial n)df$, siendo $\partial T/\partial n$ la derivada de T a lo largo de la normal a la superficie, obtenemos la condición límite en la forma

$$\kappa_1 \partial T_1/\partial n = \kappa_2 \partial T_2/\partial n. \tag{50.9}$$

Si existen en la superficie de separación focos externos de calor que generen una cantidad de calor $Q^{(s)}$ en la unidad de área y por unidad de tiempo, entonces (50.9) debe sustituirse por

$$\kappa_1 \partial T_1/\partial n - \kappa_2 \partial T_2/\partial n = Q^{(s)}. \tag{50.10}$$

En los problemas físicos en donde intervenga la distribución de temperaturas en presencia de focos térmicos, la intensidad de estos últimos viene dada normalmente como una función de la temperatura. Si la función $Q(T)$

aumenta con rapidez suficiente con T, puede ser imposible establecer una distribución de temperaturas estacionarias en un cuerpo cuyas fronteras se mantienen en condiciones fijas (por ejemplo, a una temperatura dada). La pérdida de calor a través de la superficie externa del cuerpo es proporcional a cierto valor medio de la diferencia de temperaturas $T - T_0$ entre el cuerpo y el medio externo, independientemente de la ley de generación térmica dentro del cuerpo; es evidente que, si la generación de calor aumenta de modo suficientemente rápido con la temperatura, la pérdida de calor puede ser inadecuada para obtener un estado de equilibrio.

La imposibilidad de establecer un estado térmico estacionario forma la base de la *teoría térmica de las explosiones* desarrollada por N. N. SEMENOV (1928): «Si la velocidad de una reacción de combustión isotérmica aumenta con suficiente rapidez con la temperatura, la imposibilidad de una distribución estacionaria conduce a una ignición rápidamente no estacionaria de la sustancia y a una aceleración de la reacción hacia una explosión térmica». D. A. FRANK-KAMENETSKI ha dado una teoría cuantitativa para el caso en que la generación térmica sea una función exponencial de la temperatura (ver problema 1).†

PROBLEMAS

Problema 1. Focos térmicos de magnitud $Q = Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$ están distribuidos por unidad de volumen en una capa de material limitado por dos planos paralelos infinitos que se mantienen a temperatura constante T_0. Hallar la condición para que sea posible una distribución estacionaria de temperaturas.

Solución. La ecuación correspondiente a la conducción térmica estacionaria es ahora

$$\kappa \, \mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2 = -Q_0 e^{\alpha(T-T_0)},$$

con las condiciones límites $T = T_0$ para $x = 0$ y $x = 2l$ (siendo $2l$ el espesor de la capa). Introduzcamos las variables adimensionales $\tau = \alpha(T - T_0)$ y $\xi = x/l$. Entonces,

$$\tau'' + \lambda e^{\tau} = 0, \qquad \lambda = Q_0 \alpha l^2/\kappa.$$

Integramos esta ecuación una vez (después de multiplicar por $2\tau'$) y encontramos

$$\tau'^2 = 2\lambda(e^{\tau_0} - e^{\tau}),$$

siendo τ_0 una constante, que evidentemente es el valor máximo de τ; por simetría, este

† La velocidad de las reacciones explosivas de combustión y, por tanto, la velocidad de generación de calor, depende de la temperatura, aproximadamente como $e^{-U/RT}$, siendo grande la constante U. FRANK-KAMENETSKI ha demostrado que, para investigar las condiciones necesarias para que se produzca una explosión térmica, debemos considerar el curso de la reacción cuando la ignición de la sustancia es comparativamente lenta y, por consiguiente, sustituir $e^{-U/RT}$ por e^{-U/RT_0}, $e^{U(T-T_0)/RT_0^2}$, siendo T_0 la temperatura externa. Puede verse un estudio más detallado en el texto de D. A. FRANK-KAMENETSKI, *Difussion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*, Princeton, 1955.

valor debe alcanzarse en el punto medio de la capa, es decir, para $\xi = 1$. De aquí que una segunda integración, con la condición $\tau = 0$ para $\xi = 0$, dé

$$\frac{1}{\sqrt{(2\lambda)}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{(e^{\tau_0} - e^{\tau})}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Efectuando la integración, tenemos

$$e^{-\frac{1}{2}\tau_0} \operatorname{arcosh} e^{\frac{1}{2}\tau_0} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\lambda)}. \tag{1}$$

La función $\lambda(\tau_0)$ determinada por esta ecuación tiene un máximo $\lambda = \lambda_{cr}$ para un valor definido $\tau_0 = \tau_{0,cr}$; si $\lambda > \lambda_{cr}$, no existe ninguna solución que satisfaga las condiciones límites.† Los valores numéricos son $\lambda_{cr} = 0{,}88$, $\tau_{0,cr} = 1{,}2$.‡

Problema 2. Una esfera está sumergida en un fluido en reposo, en el cual se mantiene un gradiente de temperaturas constante. Determinar la distribución de temperaturas estacionarias resultante en el fluido y en la esfera.

Solución. La distribución de temperaturas satisface la ecuación $\Delta T = 0$ en todo el espacio, con las condiciones límites

$$T_1 = T_2, \qquad \kappa_1 \partial T_1/\partial r = \kappa_2 \partial T_2/\partial r$$

para $r = R$ (siendo R el radio de la esfera; las magnitudes con sufijos 1 y 2 se refieren, respectivamente, a la esfera y al fluido), y $\mathbf{grad}\, T = \mathbf{A}$ en el infinito, en donde $\mathbf{A}$ es el gradiente de temperaturas dado. Por la simetría del problema, $\mathbf{A}$ es el único vector que puede determinar la solución requerida. Dichas soluciones de la ecuación de Laplace son el producto de una constante $\times\, \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ y constante $\times\, \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}(1/r)$. Observando también que la solución debe permanecer finita en el centro de la esfera, buscaremos las temperaturas T_1 y T_2 en las formas

$$T_1 = c_1 \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}, \qquad T_2 = c_2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}/r^3 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}.$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones para $r = R$, siendo el resultado

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}, \qquad T_2 = \left[1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}.$$

§ 51. Conducción térmica en un medio infinito

Consideremos la conducción térmica en un medio infinito en reposo. El problema más general de este tipo es el siguiente. La distribución de temperaturas viene dada en todo el espacio en el instante inicial $t = 0$:

$$T = T_0(x, y, z) \text{ para } t = 0,$$

† Únicamente corresponde a una distribución estable de temperaturas la menor de las dos raíces de la ecuación (1) para $\lambda < \lambda_{cr}$.

‡ Los valores correspondientes a una región esférica (de radio l) son $\lambda_{cr} = 3{,}32$, $\tau_{0,cr} = 1{,}47$, y a un cilindro infinito $\lambda_{cr} = 2{,}00$, $\tau_{0,cr} = 1{,}36$.

en donde T_0 es una función determinada de las coordenadas. Se necesita determinar la distribución de temperaturas en todos los instantes siguientes.

Desarrollemos la función T requerida como una integral de Fourier respecto a las coordenadas:

$$T = \int T_{\mathbf{k}}(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{k}, \qquad \mathrm{d}^3\mathbf{k} = \mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z, \tag{51.1}$$

en donde los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$T_{\mathbf{k}}(t) = (2\pi)^{-3}\int T(x',y',z',t)\exp(-\mathbf{k}i\cdot\mathbf{r}')\mathrm{d}V', \qquad \mathrm{d}V' = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'.$$

Sustituyendo la expresión (51.1) en la ecuación (50.4), obtenemos

$$\int\left(\frac{\mathrm{d}T_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} + k^2\chi T_{\mathbf{k}}\right)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{k} = 0,$$

de aquí que

$$\mathrm{d}T_{\mathbf{k}}/\mathrm{d}t + k^2\chi T_{\mathbf{k}} = 0.$$

Esta ecuación da T_k como función del tiempo:

$$T_{\mathbf{k}} = \exp(-k^2\chi t)T_{0\mathbf{k}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (51.1), tendremos

$$T = \int T_{0\mathbf{k}}\exp(-k^2\chi t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}. \tag{51.2}$$

Como debemos tener $T = T_0(x, y, z)$ para $t = 0$, es evidente que los coeficientes T_{0k} son los coeficientes del desarrollo de la función $T_0(x, y, z)$ como una integral de Fourier:

$$T_{0\mathbf{k}} = (2\pi)^{-3}\int T_0(x',y',z')\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en (51.2), obtenemos

$$T = (2\pi)^{-3}\int\int T_0(x',y',z')\exp(-k^2\chi t)\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}^3\mathbf{k}.$$

La integral extendida a $\mathbf{k}$ es el producto de tres integrales simples, cada una de ellas de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-k_x^2\chi t)\exp[ik_x(x-x')]\mathrm{d}k_x = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-k_x^2\chi t)\cos k_x(x-x')\,\mathrm{d}k_x;$$

la integral análoga sustituyendo el coseno por el seno es cero, puesto que la función seno es impar. Utilizando la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \sqrt{(\pi/\alpha)}\exp(-\beta^2/4\alpha) \qquad (\alpha > 0),$$

tenemos, finalmente,

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}}\int T_0(x',y',z')\times \exp\{-[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]/4\chi t\}\,\mathrm{d}V'. \tag{51.3}$$

Esta fórmula nos da la solución completa del problema; determina la distribución de temperaturas en un instante cualquiera en función de la distribución inicial dada.

Si la distribución de temperaturas inicial es una función de una sola coordenada, x, entonces podemos integrar respecto a y' y z' en (51.3) y obtener

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x') \exp[-(x-x')^2/4\chi t]\, dx'. \qquad (51.4)$$

En el instante $t = 0$, supongamos que la temperatura es cero en todo el espacio, excepto en una capa infinitamente delgada situada en el plano $x = 0$, en donde es infinita de un modo tal que la cantidad de calor total [proporcional a $\int T_0(x)dx$] es finita. Dicha distribución puede representarse mediante una función delta: $T_0(x) = \text{constante} \times \delta(x)$. La integración de la fórmula (51.4) equivale entonces a sustituir x' por cero, cuyo resultado es

$$T(x,t) = \text{constante} \times \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \exp(-x^2/4\chi t). \qquad (51.5)$$

Análogamente, si en el instante inicial se concentra una cantidad finita de calor en un punto (el origen), la distribución de temperaturas en instantes siguientes viene dada por la fórmula

$$T(r,t) = \text{constante} \times \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \exp(-r^2/4\chi t), \qquad (51.6)$$

en donde r es la distancia desde el origen. En el transcurso del tiempo, la temperatura en el punto $r = 0$ decrece proporcionalmente a $t^{-3/2}$. La temperatura en el espacio que lo rodea se eleva de modo correspondiente y la región en donde la temperatura es apreciablemente distinta de cero se expande (figura 29). El modo de esta expansión viene determinado, principalmente, por el factor exponencial en (51.6). Vemos que el orden de magnitud l del tamaño de esta región viene dado por $l^2/\chi t \sim 1$, de aquí

$$l \sim \sqrt{(\chi t)}, \qquad (51.7)$$

es decir, l aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo.

También puede interpretarse la fórmula (51.7) de un modo ligeramente distinto. Sea l el orden de magnitud de las dimensiones de un cuerpo. Entonces podemos decir que, si el cuerpo se calienta de modo no uniforme, el orden de magnitud τ del tiempo requerido para que la temperatura sea más o menos la misma en todo el cuerpo es

$$\tau \sim l^2/\chi. \qquad (51.8)$$

El tiempo τ, que puede denominarse *tiempo de relajación* para la conducción térmica, es proporcional al cuadrado de la dimensión del cuerpo e inversamente proporcional a la conductividad termométrica.

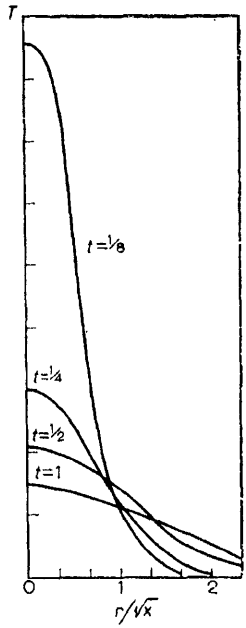

FIG. 29

El proceso de conducción térmica descrito por las fórmulas obtenidas anteriormente tiene la propiedad de que el efecto que produce una perturbación cualquiera se propaga instantáneamente a través de todo el espacio. Se ve en la fórmula (51.5) que el calor procedente de una fuente puntual se propaga de tal manera que, incluso en el instante siguiente, la temperatura del medio es cero únicamente en el infinito. Esta propiedad es válida también para un medio en el que la conductividad termométrica χ depende de la temperatura, con tal que χ no se anule en algún punto. Sin embargo, si χ es una función de la temperatura que se anula cuando $T = 0$, se retarda la propagación del calor y en cada instante el efecto de una perturbación determinada se extiende sólo a una región finita del espacio (supondremos que la temperatura fuera de esta región puede tomarse también como cero). Este resultado, lo mismo que la solución de los problemas siguientes, se debe a YA. B. ZEL'DOVICH y A. S. KOMPANEETS (1950).

PROBLEMAS

Problema 1. El calor específico y la conductividad térmica de un medio varían proporcionalmente a ciertas potencias de la temperatura, mientras que su densidad es constante. Determinar el modo en que la temperatura tiende hacia cero cerca del límite de

la región que, en un instante dado, ha recibido un calor que se propaga a partir de una fuente arbitraria (siendo cero la temperatura del exterior de dicha región).

Solución. Si κ y c_p varían proporcionalmente a potencias de la temperatura, lo mismo es cierto en el caso de la conductividad termométrica χ y en el caso de la entalpía

$$w = \int c_p \, \mathrm{d}T$$

(omitimos una constante en w). Por tanto, podemos escribir $\chi = aW^n$, en donde designamos por $W = \rho w$ la entropía por unidad de volumen. Entonces, la ecuación de conducción térmica

$$\rho c_p \, \partial T/\partial t = \operatorname{div}(\kappa \, \mathbf{grad}\, T)$$

se transforma en

$$\partial W/\partial t = a \operatorname{div}(W^n \, \mathbf{grad}\, W). \tag{1}$$

Durante un intervalo breve de tiempo, puede considerarse como plana una pequeña porción del límite de la región y su velocidad de desplazamiento en el espacio, v, puede suponerse constante. De acuerdo con ello, busquemos una solución de la ecuación (1) en la forma $W = W(x - vt)$, siendo x la coordenada en la dirección perpendicular a la frontera. Tenemos así

$$-v \, \mathrm{d}W/\mathrm{d}x = a\mathrm{d}(W^n \, \mathrm{d}W/\mathrm{d}x)/\mathrm{d}x, \tag{2}$$

de aquí que, encontremos después de dos integraciones, que W se anula de una forma como

$$W \sim |x|^{1/n}, \tag{3}$$

en donde $|x|$ es la distancia respecto a los límites o fronteras de la región caliente. Esto confirma también nuestra conclusión de que si $n > 0$, la región calentada tiene un límite exterior, en el cual W y T son cero. Si $n < 0$, entonces la ecuación (2) no tiene ninguna solución que se anule a una distancia finita, es decir, el calor se distribuye por todo el espacio en todo instante.

Problema 2. Un medio semejante al descrito en el problema 1 tiene en el instante inicial una cantidad de calor Q por unidad de área concentrada sobre el plano $x = 0$, mientras que $T = 0$ en todos los demás puntos. Determinar la distribución de temperaturas en los instantes subsiguientes.

Solución. En el caso monodimensional, la ecuación (1) del problema 1 es

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(W^n \frac{\partial W}{\partial x}\right). \tag{1}$$

A partir de los parámetros Q y a y de las variables x y t que tenemos a nuestra disposición, solamente podemos formar una combinación adimensional,

$$\xi = x/(Q^n a t)^{1/(2+n)}; \tag{2}$$

Q y a tienen las dimensiones erg/cm^2 y (cm^2/s) (cm^3/erg)^n. De aquí que la función requerida $W(x, t)$ deba ser de la forma

$$W = (Q^2/at)^{1/(2+n)} f(\xi), \tag{3}$$

en donde la función adimensional $f(\xi)$ se multiplica por una magnitud que tiene las dimensiones erg/cm³. Con esta sustitución la ecuación (1) da

$$(2+n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(f^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right)+\xi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}+f=0.$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene una solución simple que satisface las condiciones del problema, a saber

$$f(\xi)=[\tfrac{1}{2}n(\xi_0{}^2-\xi^2)/(2+n)]^{1/n}, \tag{4}$$

siendo ξ_0 una constante de integración.

Para $n>0$, esta fórmula da la distribución de temperaturas en la región comprendida entre los planos $x=\pm x_0$ correspondientes a la ecuación $\xi=\pm\xi_0$; fuera de esta región, $W=0$. De aquí se deduce que la región caliente se extiende o expansiona con el tiempo de un modo dado por $x_0=$ constante $\times\, t^{1/(2+n)}$. La constante ξ_0 se determina por la condición de que la cantidad de calor total es constante:

$$Q=\int_{-x_0}^{x_0}W\,\mathrm{d}x=Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{5}$$

de aquí tenemos

$$\xi_0{}^{2+n}=\frac{(2+n)^{1+n}2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma^n(\frac{1}{2}+1/n)}{\Gamma^n(1/n)} \tag{6}$$

para $n=-\nu<0$, escribamos la solución en la forma

$$f(\xi)=\left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}(\xi_0{}^2+\xi^2)\right]^{-1/\nu} \tag{7}$$

Aquí el calor se distribuye a través de todo el espacio y a distancias grandes, W disminuye proporcionalmente a $x^{-2/\nu}$. Esta solución es válida sólo para $\nu<2$; para $\nu\geqq 2$, la integral de normalización (5) (que ahora se extiende hasta $\pm\infty$) diverge, lo cual significa físicamente que el calor se conduce de modo instantáneo hasta el infinito. Para $\nu<2$, la constante ξ_0 en (7) viene dada por

$$\xi_0{}^{2-\nu}=\frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu}\,\frac{\Gamma^\nu(1/\nu-\frac{1}{2})}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{8}$$

Finalmente, para $n\to 0$, tenemos $\xi_0\to 2/\sqrt{n}$, y la solución dada por la fórmula (3) del problema 1, (1) y (4) es

$$W=\lim_{n\to 0}\left\{\frac{Q}{2\sqrt{(\pi at)}}\left(1-n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right\}=\frac{Q}{2\sqrt{(\pi at)}}\exp(-x^2/4at),$$

de acuerdo con la fórmula (51.5).

§ 52. Conducción térmica en un medio finito

En los problemas de conducción térmica en un medio infinito, la distribución inicial de temperaturas no basta para determinar una solución única y deben darse también las condiciones límites en la superficie del medio.

Consideremos la conducción térmica en un semiespacio ($x > 0$), empezando con el caso en el que se mantiene una temperatura constante dada en el plano límite $x = 0$. Podemos tomar arbitrariamente esta temperatura como cero. En el instante inicial, la distribución de temperatura a través de todo el medio viene dada como antes. Por tanto, las condiciones límites e iniciales son

$$T = 0 \text{ para } x = 0;\ T = T_0(x,y,z) \text{ para } t = 0 \quad \text{y} \quad x > 0. \tag{52.1}$$

La solución de la ecuación de conducción térmica con estas condiciones puede reducirse mediante el siguiente artificio a la resolución correspondiente al caso de un medio infinito en todas direcciones. Imaginemos que el medio se extiende a ambos lados del plano $x = 0$, viniendo dada la distribución de temperaturas para $t = 0$ y $x < 0$ por $-T_0$. Es decir, la distribución de temperaturas en el instante inicial viene dada en todo el espacio por una función impar de x:

$$T_0(-x,y,z) = -T_0(x,y,z). \tag{52.2}$$

Se deduce a partir de la ecuación (52.2) que $T_0(0, y, z) = -T_0(0, y, z) = 0$, es decir, se satisface automáticamente la condición límite necesaria (52.1) para $t = 0$, y es evidente a partir también de la simetría que continuará satisfaciéndose para todo valor de t.

Así pues, el problema se deduce a la resolución de la ecuación (50.4) en medio infinito con una función inicial $T_0(x, y, z)$ que satisface (52.2) y sin condiciones límites. De aquí que podemos utilizar la fórmula general (51.3). Dividamos el intervalo de integración respecto a x' en (51.3) en dos partes, desde $-\infty$ hasta 0 y desde 0 hasta ∞. Utilizando la relación (52.2), tendremos entonces

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} T_0(x',y',z') \times$$

$$\{\exp[-(x-x')^2/4\chi t] - \exp[-(x+x')^2/4\chi t]\} \times$$

$$\exp\{-[(y-y')^2+(z-z')^2]/4\chi t\}\,dx'\,dy'\,dz'. \tag{52.3}$$

Esta fórmula da la solución del problema, puesto que determina la temperatura en todo el medio, es decir, para todo $x > 0$.

Si la distribución inicial de temperaturas es una función únicamente de x, la fórmula (52.3) se transforma en

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_{0}^{\infty} T_0(x')\{\exp[-(x-x')^2/4\chi t] - \exp[-(x+x')^2/4\chi t]\}\,dx'. \tag{52.4}$$

Como ejemplo, consideremos el caso en el que la temperatura inicial es una constante determinada en todas partes, excepto en $x = 0$. Sin pérdida de generalidad, esta constante puede considerarse como -1. La temperatura en el plano $x = 0$ es siempre cero. Se obtiene la solución apropiada sustituyendo $T_0(x) = -1$ en (52.4). La integral en (52.4) es la suma de dos integrales, en cada una de las cuales se hace un cambio de variable de la forma $\xi = (x' - x)/2\sqrt{(\chi t)}$. Entonces se obtiene para $T(x, t)$ la expresión

$$T(x, t) = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{erf}[-x/2\sqrt{(\chi t)}] - \operatorname{erf}[x/2\sqrt{(\chi t)}]\},$$

en donde la función erf x se define como

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \tag{52.5}$$

y se denomina *función error* (obsérvese que erf $\infty = 1$). Puesto que erf $(-x) =$ $= -\operatorname{erf} x$, tenemos, finalmente,

$$T(x, t) = -\operatorname{erf}[x/2\sqrt{(\chi t)}]. \tag{52.6}$$

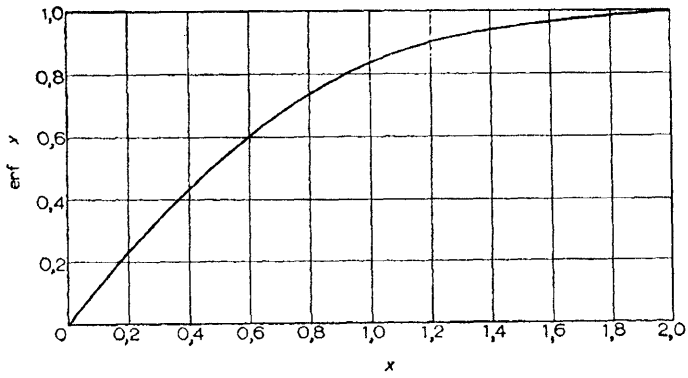

FIG. 30

La figura 30 muestra un gráfico de la función erf x. La distribución de temperaturas resulta más uniforme en el espacio a lo largo del transcurso del tiempo. Esto ocurre de tal modo que cualquier valor dado de la temperatura se «mueve» proporcionalmente a $\sqrt{t}$. Este último resultado es evidentemente cierto. En efecto, el problema en consideración se caracteriza por tener un solo parámetro, la diferencia inicial de temperaturas T_0 entre el plano límite y el resto del espacio; en el estudio anterior esta diferencia se tomó arbitrariamente como una unidad. A partir de los parámetros T_0 y χ y las variables x y t a nuestra disposición, podemos formar sólo una combinación adimensional, $x/\sqrt{(\chi t)}$; de aquí que resulta evidente que la distribución de tempera-

turas requerida debe venir dada por una función de la forma $T = T_0 f[x/\sqrt{(\chi t)}]$.

Consideremos ahora el caso en el que la superficie que limita el medio es un aislante térmico. Es decir, no existe flujo térmico en el plano $x = 0$, de modo que debemos tener $\partial T/\partial x = 0$. Así tenemos las siguientes condiciones, tanto límites como iniciales:

$$\partial T/\partial x = 0 \text{ para } x = 0; \quad T = T_0(x,y,z) \text{ para } t = 0,\ x > 0. \tag{52.7}$$

Para hallar la solución procederemos como en el problema anterior. Es decir, imaginaremos de nuevo que el medio se extienda a ambos lados del plano $x = 0$, y que la distribución de temperatura inicial esta vez es simétrica respecto al plano. En otras palabras, suponemas ahora que $T_0(x, y, z)$ es una función par de x:

$$T_0(-x,y,z) = T_0(x,y,z). \tag{52.8}$$

Entonces, $\partial T_0(x, y, z)/\partial x = -\partial T_0(-x, y, z)/\partial x$, y $\partial T_0/\partial x = 0$ para $x = 0$. Es evidente a partir de la simetría que esta condición se continuará satisfaciendo para todo valor de t.

Repitiendo los cálculos anteriores, pero utilizando (52.8) en lugar de (52.2), tenemos la solución general del problema en la forma

$$T(x,y\ z,t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} T_0(x',y',z') \times$$
$$\{\exp[-(x'-x)^2/4\chi t] + \exp[-(x'+x)^2/4\chi t]\} \times$$
$$\exp\{-[(y'-y)^2+(z'-z)^2]/4\chi t\}\, dx'\, dy' dz'. \tag{52.9}$$

Si T_0 es una función únicamente de x, entonces,

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi\chi t)}} \int_0^\infty T_0(x')\{\exp[-(x'-x)^2/4\chi t] + \exp[-(x'+x)^2/4\chi t]\}\, dx'. \tag{52.10}$$

Consideremos ahora aquellos problemas con condiciones límites de un tipo diferente y que a la vez nos permita resolver de un modo general la ecuación de la conducción térmica. Supongamos que un flujo térmico (que es una función determinada del tiempo) entra en un medio a través de su plano frontera $x = 0$. Las condiciones límites e iniciales son

$$-\kappa\, \partial T/\partial x = q(t) \text{ para } x = 0;\ T = 0 \text{ para } t = -\infty,\ x > 0, \tag{52.11}$$

siendo $q(t)$ una función determinada.

Primero resolveremos un problema auxiliar, en el cual $q(t) = \delta(t)$. Es fácil ver que este problema es equivalente físicamente al de propagación del calor en un medio infinito desde una fuente puntual que genera una cantidad dada de calor. La condición límite $-\kappa \partial T/\partial x = \delta(t)$ para $x = 0$ significa

físicamente que por cada unidad de área del plano $x = 0$ entra una unidad de calor en el instante $t = 0$. En un problema con la condición $T = 2\delta(x)/\rho c_p$ para $t = 0$, se concentra una cantidad de calor

$$\int \rho c_p T \, dx = 2$$

en esta área en el tiempo $t = 0$; la mitad de la misma se propaga entonces en el sentido positivo del eje de las x y la otra mitad en el sentido negativo. De aquí resulta claro que las soluciones de los dos problemas son idénticas y así hallamos a partir de (51.5) que $\kappa T(x, t) = \sqrt{(\chi/\pi t)} \exp(-x^2/4\chi t)$.

Como las ecuaciones son lineales, los efectos que producen las entradas de calor en momentos distintos son simplemente aditivos y, por tanto, la solución general que se busca de la ecuación de conducción térmica con las condiciones (52.11) es

$$\kappa T(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] \, d\tau. \qquad (52.12)$$

En particular, la temperatura en el plano $x = 0$ varía de acuerdo con

$$\kappa T(0,t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) \, d\tau. \qquad (52.13)$$

Utilizando estos resultados, podemos obtener de una vez la solución de otro problema, aquél en el cual la temperatura T en el plano $x = 0$ es una función determinada del tiempo:

$$T = T_0(t) \text{ para } x = 0; \qquad T = 0 \text{ para } t = -\infty, \qquad x > 0. \qquad (52.14)$$

Para ello, observemos que si una determinada función $T(x, t)$ satisface la ecuación de la conducción térmica, entonces también la satisface su derivada $\partial T/\partial x$. Derivando (52.12) respecto a x, obtenemos

$$-\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{t} \frac{x q(\tau)}{2\sqrt{[\pi\chi(t-\tau)^3]}} \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] \, d\tau.$$

Esta función satisface la ecuación de la conducción térmica y [por (52.11)] su valor para $x = 0$ es $q(t)$; por tanto, da la solución buscada del problema, cuyas condiciones son (52.14). Escribiendo $T(x, t)$ en lugar de $-\kappa \partial T/\partial x$ y $T_0(t)$ en lugar de $q(t)$, tenemos así

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp[-x^2/4\chi(t-\tau)] \, d\tau. \qquad (52.15)$$

El flujo térmico $q = -\kappa \partial T/\partial x$ a través del plano límite $x = 0$ se encuentra mediante un cálculo sencillo que vale

$$q(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}. \tag{52.16}$$

Esta fórmula es la inversa de (52.13).

Se obtiene fácilmente la solución al importante problema en el que la temperatura en el plano frontera $x = 0$ es una función periódica determinada del tiempo $T = T_0 e^{-i\omega t}$ para $x = 0$. Resulta claro que la distribución de temperaturas en todo el espacio dependerá también del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$. Puesto que la ecuación monodimensional de la conducción térmica es formalmente idéntica a la ecuación (24.3) que determina el movimiento de un fluido viscoso alrededor de un plano oscilante, podemos describir inmediatamente la distribución de temperaturas buscadas por analogía con (24.4):

$$T = T_0 \exp[-x\sqrt{(\omega/2\chi)}] \exp\{i[x\sqrt{(\omega/2\chi)} - \omega t]\}. \tag{52.17}$$

Vemos que las oscilaciones de la temperatura en la superficie límite se propagan como *ondas térmicas* que se ven rápidamente amortiguadas desde el interior del medio.

Otro tipo de problema de conducción térmica comprende aquellos que se refieren a la velocidad a la cual se iguala la temperatura en un cuerpo finito que no tiene una temperatura uniforme y cuya superficie se mantiene en condiciones fijas. Para resolver estos problemas mediante métodos generales, busquemos una solución de la ecuación de la conducción térmica en la forma $T = T_n(x, y, z)e^{-\lambda_n t}$, siendo λ_n una constante. Para la función T_n tenemos la ecuación

$$\chi \triangle T_n = -\lambda_n T_n. \tag{52.18}$$

Esta ecuación, con las condiciones límites dadas, tiene soluciones no nulas únicamente para determinados valores λ_n, sus *valores propios o autovalores* (*eigenvalues*). Todos los valores propios son reales y positivos y las funciones correspondientes $T_n(x, y, z)$ forman un conjunto completo de funciones ortogonales. Supongamos que la distribución de temperaturas en el instante inicial viene dada por la función $T_0(x, y, z)$. Desarrollándola en serie de funciones T_n,

$$T_0(x, y, z) = \sum c_n T_n(x, y, z),$$

obtenemos la solución buscada en la forma

$$T(x, y, z, t) = \sum c_n T_n(x, y, z) \exp(-\lambda_n t). \tag{52.19}$$

La velocidad de igualación de temperaturas viene determinada evidentemente por el término correspondiente al menor valor de λ_n, que denominaremos λ_1. El «tiempo de igualación» puede definirse como $\tau = 1/\lambda_1$.

PROBLEMAS

Problema 1. Determina la distribución de temperaturas alrededor de una superficie esférica (de radio R) cuya temperatura es una función determinada $T_0(t)$ del tiempo.

Solución. La ecuación de conducción térmica para una distribución de temperaturas con simetría central es, en coordenadas esféricas, $\partial T/\partial t = (\chi/r)\partial^2(rT)/\partial r^2$. La sustitución $rT(r, t) = F(r, t)$ la reduce a $\partial F/\partial t = \chi\partial^2 F/\partial r^2$, que es la ecuación de conducción térmica monodimensional ordinaria. De aquí que la solución buscada pueda encontrarse a partir de (52.15) y vale

$$T(r,t) = \frac{R(r-R)}{2r\sqrt{(\pi\chi)}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp[-(r-R)^2/4\chi(t-\tau)]\, d\tau.$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero en el caso en que la temperatura de la superficie esférica es $T_0 e^{-i\omega t}$.

Solución. Análogamente a (52.17), obtenemos

$$T = T_0 \exp(-i\omega t)(R/r) \exp[-(1-i)(r-R)\sqrt{(\omega/2\chi)}].$$

Problema 3. Determinar el tiempo de igualación de temperaturas para un cubo de lado a cuya superficie (a) se mantiene a una temperatura $T = 0$, (b) es un aislante.

Solución. En el caso (a) el valor más pequeño de λ viene dado por la siguiente solución de la ecuación (52.18):

$$T_1 = \text{sen}(\pi x/a)\text{sen}(\pi y/a)\text{sen}(\pi z/a)$$

(estando el origen en una esquina del cubo), cuando $\tau = 1/\lambda_1 = a^2/3\pi^2\chi$. En el caso (b) tenemos $T_1 = \cos(\pi x/a)$ (o la misma función de y o z), cuando $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de una esfera de radio R.

Solución. El menor valor de λ viene dado por la solución con simetría central de (52.18) $T_1 = (1/r)\,\text{sen}\, kr$; en el caso (a), $k = \pi/R$ y $\tau = 1/\chi k^2 = R^2/\chi\pi^2$. En el caso (b), k es la raíz más pequeña no nula de la ecuación $kR = \text{tg}\, kR$, de aquí que encontremos que $kR = 4{,}493$ y $\tau = 0{,}050\ R^2/\chi$.

§ 53. Ley de semejanza para la transferencia térmica

Los procesos de transferencia térmica en un fluido son más complejos que los correspondientes a los sólidos, debido a que el fluido puede estar en movimiento. Un cuerpo caliente sumergido en un fluido móvil se enfría con una rapidez mucho mayor que si el fluido estuviese en reposo, en donde la transferencia térmica se realizaría únicamente por conducción. El movimiento de un fluido que se calienta de forma no uniforme se denomina *convección*.

Supondremos que las diferencias de temperaturas en el fluido son tan pequeñas que pueden suponerse independientes de la temperatura, aunque al mismo tiempo sean tan grandes que podamos despreciar en comparación con ellas las variaciones de temperatura producidas por el calor procedente de la disipación de energía debida al rozamiento interno (ver § 55). Entonces puede omitirse el término de viscosidad en la ecuación (50.2), dejando

$$\partial T/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, T = \chi \triangle T, \tag{53.1}$$

en donde $\chi = \kappa/\rho c_p$ es la conductividad termométrica. Esta ecuación, junto con la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, determina completamente la convección en las condiciones consideradas.

En lo que sigue estaremos interesados únicamente en el flujo convectivo estacionario.† Entonces todas las derivadas temporales son nulas y tenemos las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, T = \chi \triangle T, \tag{53.2}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}(p/\rho) + \nu \triangle \mathbf{v}, \quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{53.3}$$

Este sistema de ecuaciones, en el cual las funciones incógnitas son $\mathbf{v}$, T y p/ρ, contiene sólo dos parámetros constantes, ν y χ. Además, la solución de estas ecuaciones depende también, a través de las condiciones límites, de una cierta longitud característica l, de la velocidad U y de la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$. Los dos primeros términos vienen dados por las dimensiones de los cuerpos sólidos que aparecen en el problema y por la velocidad de la corriente principal, mientras que el tercero viene dado por la diferencia de temperaturas entre el fluido y dichos cuerpos.

Al formar magnitudes adimensionales a partir de los parámetros a nuestra disposición, se plantea la cuestión de las dimensiones que han de adscribirse a la temperatura. Para resolver esto, observemos que la temperatura viene determinada por la ecuación (53.2), que es lineal y homogénea en T. De aquí que la temperatura pueda multiplicarse por cualquier constante y seguirá satisfaciendo las ecuaciones. En otras palabras, la unidad de medida de temperaturas puede escogerse arbitrariamente. La posibilidad de esta transformación de la temperatura puede tenerse en cuenta formalmente, dando una dimensión propia sin relacionarla con las de las demás magnitudes. Esta dimensión puede medirse en grados, que es la unidad normal de temperatura.

Así pues, la convección en las condiciones mencionadas anteriormente está caracterizada por cinco parámetros, cuyas dimensiones son $\nu = \chi = \mathrm{cm^2/s}$, $U = \mathrm{cm/s}$, $l = \mathrm{cm}$, $T_1 - T_0 = \mathrm{grados}$. A partir de éstos podemos formar dos

† Con objeto de que la convección sea estable, es necesario, estrictamente hablando, que los cuerpos sólidos en contacto con el fluido contengan fuentes de calor que los mantengan a temperatura constante.

combinaciones adimensionales independientes. Éstas pueden ser el número de Reynolds, $R = Ul/\nu$, y el *número de Prandtl*, definido como

$$P = \nu/\chi. \tag{53.4}$$

Cualquier otra combinación adimensional puede expresarse en función de R y P.†

El número de Prandtl es exactamente una constante del material y no depende de las propiedades del flujo. En el caso de los gases es siempre del orden de la unidad. El valor de P, en el caso de los líquidos, varía más ampliamente. Si son líquidos muy viscosos puede ser muy grande. Citamos a continuación algunos valores de P a 20°C para diversas sustancias:

Aire	0,733
Agua	6,75
Alcohol	16,6
Glicerina	7250
Mercurio	0,044

Como en § 19, podemos ahora obtener la conclusión de que en el caso de convección estacionaria (del tipo descrito), las distribuciones de temperatura y velocidades son de la forma:

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R, P\right), \qquad \frac{\mathbf{v}}{U} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R\right). \tag{53.5}$$

La función adimensional que da la distribución de temperaturas depende de los parámetros R y P, pero la distribución de velocidades depende únicamente de R, puesto que está determinada por las ecuaciones (53.3), en las que no interviene la conductividad. Dos flujos convectivos son semejantes si son iguales sus números de Reynolds y de Prandtl.

La transferencia térmica entre cuerpos sólidos y el fluido está normalmente caracterizada por el *coeficiente de transferencia térmica* α, definido por

$$\alpha = q/(T_1 - T_0), \tag{53.6}$$

en donde q es la densidad de flujo térmico a través de la superficie y $T_1 - T_0$ es una diferencia de temperaturas característica entre el cuerpo sólido y el fluido. Si se conoce la distribución de temperaturas en el fluido, el coeficiente de transferencia térmica se encuentra fácilmente calculando la densidad de flujo térmico $q = -\kappa \partial T/\partial n$ en el límite de fluido (tomándose la derivada a lo largo de la normal a la superficie).

El coeficiente de transferencia térmica no es una magnitud adimensional.

† A veces se utiliza el *número de Péclet*; se define como $Ul/\chi = RP$.

Una magnitud adimensional que caracteriza la transferencia térmica es la que se denomina *número de Nusselt*:†

$$N = \alpha l/\kappa. \tag{53.7}$$

A partir de razonamientos de semejanza se deduce que, en el caso de un tipo determinado del flujo convectivo, el número de Nusselt es una función definida de los números de Reynolds y de Prandtl únicamente:

$$N = f(R, P). \tag{53.8}$$

Esta función es muy simple en el caso de la convección para números de Reynolds suficientemente pequeños. Estos corresponden a velocidades también reducidas. De aquí que, en primera aproximación, podemos despreciar el término de velocidad en la ecuación (53.2), de modo que la distribución de temperaturas está determinada por la ecuación $\Delta T = 0$, es decir, la ecuación ordinaria de conducción térmica estacionaria en un medio en reposo. El coeficiente de transferencia térmica no puede depender entonces de la velocidad ni de la viscosidad y así debemos tener simplemente

$$N = \text{constante}, \tag{53.9}$$

y al calcular la constante del fluido puede suponerse que está en reposo.

PROBLEMA

Determinar la distribución de temperaturas en un fluido móvil con flujo de Poiseuille a lo largo de una tubería de sección recta circular cuando la temperatura de las paredes varía linealmente a lo largo del tubo.

Solución. Las condiciones del flujo son las mismas en todas las secciones rectas de la tubería y podemos buscar una distribución de temperaturas que tengan la forma $T = Az + f(r)$, en donde Az es la temperatura de la pared; utilizaremos coordenadas cilíndricas con el eje z situado a lo largo del eje de la tubería. Para la velocidad tendremos, por (17.9), $v_z = v = 2v_m(1 - r^2/R^2)$, siendo v_m la velocidad media. Sustituyendo en (53.2) encontramos

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \frac{2v_m A}{\chi}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

La solución de esta ecuación que es finita para $r = 0$ y cero para $r = R$ es

$$f(r) = -\frac{v_m A r^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

La densidad de flujo térmico es

$$q = \kappa[\partial T/\partial r]_R = \tfrac{1}{2}\rho c_p v_m R A.$$

Y es independiente de la conductividad térmica.

† También se utiliza el «número de transferencia de calor» adimensional, definido como $K_h = \alpha/\rho c_p U = N/RP$.

§ 54. Transferencia térmica en una capa límite

La distribución de temperaturas en un fluido con números de Reynolds muy elevados presenta propiedades semejantes a las de la distribución de velocidades. Valores muy grandes de R son equivalentes a viscosidades muy pequeñas. Pero puesto que el número $P = \nu/\chi$ no es pequeño, la conductividad termométrica χ debe suponerse pequeña, lo mismo que ν. Esto corresponde al hecho de que, en caso de velocidades suficientemente elevadas, el fluido puede considerarse aproximadamente como un fluido ideal y en un fluido de este tipo están ausentes tanto el rozamiento interno como la conducción térmica.

Sin embargo, este punto de vista debe abandonarse de nuevo en el caso de una capa límite, puesto que ni la condición extrema de ausencia de deslizamiento ni las temperaturas iguales se verán satisfechas. Por tanto, en la capa límite se produce tanto una rápida disminución de la velocidad como una variación rápida de la temperatura del fluido hasta un valor igual al de la temperatura de la superficie sólida. La capa límite está caracterizada por la presencia de gradientes grandes, tanto de la velocidad como de la temperatura.

Es fácil ver que, en el flujo que rodea un cuerpo aislante (con R grande), el calentamiento del fluido se produce casi exclusivamente en la estela, mientras que fuera de la misma la temperatura del fluido no varía. Por ello, cuando R es grande, los procesos de conducción térmica en la corriente principal carecen de importancia. De aquí que la temperatura varíe únicamente en la región alcanzada por el fluido que ha sido calentado en la capa límite. Sabemos (ver § 34) que las líneas de corrientes procedentes de la capa límite entran en la corriente principal únicamente más allá de la línea de separación, en donde pasan a la región de la estela turbulenta. Sin embargo, de la estela no emergen en absoluto líneas de corriente. Así pues, el fluido que rodea la superficie del cuerpo caliente, pero que está dentro de la capa límite, pasa enteramente a la estela y permanece allí. Vemos que el calor resulta distribuido a través de las regiones en donde la vorticidad no es nula.

En la propia región turbulenta, se produce un intercambio de calor muy considerable que se debe a la mezcla intensiva del fluido característico de cualquier flujo turbulento. Este mecanismo de transferencia térmica puede denominarse *conducción turbulenta* y está caracterizado por un coeficiente κ_{turb}, del mismo modo que introdujimos la viscosidad turbulenta ν_{turb} en § 31. La conductividad termométrica turbulenta se define, en órdenes de magnitud, por la misma fórmula que ν_{turb} (31.2): $\chi_{turb} \sim l\Delta u$.

Así pues, los procesos de transferencia térmica en flujo laminar y turbulento son fundamentalmente distintos. En el caso límite de viscosidad y conductividad térmica muy pequeñas, en el flujo laminar, los procesos de transferencia térmica están ausentes y la temperatura del fluido es constante en

todos los puntos del espacio. Sin embargo, en el flujo turbulento, incluso en el mismo caso límite, se produce transmisión de calor y rápidamente se iguala la temperatura en las diversas partes de la corriente.

Debe mencionarse que, cuando hablamos de la temperatura de un fluido en movimiento turbulento, debemos entender el promedio temporal de la temperatura del fluido. La temperatura real en un punto cualquiera del espacio sufre variaciones muy irregulares respecto al tiempo, de modo semejante a las de la velocidad.

Empecemos considerando la transferencia térmica en una capa límite laminar. Las ecuaciones del movimiento (39.10) se ven inalteradas. Debe ahora realizarse una simplificación semejante en el caso de la ecuación (53.2). Escrita explícitamente esta ecuación, es (puesto que todas las magnitudes son independientes de la coordenada z)

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

En el segundo miembro podemos despreciar la derivada $\partial^2T/\partial x^2$ en comparación con $\partial^2T/\partial y^2$, quedando así

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{54.1}$$

Comparando esta ecuación con la primera de (39.10), vemos que si el número de Prandtl es del orden de la unidad, entonces el orden de magnitud δ del espesor de la capa en el que la velocidad v_x disminuye y la temperatura T varía, vendrá dado nuevamente por las fórmulas obtenidas en § 39, es decir, será inversamente proporcional a $\sqrt{\mathrm{R}}$. El flujo térmico $q=-\kappa\partial T/\partial n$ es igual en orden de magnitud a $\kappa(T_1-T_0)/\delta$. De aquí obtenemos la conclusión de que q, y, por tanto, el número de Nusselt, es proporcional a $\sqrt{\mathrm{R}}$. La dependencia de N con P no está determinada. Así pues, tenemos

$$\mathrm{N}=\sqrt{\mathrm{R}}f(\mathrm{P}). \tag{54.2}$$

A partir de esta expresión se deduce, en particular, que el coeficiente de transferencia térmica α es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la dimensión l del cuerpo.

Consideremos ahora la transferencia térmica en una capa límite turbulenta. Aquí es conveniente, como en § 42, considerar una corriente turbulenta infinita plano-paralela que fluye a lo largo de una superficie plana infinita. El gradiente trasversal de temperaturas dT/dy en dicho flujo puede determinarse a partir del mismo tipo de razonamiento dimensional que el que hemos utilizado para hallar el gradiente de velocidades du/dy. Designaremos por q la densidad de flujo térmico a lo largo del eje y producida por el gradiente de temperaturas. Este flujo es una constante (independiente

de y), como el flujo del impulso σ, y puede considerarse de modo semejante como un parámetro dado que determina las propiedades del flujo. Además, tenemos como parámetros también la densidad ρ y el calor específico c_p por unidad de masa. En lugar de σ utilizaremos como parámetro v_*; q y c_p tienen las dimensiones de erg/cm² s = g/s³ y erg/g grado = cm²/s² grado. La viscosidad y la conductividad térmica no pueden aparecer explícitamente en dT/dy cuando R es suficientemente grande.

Debido a la homogeneidad de las ecuaciones respecto a la temperatura, ya mencionada en § 53, esta última puede variarse por cualquier factor sin violar dichas ecuaciones. Cuando la temperatura se modifica de este modo, el flujo térmico debe cambiar, sin embargo, en el mismo factor. De aquí que q y T deban ser proporcionales. A partir de q, v_*, ρ, c_p e y podemos formar solamente la magnitud proporcional a q que tenga las dimensiones grado/cm, a saber $q/\rho c_p v_* y$. Así pues, tendremos $dT/dy = \beta q/b\rho c_p v_* y$, siendo β una constante numérica que debe determinarse experimentalmente.† De aquí

$$T = (\beta q/b\rho c_p v_*)(\log y + c). \tag{54.3}$$

Así pues, la temperatura, como la velocidad, varía logarítmicamente. La constante de integración c que aparece aquí debe determinarse a partir de las condiciones de la subcapa viscosa, como en el caso de la deducción de (42.7). La diferencia de temperaturas entre el fluido de un punto determinado y la pared (que tomaremos arbitrariamente como temperatura cero) se compone de la variación de temperatura a través de la capa turbulenta y la variación correspondiente a través de la subcapa viscosa. La ley logarítmica (54.3) está determinada únicamente por la primera de ellas. De aquí, que si escribimos (54.3) en la forma $T = (\beta q/b\rho c_p v_*)[\log(y v_*/\nu) + \text{constante}]$, incluyendo en el argumento del logaritmo un factor igual al espesor y_0, entonces la constante (multiplicada por el coeficiente) debe ser la variación de temperatura a través de la subcapa viscosa. Como es natural, esta variación depende también de los coeficientes ν y χ. Puesto que la constante es adimensional, debe ser una cierta función de P, que es la única combinación adimensional de las magnitudes ν, χ, ρ, v_* y c_p (q no puede aparecer, puesto que T debe ser proporcional a q, que ya aparece en el coeficiente). Así pues, encontramos que la distribución de temperaturas es

$$T = (\beta q/b\rho c_p v_*)[\log(v v_*/\nu) + f(\mathrm{P})]. \tag{54.4}$$

† Aquí b es la constante que aparece en el perfil logarítmico de velocidades (42.4). Con esta definición, β es el coeficiente ν_{turb}/χ_{turb}, siendo ν_{turb} y χ_{turb} los coeficientes en $q = \rho c_p \chi_{turb} dT/dy$, $\sigma = \rho \nu_{turb} du/dy$. Mediante determinaciones simultáneas de los perfiles y temperatura en tubos y en el flujo a lo largo de placas planas, β resulta valer 0,7 aproximadamente. Mencionemos también que medidas semejantes en la estela turbulenta detrás de un cuerpo caliente dan un valor para el cociente ν_{turb}/χ_{turb} de 0,5 aproximadamente en un flujo turbulento libre.

Utilizando esta fórmula, podemos calcular la transferencia térmica en el caso de flujo turbulento en una tubería, a lo largo de una placa plana, etc. Sin embargo, dejaremos este tema para más adelante.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma límite de la dependencia del número de Nusselt con el número de Prandtl dentro de una capa límite laminar cuando P y R son grandes.

Solución. En el caso de P grande, la distancia δ' sobre la cual la temperatura varía es pequeña en comparación con el espesor δ de la capa en la que la velocidad v_x disminuye. δ' puede denominarse el espesor de la capa límite de la temperatura. El orden de magnitud de δ' puede obtenerse a partir de una estimación de los términos contenidos en la ecuación (54.1). A lo largo de la distancia desde $y = 0$ hasta $y \sim \delta'$, la temperatura varía en una cantidad del orden de la diferencia de temperaturas total $T_1 - T_0$ entre el fluido y el cuerpo sólido, mientras que la velocidad v_x varía a lo largo de esta distancia en una cantidad del orden de $U\delta'/\delta$ (puesto que la variación total, del orden de U, se produce en una distancia δ). De aquí que, para $y \sim \delta'$, los términos en la ecuación (54.1) son, en orden de magnitud,

$$\chi\partial^2 T/\partial y^2 \sim \chi(T_1 - T_0)/\delta'^2 \quad \text{y} \quad v_x \partial T/\partial x \sim U\delta'(T_1 - T_0)/l\delta.$$

Si son comparables ambas expresiones, tenemos $\delta'^3 \sim \chi l\delta/U$. Sustituyendo $\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}$, obtenemos $\delta' \sim l/\mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3} \sim \delta/\mathrm{P}^{1/3}$. Así pues, para P grande, el espesor de la capa límite de temperaturas disminuye respecto a la capa límite de velociades, de modo inverso a la raíz cúbica de P.

El flujo térmico $q = -\kappa\partial T/\partial y \sim \kappa(T_1 - T_0)/\delta'$, y la ley límite requerida de la transferencia térmica resulta ser†

$$\mathrm{N} = \text{constante} \times \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\frac{1}{3}}.$$

Problema 2. Determinar la forma límite de la función $f(\mathrm{P})$, en la distribución logarítmica de temperaturas (54.4), para valores grandes de P.

Solución. De acuerdo a lo que dijimos en § 42, la velocidad transversal en la subcapa viscosa es del orden de $v_*(y/y_0)^2$, mientras que la escala de la turbulencia es del orden de y^2/y_0. La conductividad termométrica turbulenta χ_{turb} es, por tanto, del orden de

$$v_* y_0 (y/y_0)^4 \sim \nu(y/y_0)^4$$

[en donde hemos utilizado la relación (42.5)]; χ_{turb} tiene un valor comparable con el del coeficiente ordinario χ a distancias del orden de $y_1 \sim y_0 \mathrm{P}^{-1/4}$. Puesto que χ_{turb} aumenta muy rápidamente con y, es evidente que la mayor parte de la variación de temperatura en la subcapa viscosa se produce en distancias de la pared del orden de y_0 y puede suponerse proporcional a y_1, siendo en orden de magnitud $qy_1/\kappa \sim qy_0/\kappa\mathrm{P}^{1/4} \sim q\mathrm{P}^{3/4}/\rho c_p v_*$. Com-

† En el caso de los valores de la conductividad térmica que realmente se encuentran, el número de Prandtl no alcanza los valores precisos para que sea válida esta ley límite. Sin embargo, pueden aplicarse estas leyes a la difusión convectiva; ésta obedece a las mismas ecuaciones que la transmisión de calor convectiva, pero sustituyendo la temperatura por las concentraciones del soluto y el flujo térmico por el flujo del soluto, y definiéndose «el número de Prandtl de difusión» como $\mathrm{P}_D = \nu/D$, siendo D el coeficiente de difusión. Por ejemplo, en el caso de disoluciones en agua y líquidos análogos, P_D alcanza valores del orden de 10^3, mientras que si se trata de solventes muy viscosos es del orden de 10^6 o más.

parando esta fórmula con la (54.4), vemos que la función $f(P)$ es una constante numérica multiplicada por $P^{3/4}$.†

Problema 3. Determinar las diferencias de temperatura T_λ en un fluido turbulento caliente de modo no uniforme en distancias λ que son pequeñas en comparación con la escala externa de la turbulencia (A. M. OBUKHOV, 1949).

Solución. La igualación de temperaturas en un fluido turbulento con calentamiento no uniforme se produce de modo semejante al de la disipación de la energía mecánica. Los remolinos turbulentos de tamaño $\lambda \gg \lambda_0$ (en donde λ_0 es la escala interna de la turbulencia) conducen a una igualización de temperatura por una mezcla puramente mecánica de partículas de fluido que están a temperaturas diferentes. Por otra parte, se igualan mediante una conducción térmica disipativa gradientes de temperaturas verdaderamente considerables en regiones de tamaño $\lambda \sim \lambda_0$.

La disipación debida a la conducción térmica (aumento de entropía) está determinada por la magnitud $\chi(\mathbf{grad}\, T)^2/T^2$ [ver (49.6)]; suponiendo que las fluctuaciones turbulentas de temperatura son relativamente pequeñas, podemos sustituir T^2 en el denominador por una constante, que es el cuadrado de la temperatura media. De acuerdo con el método descrito en § 32 (ver la primera nota a pie de página de dicha sección), escribiremos $\chi_{\text{turb}}(T_\lambda/\lambda)^2 = \text{constante}$. Sustituyendo $\chi_{\text{turb},\lambda} \sim \nu_{\text{turb},\lambda} \sim \lambda v_\lambda$, $v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$ [ver (32.1)], hallamos la relación requerida que resulta ser $T_\lambda \sim \lambda^{1/3}$. Así pues, para $\lambda \gg \lambda_0$ las fluctuaciones de temperatura, como las fluctuaciones de velocidad, son proporcionales a la raíz cúbica de la distancia. Sin embargo, a distancias $\lambda \ll \lambda_0$, y mediante los mismos razonamientos que en el caso de la velocidad, las diferencias T_λ son simplemente proporcionales a λ.

Problema 4. Deducir una relación entre las funciones de correlación locales

$$B_{TT} = \overline{(T_2 - T_1)^2}, \qquad B_{iTT} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(T_2 - T_1)^2}$$

en un flujo turbulento con calentamiento no uniforme (A. M. YAGLOM, 1949).

Solución. Los cálculos son semejantes a los utilizados al deducir la fórmula (33.18). A partir de las ecuaciones

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \chi \triangle T, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(T_1 T_2)} = -2\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\overline{(v_{1i} T_1 T_2)} + 2\chi \triangle_1 \overline{(T_1 T_2)}.$$

En el primer miembro podemos poner $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y en el segundo expresar los valores medios en función de las funciones de correlación, utilizando la homogeneidad e isotropía del flujo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{1i}} B_{iTT} - \chi \triangle_1 B_{TT}.$$

† El cálculo de la constante en esta fórmula para varios casos particulares se facilita por el hecho de que, en virtud de la desigualdad $\delta' \ll \delta$, sólo necesitamos tomar los primeros términos del desarrollo, en potencias de y, de las componentes de la velocidad del fluido al integrar la ecuación (54.1) a través de la capa límite de temperatura. Los cálculos para la difusión convectiva, con diversos casos particulares, puede verse en el libro de V. G. LEVICH, *Physico-chemical Hydrodynamics* (*Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika*), Moscow, 1952.

Escribiendo $B_{iTT} = n_i B_{rTT}$ y cambiando las derivadas respecto a r, obtenemos una ecuación que, al integrar respecto a r, da la relación buscada

$$B_{rTT} - 2\chi \mathrm{d}B_{TT}/\mathrm{d}r = -\tfrac{4}{9} r\phi,$$

en donde

$$\phi \equiv -\partial(\overline{T^2})/\partial t = -\partial\overline{(T-\bar{T})^2}/\partial t.$$

Utilizando los resultados del problema 3, encontramos entonces que para $r \gg \lambda_0$, $B_{rTT} \cong$ $\cong -4r\phi/9$; mientras que para $r \ll \lambda_0$, tenemos $B_{TT} \cong r^2\phi/9\chi$.

§ 55. Calentamiento de un cuerpo en un fluido móvil

Un termómetro sumergido en un fluido en reposo indica una temperatura igual a la del fluido. Sin embargo, si el fluido está en movimiento, el termómetro indica una temperatura ligeramente más alta. Esto se debe a que el fluido queda en reposo en la superficie del termómetro y se ve calentado por rozamiento interno.

El problema general puede formularse del modo siguiente. Un cuerpo de forma arbitraria está sumergido en un fluido móvil. Se establece el equilibrio térmico después de un tiempo suficientemente largo y se desea determinar la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ que existe entonces entre el cuerpo y el fluido.

La solución de este problema viene dada por la ecuación (50.2), en la que, sin embargo, no podemos despreciar ahora el término que contiene la viscosidad, como hicimos en (53.1); este término es el responsable del efecto en consideración. Así pues, tenemos para el caso de un estado estacionario

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, T = \chi \triangle T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \qquad (55.1)$$

Esta ecuación debe complementarse con las ecuaciones del movimiento (53.3) del propio fluido y también, estrictamente hablando, con la ecuación de la conducción térmica en el cuerpo. En el caso límite en el que el cuerpo tiene una conductividad térmica suficientemente pequeña, podemos despreciar esta última y suponer que la temperatura en un punto cualquiera de la superficie del mismo es simplemente igual a la temperatura del fluido en dicho punto, obtenida al resolver la ecuación (55.1) con la condición límite $\partial T/\partial n = 0$, es decir, la condición de que no existe flujo térmico a través de la superficie del cuerpo. En el caso límite opuesto, en donde el cuerpo tiene una conductividad suficientemente grande, podemos utilizar la condición aproximada de que la temperatura podrá ser la misma en todo punto de su superficie; la derivada $\partial T/\partial n$ no se anulará, en general, en toda la superficie y debemos exigir únicamente que el flujo térmico total a través de la super-

ficie del cuerpo (es decir, la integral de $\partial T/\partial n$ en la superficie) sea nula. En ambos casos límites, la conductividad térmica del cuerpo no aparece explícitamente en la solución del problema y supondremos en lo que sigue que es válido uno de estos casos.†

Las ecuaciones (55.1) y (53.3) contienen los parámetros constantes χ, ν y c_p, y en sus soluciones intervienen también la dimensión l del cuerpo y la velocidad U de la corriente principal. (La diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ no es ahora un parámetro arbitrario, sino que debe ella misma determinarse al resolver las ecuaciones.) A partir de estos parámetros podemos construir dos magnitudes adimensionales independientes que hacemos coincidir con R y P. Entonces, podemos decir que la diferencia de temperaturas requerida $T_1 - T_0$ es igual a una determinada magnitud que tiene las dimensiones de la temperatura (que consideraremos que es U^2/c_p), multiplicada por una función de R y P:

$$T_1 - T_0 = (U^2/c_p) f(\mathrm{R}, \mathrm{P}). \tag{55.2}$$

Es fácil determinar la forma de esta función para números de Reynolds muy pequeños, es decir, para velocidades U suficientemente pequeñas. En este caso, el término $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, T$ en (55.1) es pequeño en comparación con $\chi \triangle T$, de modo que esta ecuación se transforma en

$$\chi \triangle T = -\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{55.3}$$

La temperatura y la velocidad varían considerablemente en distancias del orden de l. De aquí que una estimación de ambos miembros de la ecuación (55.3) dé $\chi(T_1 - T_0)/l^2 \sim \nu U^2/c_p l^2$, o sea, $T_1 - T_0 \sim \nu U^2/\chi c_p$. Así pues, obtenemos la conclusión de que, para R pequeño,

$$T_1 - T_0 = \text{constante} \times \mathrm{P} U^2/c_p, \tag{55.4}$$

en donde la constante numérica depende de la forma del cuerpo. Debe señalarse que la diferencia de temperaturas es proporcional al cuadrado de la velocidad U.

Pueden obtenerse algunas conclusiones generales respecto a la forma de la función $f(\mathrm{P}, \mathrm{R})$ en (55.2) en el caso límite opuesto de valores grandes de R, cuando la velocidad y la temperatura varían únicamente en una capa límite estrecha. Sean δ y δ' las distancias respecto a las cuales varían, respectivamente, la velocidad y la temperatura; δ y δ' difieren en un factor que depende de P. La cantidad de calor desarrollada en la unidad de área de la capa límite en la unidad de tiempo debida a la viscosidad del fluido es la

† I. A. KIBEL' ha obtenido una solución exacta para la rotación de un disco caliente dentro de un fluido viscoso, análoga a la dada en § 23 para una temperatura constante; ver *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **11**, 611, 1947.

integral de $1/2\nu\rho(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)^2$ en el espesor de la capa [ver (16.3)]. Esta integral es del orden de $\nu\rho(U^2/\delta^2)\delta = \nu\rho U^2/\delta$. La misma cantidad de calor debe perderse en el cuerpo y es, por tanto, igual al flujo térmico $q = -\kappa\partial T/\partial n \sim \chi c_p\rho(T_1 - T_0)/\delta'$. Comparando ambas expresiones, encontramos

$$T_1 - T_0 = (U^2/c_p)f(\mathrm{P}). \tag{55.5}$$

Así pues, en este caso, la función f es independiente de R, pero su dependencia respecto a P sigue siendo indeterminada.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la distribución de temperaturas en un fluido con flujo de Poiseuille en una tubería de sección recta circular, cuyas paredes se mantienen a una temperatura constante T_0.

Solución. En coordenadas cilíndricas, con el eje z situado a lo largo del eje de la tubería, tenemos $v_z = v = 2v_m[1 - (r/R)^2]$, siendo v_m la velocidad media del flujo. La sustitución en (55.3) nos da la ecuación

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{16v_m^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2.$$

La solución que debe ser finita para $r = 0$ e igual a T_0 para $r = R$ es

$$T - T_0 = v_m^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right]^4.$$

Problema 2. Determinar la diferencia de temperaturas entre una esfera sólida y un fluido que pasa a su alrededor cuando los números de Reynolds son pequeños. La conductividad térmica de la esfera se supone grande.

Solución. Tomaremos coordenadas esféricas r, θ, ϕ, con el origen en el centro de la esfera y el eje polar en la dirección de la velocidad de la corriente principal. Calculando los componentes del tensor $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ mediante las fórmulas (15.17) y (20.9), obtenemos la ecuación (55.3) en la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$
$$= -A(R/r)^4[\cos^2\theta\{3 - 6(R/r)^2 + 2(R/r)^4\} + (R/r)^4],$$

en donde $A = 9u^2\mathrm{P}/4c_p$. Buscamos una expresión para $T(r, \theta)$ en forma $T = f(r)\cos^2\theta + g(r)$, y, separando la parte que depende de θ, encontramos dos ecuaciones para f y g:

$$r^2f'' + 2rf' - 6f = -A[3(R/r)^2 - 6(R/r)^4 + 2(R/r)^6],$$
$$r^2g'' + 2rg' + 2f = -A(R/r)^6.$$

A partir de la primera se obtiene

$$f = A[\tfrac{3}{4}(R/r)^2 + (R/r)^4 - \tfrac{1}{12}(R/r)^6] + c_1(R/r)^3;$$

el término de la forma constante $\times r^2$ se omite, puesto que no se anula en el infinito. La segunda ecuación nos da, entonces,

$$g = -\tfrac{1}{2}A[\tfrac{3}{2}(R/r)^2 + \tfrac{1}{3}(R/r)^4 + \tfrac{1}{18}(R/r)^6] - \tfrac{1}{3}c_1(R/r)^3 + c_2R/r + c_3.$$

Se determinan las constantes c_1, c_2, c_3 a partir de las condiciones

$$T = \text{constante y } \int (\partial T/\partial r) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

para $r = R$, que son equivalentes a $f(R) = 0$ y $g'(R) + f'(R)/3 = 0$; además, $T = T_0$ en el infinito. Así pues, $c_1 = -5A/3$, $c_2 = 2A/3$, $c_3 = T_0$. La diferencia de temperaturas entre $T_1 = T(R)$ y T_0 resulta ser $T_1 - T_0 = 5u^2P/8c_p$. Puede señalarse que la distribución de temperaturas obtenida satisface realmente la condición $\partial T/\partial r = 0$ para $r = R$, es decir, $f'(R) = g'(R) = 0$. De aquí que sea también la solución del mismo problema en el caso de una esfera de pequeña conductividad térmica.

§ 56. Convección libre

Hemos visto en § 3 que, si existe un equilibrio mecánico dentro de un fluido que está en un campo gravitatorio, la distribución de temperaturas sólo puede depender de la altitud z: $T = T(z)$. Si la distribución de temperaturas no satisface esta condición, sino que también es una función de las demás coordenadas, entonces no es posible el equilibrio mecánico. Además, incluso en el caso de que $T = T(z)$, puede seguir siendo imposible el equilibrio mecánico si el gradiente vertical de temperaturas está dirigido hacia abajo y su valor excede un cierto valor (§ 4).

La ausencia del equilibrio mecánico da como resultado la aparición de corrientes internas en el fluido, que tienden a mezclarlo y a hacer que adquiera una temperatura constante. Dicho movimiento, en el caso de un campo gravitatorio, se denomina *convección libre*.

Deduzcamos las ecuaciones que describen esta convección. Supondremos que el fluido es incompresible. Esto significa que la presión se supone que varía sólo ligeramente a través del fluido, de modo que puedan despreciarse las variaciones de densidad debidas a los cambios de presión. Por ejemplo, en la atmósfera, en donde la presión varía con la altura, esta hipótesis significa que no consideraremos columnas de aire de gran altura, en las cuales la densidad varía considerablemente a lo largo de dicha altura. La variación de densidad debida al calentamiento no uniforme del fluido no puede despreciarse, como es natural; da como resultado las fuerzas que originan la convección.

Escribamos la temperatura variable $T(x, y, z, t)$ en la forma $T = T_0 + T'$, siendo T_0 una temperatura media constante a partir de la cual se deduce la variación T'., Supondremos que T' es pequeña en comparación con T_0.

Escribamos la densidad del fluido también en la forma $\rho = \rho_0 + \rho'$, siendo ρ_0 una constante. Puesto que la variación de temperatura T' es pequeña, la variación de densidad resultante ρ' es también pequeña y podemos escribir

$$\rho' = (\partial \rho_0/\partial T)_p \, T' = -\rho_0 \beta T'. \tag{56.1}$$

En este caso $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ es el coeficiente de dilatación térmica del fluido.

En la presión $p = p_0 + p'$, p_0 no es constante. Es la presión que corresponde al equilibrio mecánico cuando la temperatura y la densidad son constantes e iguales a T_0 y ρ_0, respectivamente. Varía con la altura de acuerdo con la ecuación hidrostática

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{g}\cdot\mathbf{r} + \text{constante}. \tag{56.2}$$

Empezaremos transformando la ecuación de Navier-Stokes, que en presencia de un campo gravitatorio tiene la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p + \nu\triangle\mathbf{v} + \mathbf{g};$$

esta expresión se obtiene sumando la fuerza g por unidad de masa al segundo miembro de la ecuación (15.7). Sustituyamos ahora $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$; dentro del primer orden de magnitud, tenemos

$$\frac{\mathbf{grad}\,p}{\rho} = \frac{\mathbf{grad}\,p_0}{\rho_0} + \frac{\mathbf{grad}\,p'}{\rho_0} - \frac{\mathbf{grad}\,p_0}{\rho_0^2}\rho',$$

o sea, sustituyendo (56.1) y (56.2),

$$\frac{\mathbf{grad}\,p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{grad}\,p'}{\rho_0} + \mathbf{g}T'\beta.$$

Con esta expresión, la ecuación de Navier-Stokes resulta

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p' + \nu\triangle\mathbf{v} - \beta T'\mathbf{g}, \tag{56.3}$$

en donde se ha eliminado el sufijo de ρ_0. En la ecuación de conducción térmica (50.2), el término de viscosidad puede demostrarse que es pequeño en la convección libre en comparación con los otros términos y, por tanto, puede omitirse. Así se obtiene

$$\partial T'/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,T' = \chi\triangle T'. \tag{56.4}$$

Las ecuaciones (56.3) y (56.4), junto con la ecuación de continuidad $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, forman un sistema completo de ecuaciones que rigen la convección libre.

En el caso de un flujo estacionario, las ecuaciones de convección se transforman en

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p' - \beta T'\mathbf{g} + \nu\triangle\mathbf{v}, \tag{56.5}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,T' = \chi\triangle T', \tag{56.6}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{56.7}$$

Este sistema de cinco ecuaciones para las funciones incógnitas $\mathbf{v}$, p'/ρ y T' contiene tres parámetros, ν, χ y βg. Además, en la solución intervendrá una longitud característica l y la diferencia de temperaturas $T_1 - T_0$ entre el cuerpo sólido y el fluido a gran distancia. Aquí no existe ninguna velocidad ca-

racterística, puesto que no existe tampoco flujo debido a fuerzas externas y el movimiento completo del fluido se debe a una calefacción no uniforme.

Así pues, la convección libre estacionaria en un campo gravitatorio está caracterizada por cinco parámetros que tienen las dimensiones siguientes: $\chi = \nu = \text{cm}^2/\text{s}$, $T_1 - T_0 = \text{grados}$, $l = \text{cm}$, $\beta g = \text{cm/s}^2$ grado. A partir de ellos podemos formar dos magnitudes adimensionales independientes que resultan ser el número de Prandtl, $\text{P} = \nu/\chi$, y el *número de Grashof*,

$$\text{G} = \beta g l^3 (T_1 - T_0)/\nu^2. \tag{56.8}$$

Por consiguiente, la ley de semejanza para la convección libre es

$$\mathbf{v} = (\nu/l)\mathbf{f}(\mathbf{r}/l, \text{G}), \qquad T = (T_1 - T_0) f(\mathbf{r}/l, \text{P}, \text{G}). \tag{56.9}$$

Dos flujos son semejantes si son iguales sus números de Prandtl y de Grashof.

La transferencia de calor convectiva producida por la gravedad está caracterizada de nuevo por el número de Nusselt, que es ahora una función de P y de G únicamente:

$$\text{N} = f(\text{P}, \text{G}). \tag{56.10}$$

El valor del número de Grashof es una característica importante del flujo convectivo. Cuando G es suficientemente pequeño, la convección libre carece de importancia en la transferencia térmica del fluido, que se debe entonces principalmente a la conducción ordinaria.

El flujo convectivo puede ser laminar o turbulento. No existe número de Reynolds para la convección libre (puesto que no existe ningún parámetro de velocidad característica), y la iniciación de la turbulencia se determina por el número de Grashof: la convección resulta turbulenta cuando G es muy grande.

Se produce un caso muy curioso de convección en el flujo de un fluido entre dos planos infinitos horizontales a diferentes temperaturas en el caso de que el plano inferior (T_2) tenga una temperatura mayor que el plano superior (T_1). Si la diferencia de temperaturas $T_2 - T_1$ es pequeña, el fluido permanece en reposo y existe una conducción térmica pura, siendo la temperatura y densidad del fluido funciones únicamente de la coordenada vertical z; la densidad aumenta hacia arriba. Sin embargo, si la diferencia $T_2 - T_1$ supera un determinado valor crítico, que depende de la distancia l entre los planos, dicho estado se hace inestable y se presenta una convección estacionaria. La iniciación de la inestabilidad puede determinarse teóricamente (ver problema 5). El valor crítico de la diferencia $T_2 - T_1$ aparece como un factor en el producto

$$\text{GP} = \beta g l^3 (T_2 - T_1)/\nu\chi. \tag{56.11}$$

En una capa de fluido situada entre dos planos sólidos a temperaturas constantes, debe producirse la convección si $\text{GP} > 1710$. Si la superficie superior

es libre, pero todavía tiene una temperatura constante, entonces la convección se produce para $GP > 1100$.†

El flujo convectivo que se produce es realmente poco corriente. Puesto que el fluido no está limitado en el plano horizontal, es evidente que el flujo debe ser periódico en dicho plano. En otras palabras, el espacio situado entre los planos que limitan al fluido debe dividirse en prismas rectos semejantes, en cada uno de los cuales se mueve el fluido de un modo semejante. Las secciones rectas horizontales de estos prismas forman una red en el plano horizontal. La determinación teórica de la naturaleza de esta red es muy difícil, pero los resultados experimentales parecen indicar que existe un esquema exagonal con células en forma de prismas exagonales, moviéndose el fluido hacia arriba en la parte media del prisma y hacia abajo en sus partes laterales o viceversa.

En el caso de valores muy grandes de G, la convección estacionaria se vuelve a su vez inestable; entonces, se establece la turbulencia para $G \sim 50\,000$.

Otro caso semejante de inestabilidad es el de la convección en el caso de una tubería cilíndrica vertical, a lo largo de la cual se mantiene una gradiente de temperaturas constante. De nuevo tenemos aquí un valor crítico del producto GP, más allá del cual el fluido en reposo resulta inestable; ver problema 6.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el número de Nusselt para la convección libre en el caso de una placa plana vertical. Se supone que la velocidad y la diferencia de temperaturas $T' = T - T_0$ (siendo T_0 la temperatura de fluido en el infinito) son apreciablemente distintas de cero únicamente en una capa límite delgada junto a la superficie de la placa (K. POHLHAUSEN).

Solución. Tomemos el origen en el borde inferior de la placa, el eje x vertical y el eje y perpendicular a la placa. La presión en la capa límite no varía a lo largo del eje y (ver § 39), y, por lo tanto, en todos los puntos es igual a la presión hidrostática $p_0(x)$, es decir, $p' = 0$. Con la exactitud normal considerada en la teoría de la capa límite, las ecuaciones (56.5)-(56-7) se transforman en

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \beta g(T - T_0), \tag{1}$$

† Estas condiciones (para una diferencia $T_2 - T_1$ dada) se cumplen siempre si l es suficientemente grande. Para evitar malas interpretaciones, señalaremos que estamos hablando ahora de valores l para los cuales carece de importancia la variación de la densidad del fluido bajo la acción de la gravedad. De aquí que no pueden aplicarse los criterios anteriores a una columna gaseosa de gran altura. En este caso, hemos de utilizar el criterio deducido en § 4, a partir del cual vemos que no es preciso que se produzca convección en una columna de altura cualquiera, si el gradiente es suficientemente pequeño.

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \tag{3}$$

con las condiciones límites $v_x = v_y = 0$ y $T = T_1$ para $y = 0$ (siendo T_1 la temperatura de la placa), $v_x = 0$ y $T = T_0$ para $y = \infty$. Estas ecuaciones pueden convertirse en ecuaciones diferenciales ordinarias introduciendo como variables independientes

$$\xi = Cy/x^{\frac{1}{4}}, \qquad C = [\beta g(T_1-T_0)/4\nu^2]^{\frac{1}{4}}. \tag{4}$$

Pongamos

$$v_x = 4\nu C^2\sqrt{x}\phi'(\xi), \qquad T-T_0 = (T_1-T_0)\theta(\xi). \tag{5}$$

Entonces (3) da $v_y = \nu C x^{-1/4}(\xi\phi' - 3\phi)$, y (1) y (2) nos dan ecuaciones para ϕ y θ:

$$\phi''' + 3\phi\phi'' - 2\phi'^2 + \theta = 0, \qquad \theta'' + 3\mathrm{P}\phi\theta' = 0, \tag{6}$$

con las condiciones límites $\phi(0) = \phi'(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $\phi'(\infty) = 0$, $\theta(\infty) = 0$. Se deduce de (4) y (5) que el espesor de la capa límites es del orden de $\delta \sim x^{1/4}/C$. La condición para que sea válida la solución es, por tanto, $\delta \ll l$ (siendo l la altura de la placa), o sea, $G^{1/4} \gg 1$. El flujo térmico total por unidad de área de la placa es

$$q = -\frac{1}{l}\int_0^l \kappa\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \mathrm{d}x = -\tfrac{4}{3}\kappa\theta'(0,\mathrm{P})C(T_1-T_0)l^{-\frac{1}{4}}.$$

El número de Nusselt es $\mathrm{N} = f(\mathrm{P})G^{1/4}$, estando determinada la función $f(\mathrm{P})$ mediante la resolución de las ecuaciones (6).

Problema 2. Un chorro de gas sumergido turbulento y caliente se desvía por la acción de un campo gravitatorio; hallar su forma (G. N. ABRAMOVICH, 1938).

Solución. Sea T' cierto valor medio (respecto a la sección recta del chorro) de la diferencia de temperaturas entre el chorro y el gas que lo rodea, u una determinada velocidad media del gas en el chorro y l la distancia a lo largo del mismo desde su punto de entrada; se supone que l es grande en comparación con las dimensiones de la abertura por la cual entra el chorro. La condición de flujo térmico constante Q a lo largo del chorro es $Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \text{constante}$ y, puesto que el radio de un chorro turbulento es proporcional a l (ver § 35), tenemos

$$T'ul^2 = \text{constante} \sim Q/\rho c_p; \tag{1}$$

observemos que, en ausencia del campo gravitatorio, $u \sim 1/l$ [ver (35.3)] y se deduce entonces de (1) que $T' \sim 1/l$.

El vector de flujo del impulso que atraviesa la sección recta del chorro es proporcional a $\rho u^2 R^2\mathbf{n} \sim g u^2 l^2\mathbf{n}$, en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad a lo largo del chorro. Su componente horizontal es constante a lo largo del mismo:

$$u^2l^2\cos\theta = \text{constante}, \tag{2}$$

siendo θ el ángulo entre $\mathbf{n}$ y la horizontal, mientras que la variación en la componente vertical se debe a la «fuerza de sustentación» que actúa sobre el chorro. Esta fuerza es proporcional a

$$\rho\beta g T' R^2 \sim \rho\beta g T' l^2 \sim \beta g Q/c_p u.$$

De aquí que tengamos

$$\mathrm{d}(l^2u^2\,\mathrm{sen}\theta)/\mathrm{d}l \sim \beta g Q/\rho c_p u. \tag{3}$$

Se deduce entonces de (2) que $\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,\theta)\mathrm{d}l/ = \text{constante} \times l\cos^{1/2}\theta$, de aquí que se obtenga finalmente

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^{5/2}\theta} = \text{constante} \times l^2, \tag{4}$$

dando θ_0 la dirección del chorro emergente.

En particular, si θ no varía apreciablemente a lo largo del chorro, (4) da $\theta - \theta_0 = \text{constante} \times l^2$. Esto significa que el chorro es una parábola cúbica, en la cual la desviación d de una línea recta es $d = \text{constante} \times l^3$.

Problema 3. Un chorro turbulento de gas caliente (es decir, con un número de Grashof grande) procede de un cuerpo muy caliente fijo. Determinar la variación de la velocidad y de la temperatura en el chorro con la altura (YA. B. ZEL'DOVICH, 1937).

Solución. Como en el caso anterior, el radio del chorro es proporcional a la distancia a su fuerte y tenemos, análogamente a (1) del problema 2, $T'uz^2 = \text{constante}$, y en lugar de (3), $\mathrm{d}(z^2u^2)/\mathrm{d}z = \text{constante}/u$, siendo z la altura por encima del cuerpo, supuesto este valor grande en comparación con la dimensión del mismo. Integrando, se encuentra $u \sim z^{-1/3}$, y para la temperatura $T' \sim z^{-5/3}$.

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de un chorro convectivo laminar que surge libremente (YA. B. ZEL'DOVICH, 1937).

Solución. Junto con la relación $T'uR^2 = \text{constante}$, que expresa la constancia del flujo térmico, tenemos $u^2/z \sim \nu u/R^2 \sim \beta g T'$, que se deduce de la ecuación (56.5). A partir de estas relaciones encontramos la siguiente variación del radio, de la velocidad y de la temperatura con la altura: $R \sim \sqrt{z}$, $u = \text{constante}$, $T' \sim 1/z$. Puede observarse que el número $\mathrm{G} \sim T'R^3 \sim \sqrt{z}$, es decir, aumenta con la altura y, por tanto, el chorro debe convertirse en turbulento a una determinada altitud.

Problema 5. Deducir las ecuaciones que rigen la iniciación de la convección estacionaria entre dos planos horizontales mantenidos a temperaturas dadas (RAYLEIGH, 1916).

Solución. Se aplica una perturbación proporcional a $e^{-i\omega t}$ a un fluido en reposo con un gradiente vertical de temperaturas $\partial T/\partial z = -A < 0$. El estado de reposo es inestable si existe un valor posible cualquiera de ω, cuya parte imaginaria sea positiva. De aquí que la iniciación de la inestabilidad está determinada por la aparición de una solución en la cual sea nula la parte imaginaria de ω. En este caso nos enfrentamos con la aparición de una convección estacionaria como resultado de la inestabilidad; de aquí que busquemos soluciones para las cuales la parte real de ω sea también cero, es decir, soluciones independientes del tiempo.

En las ecuaciones (56.5)-(56.7) la velocidad $\mathbf{v}$ del movimiento perturbativo y la variación de presión resultante p' son magnitudes pequeñas. Escribamos la temperatura como $T' = -Az + \tau$, en donde la perturbación τ es pequeña; supongamos que la variación de

presión que se obtiene como resultado del gradiente de temperaturas constante ha de incluirse en p_0. Entonces, se encuentra, omitiendo los términos de segundo orden,

$$\nu\triangle\mathbf{v} = \mathbf{grad}(p'/\rho)+\beta_T\mathbf{g},$$
$$\chi\triangle T = -Av_z, \qquad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Eliminando $\mathbf{v}$ y p'/ρ, obtenemos una ecuación para T:

$$\triangle^3 T = \frac{\gamma}{l^4}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

en donde $\gamma = l^4\beta gA/\nu\chi$ = GP, y l es la distancia entre los planos.

Las condiciones límites en las ecuaciones (1) en una superficie sólida son $T = 0$, $v_z = 0$, $\partial v_z/\partial z = 0$. La última de ellas se deduce a partir de la ecuación de la continuidad, puesto que debemos tener $v_x = v_y = 0$ para todo valor de x e y. Por la segunda ecuación (1), pueden sustituirse las condiciones sobre v_z por las condiciones respecto a derivadas superiores de T, sustituyendo v_z por $\partial^2 T/\partial z^2$.

Busquemos una expresión para T en la forma $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}f(z)$, en donde $\mathbf{k}$ es un vector en el plano xy, y obtendremos para $f(z)$ la ecuación

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-k^2\right)^3 f+\frac{\gamma k^2}{l^4}f = 0.$$

La solución general de esta ecuación es una combinación lineal de la función $\cosh(\mu z/l)$ y $\mathrm{senh}(\mu z/l)$, en donde $\mu^2 = k^2l^2-\gamma^{1/3}(kl)^{2/3}\sqrt[3]{1}$ con los tres valores diferentes posibles de la raíz cúbica de 1. Se determinan los coeficientes mediante las condiciones límites que conducen a un sistema de ecuaciones algebraicas; la condición de compatibilidad determina entonces la función $kl(\gamma)$. La función inversa $\gamma = \gamma(kl)$ tiene un mínimo para un determinado valor de kl; el valor correspondiente γ = GP determina el criterio buscado para la aparición de la inestabilidad y el valor de k determina la periodicidad en el plano xy del movimiento resultante, pero no su simetría.†

Problema 6. Determinar la iniciación de la convección estacionaria en un fluido en reposo dentro de una tubería cilíndrica vertical en la cual se mantiene un gradiente constante de temperaturas (G. A. Ostroumov, 1946).

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (1) del problema 5, en la cual la velocidad convectiva $\mathbf{v}$ sea en todo punto paralela al eje de la tubería (eje z) y en donde el esquema del flujo no varíe a lo largo de este eje, es decir, $v_z = v$, T y $\partial p'/\partial z$ dependen únicamente de las coordenadas x e y. Entonces, las ecuaciones se transforman en $\partial p'/\partial x = 0$, $\partial p'/\partial y = 0$, $\nu\Delta_2 v = -\beta g T + (1/\rho)\partial p'/\partial z$, $\chi\Delta_2 T = -Av$, en donde $\Delta_2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Las dos primeras ecuaciones muestran que $\partial p'/\partial z$ = constante, y, eliminando T de las demás ecuaciones, tenemos

$$\triangle_2{}^2 v = \gamma v/R^4, \tag{1}$$

en donde hemos puesto de nuevo $\gamma = AR^4\beta g/\chi\nu$ = GP, siendo R el radio de la tubería. En la superficie de la misma debemos tener $v = 0$ y el flujo térmico debe ser continuo. Además, el flujo de masa total a través de una sección recta de la tubería debe ser nulo.

† Una descripción detallada de los cálculos ha sido dada por A. Pellew y R. V. Southwell, *Proceedings of the Royal Society*, A176, 312, 1940.

La ecuación (1) tiene soluciones de la forma $J_n(kr)\cos n\phi$ e $I_n(kr)\cos n\phi$, en donde J_n e I_n son las funciones de Bessel de argumento real e imaginario, respectivamente, r y ϕ son las coordenadas polares en la sección recta y $kR = \gamma^{1/4}$. La iniciación de la convección corresponde a la solución para la cual γ es mínima. Se encuentra que ésta es la solución con $n = 1$:

$$v = v_0 \cos\phi[J_1(kr)I_1(kR) - I_1(kr)J_1(kR)],$$

$$\tau = v_0(\nu k^2/\beta g)\cos\phi[J_1(kr)I_1(kR) + I_1(kr)J_1(kR)].$$

No aparece el gradiente de presiones $\partial p'/\partial z$. La condición $v = 0$ para $r = R$ se satisface idénticamente y el flujo de masa total a través de la sección recta de la tubería es cero. En el caso límite de paredes térmicamente aislantes debemos tener también $\partial\tau/\partial r = 0$ para $r = R$, o sea,

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} + \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} = \frac{2}{kR}.$$

La menor raíz de esta ecuación da el valor crítico requerido de $\gamma = (kR)^4 = 67{,}4$. En el caso límite opuesto de paredes de conductividad térmica infinita debemos tener $\tau = 0$ para $r = R$; entonces, $J_1(kR) = 0$, de aquí que el valor crítico sea $\gamma = 215{,}8$.†

† Para un estudio más detallado ver G. A. OSTROUMOV, *Free Convection in a Confined Medium* (*Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrennei zadachi*), Moscow, 1952.

CAPÍTULO VI

DIFUSIÓN

§ 57. Ecuaciones de la dinámica de fluidos para una mezcla

En todo el estudio anterior se ha admitido que el fluido es totalmente homogéneo. Sin embargo, si se trata de una mezcla de fluidos, cuya composición sea diferente en distintos puntos, entonces las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven modificadas considerablemente.

Analizaremos ahora sólo mezclas con dos componentes. La composición de la mezcla se describe mediante la concentración c, definida como el cociente de la masa de un componente a la masa total del fluido en un elemento de volumen determinado.

En el transcurso del tiempo, la distribución de la concentración a través del fluido variará en general. Esta modificación se produce de dos modos. En primer lugar, cuando existe un movimiento macroscópico del fluido, cualquier porción pequeña del mismo se mueve como un todo, permaneciendo invariable en su composición. Esto da como resultado una mezcla puramente mecánica del fluido; aunque la composición de cada parte móvil del mismo no se modifique, la concentración del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo. Si ignoramos cualquier proceso de conducción térmica y de rozamiento interno que puede también tener lugar, esta variación de concentración es un proceso termodinámico reversible y no da como resultado ninguna disipación de energía.

En segundo lugar, puede producirse una variación de composición por la transferencia molecular de los componentes de una parte del fluido a otra. La igualación de la concentración por este intercambio directo de composición de cada parte pequeña del fluido se denomina *difusión*. La difusión es un proceso irreversible y como la conducción térmica y la viscosidad es una de las fuentes de disipación de energía en una mezcla de fluidos.

Designemos mediante ρ la densidad total del fluido. La ecuación de continuidad para la masa total del fluido es, como antes,

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{57.1}$$

Esto significa que la masa total del fluido en un volumen cualquiera puede

variar únicamente por el movimiento del fluido que entra o sale de dicho volumen. Debe resaltarse que, hablando estrictamente, el propio concepto de velocidad debe volverse a definir para una mezcla de fluidos. Escribiendo la ecuación de continuidad en la forma (57.1), hemos definido la velocidad del mismo modo que antes, como el impulso total de la unidad de masa de fluido.

También resulta sin variación la ecuación de Navier-Stokes (15.5). Deduciremos ahora las ecuaciones restantes de la dinámica de fluidos para una mezcla de ellos.

En ausencia de difusión, la composición de un elemento de fluido dado cualquiera permanecerá sin variación durante su movimiento. Esto significa que la derivada total dc/dt deberá ser cero, es decir, debe ser válida la ecuación $dc/dt = \partial c/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, c = 0$. Esta ecuación puede escribirse, utilizando (57.1), como

$$\partial(\rho c)/\partial t + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) = 0,$$

es decir, como una ecuación de continuidad para uno de los componentes de la mezcla (siendo ρc la masa de dicho componente en la unidad de volumen). En forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho c \, d\mathbf{V} = -\oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

se ve que la variación respecto al tiempo de la cantidad de este componente en un volumen cualquiera es igual a la cantidad del componente que se transporta a través de la superficie de dicho volumen debido al movimiento del fluido.

Cuando se produce la difusión, además del flujo $\rho c\mathbf{v}$ del componente en cuestión que se mueve junto con el fluido, existe otro flujo que es el resultado de la transferencia de los componentes, aunque el fluido como un todo esté en reposo. Sea $\mathbf{i}$ la densidad de este flujo de difusión, es decir, la cantidad del componente transportado por difusión a través del área unidad por unidad de tiempo.† Entonces tenemos para la variación respecto al tiempo de la cantidad del componente en un volumen cualquiera

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho c \, d\mathbf{V} = -\oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{f},$$

o bien, en forma diferencial,

$$\partial(\rho c)/\partial t = -\operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{i}. \tag{57.2}$$

† La suma de las densidades de flujo para los dos componentes debe ser $\rho\mathbf{v}$. Si la densidad de flujo para un componente es $\rho c\mathbf{v} + \mathbf{i}$, el del otro componente es, por tanto, $\rho(1-c)\mathbf{v} - \mathbf{i}$.

Utilizando (57.1), podemos volver a escribir esta «ecuación de continuidad» para un componente en la forma

$$\rho(\partial c/\partial t+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,c) = -\operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{57.3}$$

Para deducir otra ecuación, repetiremos los argumentos dados en § 49, recordando que las magnitudes termodinámicas correspondientes al fluido son ahora también funciones de la concentración. Al calcular la derivada $\partial(1/2\rho v^2+\rho\epsilon)/\partial t$ (en § 49) mediante las ecuaciones del movimiento, tuvimos que transformar los términos $\rho\partial\epsilon/\partial t$ y $-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p$. Esta transformación debe ahora modificarse debido a que las identidades termodinámicas correspondientes a la energía y a la entalpía contienen ahora un término adicional en el que interviene la diferencial de la concentración:

$$\mathrm{d}\epsilon = T\,\mathrm{d}s+(p/\rho^2)\mathrm{d}\rho+\mu\,\mathrm{d}c,$$

$$\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s+(1/\rho)\mathrm{d}p+\mu\,\mathrm{d}c,$$

en donde μ es un potencial químico de la mezcla adecuadamente definido.† De acuerdo con ello, aparece un término adicional $\rho\mu\partial c/\partial t$ en la derivada $\rho\partial\epsilon/\partial t$. Escribiendo la segunda relación termodinámica en la forma

$$\mathrm{d}p = \rho\,\mathrm{d}w-\rho T\,\mathrm{d}s-\rho\mu\,\mathrm{d}c,$$

vemos que el término $-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p$ contendrá un término adicional $\rho\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,c$.

Así pues, debemos sumar $\rho\mu(\partial c/\partial t+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,c)$ a la expresión (49.3). Mediante la ecuación (57.3), esta última puede escribirse como $-\mu\operatorname{div}\mathbf{i}$. El resultado es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2+w)-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\mathbf{q}]+$$

$$+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\right)-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\operatorname{div}\mathbf{q}-\mu\operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{57.4}$$

† La termodinámica enseña que, en el caso de una mezcla de dos sustancias, la ecuación fundamental es

$$\mathrm{d}\epsilon = T\,\mathrm{d}s-p\,\mathrm{d}V+\mu_1\,\mathrm{d}n_1+\mu_2\,\mathrm{d}n_2,$$

siendo n_1, n_2 los números de partículas de las dos sustancias contenidas en 1 g de la mezcla y μ_1, μ_2 los potenciales químicos de ambas. Los números n_1, n_2 satisfacen la relación $n_1m_1+n_2m_2=1$, en donde m_1 y m_2 son las masas de los dos tipos de moléculas. Si introducimos como variable la concentración $c=n_1m_1$, tenemos

$$\mathrm{d}\epsilon = T\,\mathrm{d}s-p\,\mathrm{d}V+\left(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{\mu_2}{m_2}\right)\mathrm{d}c.$$

Comparando esta expresión con la dada en el texto, vemos que el potencial químico μ está relacionado con μ_1 y μ_2 por

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1}-\frac{\mu_2}{m_2}.$$

Hemos sustituido $-\kappa\,\mathbf{grad}\,T$ por un flujo térmico $\mathbf{q}$, que puede depender no sólo del gradiente de temperaturas, sino también del gradiente de concentraciones (ver la sección siguiente). La suma de los dos últimos términos del segundo miembro puede escribirse

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q}-\mu\,\mathrm{div}\mathbf{i} = \mathrm{div}(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})+\mathbf{i}\cdot\mathbf{grad}\,\mu.$$

La expresión $\rho\mathbf{v}(1/2v^2+w)-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\mathbf{q}$, que es el operando del operador divergencia en (57.4), es, por definición de $\mathbf{q}$, el flujo de energía total del fluido. El primer término es el flujo de energía reversible debido simplemente al movimiento del fluido como un todo, mientras que la suma $-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\mathbf{q}$ es el flujo irreversible. Cuando no existe ningún movimiento macroscópico, el flujo de viscosidad $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'$ es cero, y el flujo térmico es simplemente $\mathbf{q}$.

La ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon) = -\mathrm{div}[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2+w)-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}'+\mathbf{q}]. \qquad (57.5)$$

Restando de (57.4), obtenemos la ecuación requerida

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\mathrm{div}(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})-\mathbf{i}\cdot\mathbf{grad}\,\mu, \qquad (57.6)$$

que es una generalización de (49.4).

Hemos obtenido así un sistema completo de ecuaciones de la mecánica de fluidos para una mezcla de estos. El número de ecuaciones en este sistema es una más que en el caso de un fluido simple, puesto que existe otra función incógnita, a saber, la concentración. Las ecuaciones son: la ecuación de continuidad (57.1), las ecuaciones de Navier-Stokes, la «ecuación de continuidad» (57.2) para un componente y la ecuación (57.6), que determina la variación de entropía. Debe señalarse que las ecuaciones (57.2) y (57.6), tal y como están expresadas, determinan únicamente la forma de las ecuaciones correspondientes de la dinámica de fluido, puesto que en ellas intervienen los flujos indeterminados $\mathbf{i}$ y $\mathbf{q}$. Estas ecuaciones se hacen determinadas únicamente cuando se sustituyen $\mathbf{i}$ y $\mathbf{q}$ por expresiones en función de los gradientes de la concentración y de la temperatura. Las expresiones correspondientes se obtendrán en § 58.

En el caso de la variación respecto al tiempo de la entropía total del fluido, un cálculo totalmente semejante al del § 49, pero sustituyendo (57.6) en lugar de (49.4), da el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho s\,\mathrm{d}V = -\int\frac{(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})\cdot\mathbf{grad}\,T}{T^2}\mathrm{d}V-\int\frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{grad}\,\mu}{T}\mathrm{d}V+\ldots, \qquad (57.7)$$

en donde hemos omitido, por brevedad, los términos de viscosidad.

§ 58. Coeficientes de transferencia de masa y de difusión térmica

El flujo de difusión **i** y el flujo térmico **q** se deben a la presencia de gradientes de concentración y de temperatura en el fluido. Sin embargo, no debe pensarse que **i** depende únicamente del gradiente de concentraciones y que **q** lo hace solamente del gradiente de temperaturas. Por el contrario, cada uno de estos flujos depende, en general, de ambos gradientes.

Si los gradientes de concentración y de temperatura son pequeños, podemos suponer que **i** y **q** son funciones lineales de **grad** μ y **grad** T.† De acuerdo con ello, escribiremos **i** y **q** como

$$\mathbf{i} = -\alpha\,\mathbf{grad}\,\mu - \beta\,\mathbf{grad}\,T, \quad \mathbf{q} = -\delta\,\mathbf{grad}\,\mu - \gamma\,\mathbf{grad}\,T + \mu\mathbf{i}.$$

Existe una relación simple entre los coeficientes β y δ que es una consecuencia de un *principio de simetría para los coeficientes cinéticos*. Este principio de simetría tiene la forma siguiente.‡

Consideremos un sistema cerrado cualquiera, y sean x_1, x_2, ..., algunas magnitudes que caracterizan el estado del mismo. Sus valores de equilibrio se determinan por el hecho de que, en el equilibrio estadístico, la entropía S del sistema completo debe ser un máximo, es decir, debemos tener $X_a = 0$ para todo a, en donde X_a designa la derivada

$$X_a = -\partial S/\partial x_a. \tag{58.1}$$

Supongamos que el sistema está en un estado próximo al equilibrio. Esto significa que todos los valores x_a difieren muy poco de sus valores de equilibrio y que las derivadas X_a son pequeñas. Se producirán procesos en el sistema que tenderán a llevarlos hacia el equilibrio. Las magnitudes x_a son funciones del tiempo y su variación respecto al mismo viene dada por las derivadas temporales $\dot{x}_a$; expresaremos estas últimas como funciones de X_a, y desarrollaremos estas funciones en serie. Deteniéndonos en los términos de primer orden, tenemos

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \tag{58.2}$$

El principio de simetría para los coeficientes cinéticos establece que los γ_{ab} (denominados *coeficientes cinéticos*) son simétricos respecto al sufijo a y b:

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{58.3}$$

La variación respecto al tiempo de la entropía S es

$$\dot{S} = -\sum X_a \dot{x}_a. \tag{58.4}$$

† Los flujos **q** e **i** son independientes del gradiente de presiones (para unas magnitudes **grad** μ y **grad** T dadas), por la misma razón que la dada respecto a **q** en § 49.

‡ Ver *Física Estadística*, § 119, Editorial Reverté, Barcelona.

Ahora supongamos que los valores propios x_a son diferentes en distintos puntos del sistema, es decir, que cada elemento de volumen tiene sus propios valores de x_a. Esto es, supongamos que las magnitudes x_a son funciones de las coordenadas. Entonces, en la expresión dada para $\dot{S}$, además de sumar respecto a a, debemos integrar respecto al volumen del sistema:

$$\dot{S} = -\int \sum_a X_a \dot{x}_a \, dV. \tag{58.4a}$$

Normalmente es cierto que los valores de $\dot{x}_a$ en un punto determinado cualquiera dependen únicamente de los valores de X_a en dicho punto. En este caso podemos escribir la relación existente entre $\dot{x}_a$ y X_a para cada punto del sistema y obtendremos las mismas fórmulas que antes.†

En el problema que estamos considerando, tomaremos como valores de las $\dot{x}_a$ los componentes de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}$. Entonces, vemos en comparación con (57.7) y (58.4a) que los valores de X_a son, respectivamente, los componentes de los vectores $(1/T)\,\mathbf{grad}\,\mu$ y $(1/T^2)\,\mathbf{grad}\,T$. Los coeficientes cinéticos γ_{ab} son los coeficientes de estos vectores en las ecuaciones

$$\mathbf{i} = -\alpha T\left(\frac{\mathbf{grad}\,\mu}{T}\right) - \beta T^2\left(\frac{\mathbf{grad}\,T}{T^2}\right),$$

$$\mathbf{q} - \mu\mathbf{i} = -\delta T\left(\frac{\mathbf{grad}\,\mu}{T}\right) - \gamma T^2\left(\frac{\mathbf{grad}\,T}{T^2}\right).$$

Mediante la simetría de los coeficientes cinéticos debemos tener $\beta T^2 = \delta T$, o sea, $\delta = \beta T$. Esta es la relación requerida.

Por lo tanto, podemos escribir los flujos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{q}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha\,\mathbf{grad}\,\mu - \beta\,\mathbf{grad}\,T, \\ \mathbf{q} &= -\beta T\,\mathbf{grad}\,\mu - \gamma\,\mathbf{grad}\,T + \mu\mathbf{i}, \end{aligned} \tag{58.5}$$

con sólo tres coeficientes independientes, α, β y γ. Es conveniente eliminar $\mathbf{grad}\,\mu$ de la expresión correspondiente al flujo térmico, sustituyéndole por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{grad}\,T$. Entonces, tenemos

$$\mathbf{i} = -\alpha\,\mathbf{grad}\,\mu - \beta\,\mathbf{grad}\,T, \tag{58.6}$$

$$\mathbf{q} = (\mu + \beta T/\alpha)\mathbf{i} - \kappa\,\mathbf{grad}\,T, \tag{58.7}$$

en donde

$$\kappa = \gamma - \beta^2 T/\alpha. \tag{58.8}$$

† Con objeto de aplicar las relaciones obtenidas para un conjunto discreto de magnitudes a una distribución continua, y hablando estrictamente, deberíamos escribir la integral (58.4a) como una suma extendida a regiones pequeñas pero finitas ΔV del cuerpo (ver § 132); entonces en la definición de los coeficientes γ_{ab} también interviene ΔV. Sin embargo, en el caso presente, este procedimiento es innecesario, puesto que únicamente hacemos uso de la simetría de los coeficientes cinéticos y no de sus valores reales.

Si el flujo de difusión $\mathbf{i}$ es cero, tenemos una *conducción térmica pura.* Para que esto sea así, T y μ deben satisfacer la ecuación $\alpha\,\mathbf{grad}\,\mu + \beta\,\mathbf{grad}\,T = 0$, o sea, $\alpha\,d\mu + \beta\,dT = 0$. La integración de esta ecuación da una relación de la forma $f(c, T) = 0$ que no contiene las coordenadas explícitamente. (El potencial químico es una función de la presión, lo mismo que de c y T, pero en el equilibrio la presión es constante.) Esta relación determina la dependencia de la concentración con la temperatura que debe ser válida si no existe flujo de difusión. Además, para $\mathbf{i} = 0$, tenemos a partir de (58.7)

$$\mathbf{q} = -\kappa\,\mathbf{grad}\,T,$$

de modo que κ es precisamente la conductividad térmica.

Pasamos ahora a las variables normales p, T y c. Tenemos

$$\mathbf{grad}\,\mu = (\partial\mu/\partial c)_{p,T}\,\mathbf{grad}\,c + (\partial\mu/\partial T)_{c,p}\,\mathbf{grad}\,T + (\partial\mu/\partial p)_{c,T}\,\mathbf{grad}\,p.$$

En el último término podemos sustituir la derivada $(\partial\mu/\partial p)_{c,T}$ por $(\partial V/\partial c)_{p,T}$, siendo V el volumen específico.† Sustituyendo en (58.6) y (58.7), y poniendo

$$D = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{T,p}, \qquad \rho k_T D/T = \alpha(\partial\mu/\partial T)_{c,p} + \beta, \tag{58.9}$$

$$k_p = p(\partial V/\partial c)_{p,T}/(\partial\mu/\partial c)_{p,T}, \tag{58.10}$$

obtenemos

$$\mathbf{i} = -\rho D[\mathbf{grad}\,c + (k_T/T)\,\mathbf{grad}\,T + (k_p/p)\,\mathbf{grad}\,p], \tag{58.11}$$

$$\mathbf{q} = [k_T(\partial\mu/\partial c)_{p,T} - T(\partial\mu/\partial T)_{p,c} + \mu]\mathbf{i} - \kappa\,\mathbf{grad}\,T. \tag{58.12}$$

El coeficiente D se denomina *coeficiente de difusión* o *coeficiente de transferencia de masas*; da el flujo de difusión cuando está presente un solo gradiente de concentración. El flujo de difusión debido al gradiente de temperaturas viene dado por el *coeficiente de difusión térmica* $k_T D$; la magnitud adimensional k_T es el *cociente de difusión térmica.*

El último término en (58.11) únicamente es necesario tenerlo en cuenta cuando existe un gradiente de presiones considerable en el fluido (producido por un campo externo, por ejemplo). El coeficiente $k_p D$ puede denominarse *coeficiente de barodifusión* o *coeficiente de difusión barométrica.* Debe señalarse que, según la fórmula (58.10), la magnitud adimensional k_p queda totalmente determinada por las propiedades termodinámicas únicamente.

† La igualdad de ambas derivadas se deduce de la identidad termodinámica:

$$d\phi = -s\,dT + V\,dp + \mu\,dc,$$

siendo ϕ el potencial termodinámico por unidad de masa:

$$(\partial\mu/\partial p)_{c,T} = \partial^2\phi/\partial p\,\partial c = (\partial V/\partial c)_{p,T}.$$

En un fluido simple no existe, como es natural, flujo de difusión. De aquí que resulte claro que k_T y k_p deben anularse en cada uno de los dos casos límites $c = 0$ y $c = 1$.

La condición del crecimiento de la entropía determina ciertas restricciones en los coeficientes de las fórmulas (58.6) y (58.7). Sustituyendo estas fórmulas en la expresión (57.7) para la variación respecto al tiempo de la entropía, se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s \, dV = \int \frac{\kappa(\mathbf{grad}\, T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\mathbf{i}^2}{\alpha T} dV + \ldots . \qquad (58.13)$$

Es evidente a partir de esta expresión, que, además de la condición $\kappa > 0$ que ya conocemos, debemos tener también $\alpha > 0$. Recordando que la derivada $(\partial\mu/\partial c)_{p,T}$ es siempre positiva,† encontramos, por tanto, que el coeficiente de difusión debe ser positivo: $D > 0$. Sin embargo, las magnitudes k_T y k_p pueden ser positivas o negativas.

No nos entretendremos ahora en escribir las ecuaciones generales, que son muy largas, obtenidas mediante la sustitución de las expresiones anteriores correspondientes a $\mathbf{i}$ y a $\mathbf{q}$ en (57.3) y (57.6). Consideraremos únicamente el caso en que no existe un gradiente de presiones significativo, mientras que la concentración y temperatura del fluido varía tan poco que los coeficientes en las expresiones (58.11) y (58.12) pueden suponerse constantes, aunque sean, en general, funciones de c y T. Además, supondremos que no existe ningún movimiento macroscópico en el fluido, excepto aquél que pueda originarse por los gradientes de temperatura y de concentración. La velocidad de este movimiento es proporcional a los gradientes y los términos (57.3) y (57.6) en los que interviene la velocidad son, por tanto, magnitudes de segundo orden, pudiendo despreciarse. El término $-\mathbf{i}\cdot\mathbf{grad}\,\mu$ en (57.6) es también de segundo orden. Así pues, tenemos $\rho\partial c/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0$, $\rho T\partial s/\partial t + {} + \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}) = 0$.

Sustituyendo los valores de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{q}$ tomados de las expresiones (58.11) y (58.12) (sin el término en $\mathbf{grad}\, p$), y transformando la derivada $\partial s/\partial t$ del modo siguiente:‡

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{c,p}\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p}\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{\partial c}{\partial t},$$

obtenemos después de un cálculo sencillo

$$\partial c/\partial t = D[\triangle c + (k_T/T)\triangle T], \qquad (58.14)$$

$$\partial T/\partial t - (k_T/c_p)(\partial\mu/\partial c)_{p,T}\,\partial c/\partial t = \chi\triangle T. \qquad (58.15)$$

† Ver *Física Estadística*, § 95, Editorial Reverté, Barcelona.

‡ Para

$$(\partial s/\partial c)_{p,T} = -\partial^2\phi/\partial c\,\partial T = -(\partial\mu/\partial T)_{p,c}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales determina las distribuciones de temperatura y de concentración dentro del fluido.

Existe el caso particularmente importante en el que la concentración es pequeña. Cuando la concentración tiende hacia cero, el coeficiente de difusión tiende hacia una constante finita, pero el coeficiente de difusión térmica tiende hacia cero. De aquí que k_T sea pequeño en el caso de concentraciones pequeñas y podamos despreciar el término $k_T \triangle T$ en (58.14), que se transforma entonces en la ecuación de difusión

$$\partial c/\partial t = D \triangle c. \tag{58.16}$$

Las condiciones límites correspondientes a la solución de (58.16) son diferentes en los distintos casos. En la superficie de un cuerpo insoluble en el fluido la componente normal del flujo de difusión $\mathbf{i} = -\rho D \, \mathbf{grad}\, c$ debe anularse, es decir, podemos tener $\partial c/\partial n = 0$. Sin embargo, si existe difusión desde un cuerpo que se disuelve en el fluido, se establece rápidamente el equilibrio cerca de su superficie y la concentración en el fluido junto al cuerpo es la concentración de saturación c_0; la difusión hacia fuera de esta capa tiene lugar más lentamente que el proceso de disolución. La condición límite en dicha superficie es, por lo tanto, $c = c_0$. Finalmente, si una superficie sólida absorbe la sustancia que se difunde y que incide sobre ella, la condición límite es $c = 0$; tenemos un ejemplo de este caso en el estudio de las reacciones químicas que se producen en la superficie de un sólido.

Como la ecuación de la difusión pura (58.16) y la conducción térmica (50.4) tienen exactamente la misma forma, podemos aplicar inmediatamente todas las fórmulas deducidas en §§ 51 y 52, sustituyendo simplemente T por c y χ por D. La condición límite para una superficie térmicamente aislada corresponde a la de una superficie insoluble, mientras que una superficie mantenida a una temperatura constante corresponde a una superficie soluble a partir de la cual tiene lugar la difusión.

En particular, podemos escribir, por analogía con (51.6), la solución siguiente de la ecuación de difusión:

$$c(r) = \frac{M}{8\rho(\pi D t)^{\frac{3}{2}}} \exp(-r^2/4Dt). \tag{58.17}$$

Esta expresión nos da la distribución del soluto en un instante cualquiera, si en el instante $t = 0$ está todo concentrado en el origen (siendo M la cantidad total de soluto).

PROBLEMA

Determinar el coeficiente de difusión barométrica correspondiente a una mezcla de dos gases perfectos.

Solución. Tenemos para el volumen específico $V = kT(n_1 + n_2)/p$ (la notación es la que utilizábamos en la segunda nota a pie de página del § 57), y los potenciales químicos son†

$$\mu_1 = f_1(p, T) + kT \log[n_1/(n_1+n_2)],$$
$$\mu_2 = f_2(p, T) + kT \log[n_2/(n_1+n_2)].$$

Los números n_1 y n_2 se expresan en función de la concentración del primer componente mediante las relaciones $n_1 m_1 = c$, $n_2 m_2 = 1 - c$. Un cálculo utilizando las fórmulas (58.10) da

$$k_p = (m_2 - m_1)c(1-c)\left[\frac{1-c}{m_2} + \frac{c}{m_1}\right].$$

§ 59. Difusión de partículas suspendidas en un fluido

Bajo la influencia del movimiento molecular en un fluido, las partículas suspendidas en el mismo se mueven de un modo irregular (denominado *movimiento browniano*). Supongamos que una de dichas partículas está situada en el origen en el instante inicial. El movimiento siguiente puede considerarse como una difusión en la cual la concentración se representa por la probabilidad de hallar la partícula en un elemento de volumen particular determinado. Por tanto, para determinar esta probabilidad podemos utilizar la solución (58.17) de la ecuación de difusión. La posibilidad de emplear este procedimiento se debe al hecho de que, en el caso de difusión en disoluciones débiles [es decir, cuando $c \ll 1$, que es cuando puede utilizarse la ecuación de difusión en la forma (58.16)], las partículas del soluto difícilmente se influyen entre sí y, por lo tanto, el movimiento de cada partícula puede considerarse independientemente.

Sea $w(r, t)\mathrm{d}r$ la probabilidad de hallar la partícula a una distancia comprendida entre r y $r + \mathrm{d}r$ a partir del origen en el instante t. Poniendo en (58.17) $M/\rho = 1$ y multiplicando por el volumen $4\pi r^2 \mathrm{d}r$ de la capa esférica, tenemos

$$w(r, t)\mathrm{d}r = \frac{1}{2\sqrt{(\pi D^3 t^3)}} \exp(-r^2/4Dt)\, r^2\, \mathrm{d}r. \tag{59.1}$$

Determinemos la distancia cuadrática media respecto al origen en el instante t. Tenemos

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 w(r, t)\mathrm{d}r. \tag{59.2}$$

El resultado, utilizando (59.1), es

$$\overline{r^2} = 6Dt. \tag{59.3}$$

† Ver *Física Estadística*, § 92, Editorial Reverté, Barcelona.

Así pues, la distancia media recorrida por la partícula durante un tiempo cualquiera es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

El coeficiente de difusión para las partículas suspendidas en un fluido puede calcularse a partir de lo que se denomina su *movilidad*. Supongamos que actúa sobre las partículas una cierta fuerza externa constante **f** (la fuerza de la gravedad, por ejemplo). En un estado estacionario, la fuerza que actúa sobre cada partícula debe estar equilibrada por la fuerza de arrastre o de rozamiento ejercida por el fluido sobre la partícula móvil. Cuando la velocidad es pequeña, la fuerza de rozamiento es proporcional a ella y vale $\mathbf{v}/b$, por ejemplo, siendo b una constante. Igualando esta expresión a la fuerza externa **f**, tenemos

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f}, \tag{59.4}$$

es decir, la velocidad adquirida por la partícula bajo la acción de la fuerza externa es proporcional a esta fuerza. La constante b se denomina *movilidad* y puede calcularse, en principio, a partir de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por ejemplo, en el caso de partículas esféricas de radio R, la fuerza de arrastre es $6\pi\eta Rv$ [ver (20.14)], y, por tanto, la movilidad es

$$b = 1/6\pi\eta R. \tag{59.5}$$

En el caso de partículas no esféricas, el arrastre depende de la dirección del movimiento; puede escribirse en forma $a_{ik}v_k$, siendo a_{ik} un tensor simétrico [ver (20.15)]. Para calcular la movilidad hemos de promediar respecto a todas las orientaciones de la partícula; si a_1, a_2, a_3 son los valores principales del tensor simétrico a_{ik}, tendremos entonces

$$b = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right). \tag{59.6}$$

La movilidad b está relacionada de modo simple con el coeficiente de difusión D. Para deducir esta relación escribamos ahora el flujo de difusión **i**, que contiene el término normal $-\rho D\,\mathbf{grad}\,c$ debido al gradiente de concentración (suponemos que la temperatura es constante), y también un término en el que interviene la velocidad adquirida por la partícula debida a las fuerzas externas. Este último término es evidente $\rho c\mathbf{v}$. Así pues,

$$\mathbf{i} = -\rho D\,\mathbf{grad}\,c + \rho cb\mathbf{f}, \tag{59.7}$$

en donde hemos hecho uso de la expresión (59.4). En un estado de equilibrio termodinámico no existe difusión y el flujo **i** debe ser nulo. La distribución de equilibrio de la concentración de partículas suspendidas en un fluido, en un campo externo, está determinada por la fórmula de Boltzmann, de acuerdo con la cual, c = constante $\times\, e^{-U/kT}$, siendo U la energía potencial de la partícula en el campo externo. Como $\mathbf{f} = -\mathbf{grad}\,U$, encontramos que

el gradiente de concentraciones de equilibrio debe ser $\mathbf{grad}\, c = c\mathbf{f}/kT$. Sustituyendo esta expresión en (59.7) e igualando $\mathbf{i}$ a cero, tenemos

$$D = kTb. \tag{59.8}$$

Esta expresión es la *relación de Einstein* entre el coeficiente de difusión y la movilidad.

Sustituyendo (59.5) en (59.8), encontramos la expresión siguiente para el coeficiente de difusión en el caso de partículas esféricas:

$$D = kT/6\pi\eta R. \tag{59.9}$$

Además del movimiento de traslación browniano y la difusión de partículas suspendidas, podemos considerar también su difusión y movimiento browniano de rotación. Así como el coeficiente de difusión de traslación se calcula en función de la fuerza de arrastre de rozamiento, del mismo modo el coeficiente de difusión por rotación puede expresarse en función de las fuerzas que actúan sobre una partícula que realiza un movimiento de rotación en el fluido.†

PROBLEMAS

Problema 1. Ciertas partículas ejecutan un movimiento browniano en un fluido limitado por una cara por una pared plana; las partículas que inciden sobre la pared «se adhieren» a ella. Determinar la probabilidad de que una partícula que está a una distancia x_0 de la pared en el tiempo $t = 0$ «se adhiera» a ella después de un tiempo t.

Solución. La distribución de probabilidades $w(x, t)$ (en donde x es la distancia desde la pared) está determinada por la ecuación de difusión, con la condición límite $w = 0$ para $x = 0$ y la condicion inicial $w = \delta(x - x_0)$ para $t = 0$. Dicha solución viene dada por la fórmula (52.4) cuando se sustituye T por w, χ por D y $T_0(x')$ en el integrando por $\delta(x' - x_0)$. Obtenemos, entonces,

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi Dt)}}\{\exp[-(x-x_0)^2/4Dt] - \exp[-(x+x_0)^2/4Dt]\}.$$

La probabilidad de «adherirse» a la pared por unidad de tiempo viene dada por el flujo de difusión $D\partial w/\partial x$ para $x = 0$, y la probabilidad buscada $W(t)$ respecto al tiempo t es

$$W(t) = D\int_0^t [\partial w/\partial x]_{x=0}\, dt.$$

† Si se suspenden partículas (no esféricas) en una corriente plano-paralela con un gradiente de velocidades transversal, se establece una distribución defirida de las partículas en cuanto a su orientación en el espacio como resultado de la acción simultánea de las fuerzas orientadoras de la dinámica del fluido y el movimiento browniano desorientador. Para la solución de este problema en el caso de partículas elipsoidales, ver A. PETERLIN y H. A. STUART, *Zeitschrift für Physik*, **112**, 1, 1939.

Sustituyendo el valor de w, se encuentra

$$W(t) = 1 - \mathrm{erf}[x_0/2\sqrt{(Dt)}].$$

Problema 2. Determinar el orden de magnitud del tiempo τ durante el cual una partícula suspendida en un fluido gira un ángulo grande alrededor de su eje.

Solución. El tiempo buscado τ es aquél durante el cual una partícula con movimiento browniano se mueve a lo largo de una distancia del orden de su dimensión lineal a. De acuerdo con (59.3), tenemos $\tau \sim a^2/D$, y según (59.9), $D \sim kT/\eta a$. Así pues, $\tau \sim \eta a^3/kT$.

CAPÍTULO VII

FENÓMENOS SUPERFICIALES

§ 60. Fórmula de Laplace

En este capítulo estudiaremos los fenómenos que se producen cerca de la superficie que separa dos medios continuos (en realidad los medios están separados por una capa de transición fina, pero esta capa es tan delgada que puede considerarse como una superficie). Si la superficie de separación es curva, las presiones cerca de la misma en ambos medios son diferentes. Para determinar la diferencia de presiones (denominada *presión superficial*) escribiremos a continuación la condición de que los medios estén en equilibrio termodinámico conjuntamente, teniendo en cuenta las propiedades de la superficie de separación.

Supongamos que la superficie de separación sufre un desplazamiento infinitesimal. En cada punto de la superficie no desplazada dibujemos la normal. La longitud del segmento de la normal, comprendida entre los puntos en que corta a la superficie desplazada y no desplazada, se designa por $\delta\zeta$. Entonces un elemento de volumen comprendido entre ambas superficies es $\delta\zeta \mathrm{d}f$, siendo $\mathrm{d}f$ un elemento de superficie. Sean p_1 y p_2 las presiones en ambos medios y admitamos que $\delta\zeta$ es positivo si el desplazamiento de la superficie es hacia el medio 2 (por ejemplo). Entonces el trabajo necesario para realizar la variación de volumen anterior es

$$\int (-p_1+p_2)\delta\zeta \, \mathrm{d}f.$$

El trabajo total δR realizado en el desplazamiento de la superficie se obtiene sumando a este trabajo el conectado con la variación de área de la superficie. Esta parte del trabajo es proporcional a la variación δf del área de la superficie y puede ponerse como $\alpha\delta f$, en donde α se denomina el *coeficiente de tensión superficial*.† Así pues, el trabajo total es

$$\delta R = -\int (p_1-p_2)\delta\zeta \, \mathrm{d}f+\alpha\delta f. \tag{60.1}$$

† En el caso de la interfase aire-agua, $\alpha = 72{,}5$ erg/cm² a 20°C; aire y parafina, $\alpha = 24$ a 20°C. La tensión superficial de los metales líquidos es muy grande; por ejemplo, en una interfase aire-mercurio, $\alpha = 547$ a 175°C; para el aire y el platino líquido, $\alpha = 1820$ a 2000°C. La tensión superficial entre el helio líquido y su vapor es muy pequeña, $\alpha = 0{,}24$ a -270°C.

Como es natural, la condición de equilibrio termodinámico exige que $\delta R = 0$.

A continuación, supongamos que R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura en un punto determinado de la superficie; consideraremos R_1 y R_2 como positivos si se trazan en el medio 1. Entonces los elementos de longitud dl_1 y dl_2 sobre la superficie en sus secciones principales reciben incrementos $(\delta\zeta/R_1)dl_1$ y $(\delta\zeta/R_2)dl_2$, respectivamente, cuando la superficie sufre un desplazamiento infinitesimal; aquí dl_1 y dl_2 se consideran como elementos de las circunferencias de radios R_1 y R_2. De aquí que el elemento superficial $df = dl_1 dl_2$ resulte, después del desplazamiento,

$$dl_1(1+\delta\zeta/R_1)dl_2(1+\delta\zeta/R_2) \approx dl_1 dl_2(1+\delta\zeta/R_1+\delta\zeta/R_2),$$

es decir, varía en la cantidad $\delta\zeta df(1/R_1 + 1/R_2)$. A partir de aquí, vemos que la variación total del área de la superficie de separación es

$$\delta f = \int \delta\zeta\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)df. \tag{60.2}$$

Sustituyendo estas expresiones en (60.1) e igualando a cero, obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma

$$\int \delta\zeta\left\{(p_1-p_2)-\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}df = 0.$$

Esta condición debe ser válida para cualquier desplazamiento infinitesimal de la superficie, es decir, para todo $\delta\zeta$. De aquí que la expresión entre llaves deba ser idénticamente igual a cero:

$$p_1-p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{60.3}$$

Esta es la *fórmula de Laplace* que da la presión superficial. Vemos que, si R_1 y R_2 son positivos, $p_1 - p_2 > 0$. Esto significa que la presión es mayor en el medio cuya superficie es convexa. Si $R_1 = R_2 = \infty$, es decir, la superficie de separación es plana, la presión es la misma en cualquier medio, como era de esperar.

Apliquemos la fórmula (60.3) para investigar el equilibrio mecánico de dos medios en contacto. Admitamos que no existen fuerzas externas que actúan entre ellos en la superficie de separación o en los propios medios. Utilizando la fórmula (60.3) podemos escribir entonces la ecuación de equilibrio como

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \text{constante}. \tag{60.4}$$

Así pues, la suma de las curvaturas debe ser una constante en cualquier superficie libre de separación. Si la superficie completa es libre, la condi-

ción (60.4) significa que debe ser esférica (por ejemplo, la superficie de una pequeña gota, en la cual puede despreciarse el efecto de la gravedad). Sin embargo, si la superficie está apoyada a lo largo de una curva determinada (por ejemplo, una película de líquido establecida sobre un marco sólido), su forma es menos simple.

Cuando se aplica la condición (60.4) al equilibrio de películas delgadas apoyadas en marcos rígidos, debe ser cero la constante del segundo miembro. En este caso, la suma $1/R_1 + 1/R_2$ debe ser la misma en todos los puntos de la superficie libre de la película, mientras que en caras opuestas de la misma debe tener signos opuestos, puesto que si un lado es convexo el otro será cóncavo y los radios de curvatura son los mismos pero con signos opuestos. De aquí se deduce que la condición de equilibrio para una película delgada es

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \tag{60.5}$$

Consideremos ahora la condición de equilibrio en la superficie de un medio dentro de un campo gravitatorio. Admitiremos por sencillez que el medio 2 es simplemente la atmósfera, cuya presión puede considerarse como constante en toda la superficie y que el medio 1 es un fluido incompresible. Entonces tenemos $p_2 =$ constante, mientras que p_1, la presión del fluido, es según (3.2) $p_1 =$ constante $- \rho g z$, midiéndose la coordenada z verticalmente hacia arriba. Así pues, la condición de equilibrio se transforma en

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g\rho z}{\alpha} = \text{ constante.} \tag{60.6}$$

Debe mencionarse que, para determinar la forma de equilibrio de la superficie del fluido en casos particulares, es normalmente conveniente utilizar la condición de equilibrio, no en la forma (60.6), sino la obtenida directamente resolviendo el problema variacional de minimizar la energía libre total. La energía libre interna de un fluido incompresible depende únicamente del volumen del mismo y no de la forma de su superficie. De esta última depende, en primer lugar, la energía libre de la superficie $\int \alpha \, df$, y, en segundo lugar, la energía en el campo exterior (gravedad), que es $g\rho \int z \, dV$. Así pues, la condición de equilibrio puede escribirse como

$$\alpha \int df + g\rho \int z \, dV = \text{ mínimo.} \tag{60.7}$$

El mínimo habrá de determinarse sometido a la condición

$$\int dV = \text{constante,} \tag{60.8}$$

que expresa el hecho de que el volumen del fluido es constante.

Las constantes α, ρ y g aparecen en las condiciones de equilibrio (60.6) y (60.7) únicamente en la forma $\alpha/g\rho$. Este cociente tiene las dimensiones de cm^2. La longitud

$$a = \sqrt{(2\alpha/g\rho)} \tag{60.9}$$

se denomina *constante de capilaridad* para la sustancia de que se trata.† La forma de la superficie del fluido está determinada únicamente por esta magnitud. Si la constante capilar es grande en comparación con la dimensión del medio, podemos despreciar la gravedad en la determinación de la forma de la superficie.

Con objeto de hallar la forma de la superficie a partir de la condición (60.4) o (60.6), necesitamos fórmulas que determinen los radios de curvatura, dada la forma de la superficie. Estas fórmulas se obtienen en geometría diferencial, pero en el caso general son un poco complicadas. Se simplifican considerablemente cuando las superficies se desvían de un plano sólo ligeramente. Deduciremos directamente las fórmulas apropiadas sin utilizar los resultados generales de la geometría diferencial.

Sea $z = \zeta(x, y)$ la ecuación de la superficie; supongamos que ζ es pequeña en todos los puntos, es decir, que la superficie se desvía sólo ligeramente del plano $z = 0$. Como sabemos bien, el área f de la superficie viene dada por la integral

$$f = \int\int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]}\, dx\, dy,$$

o sea, para valores pequeños de ζ, aproximadamente por

$$f = \int\int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{60.10}$$

La variación δf es

$$\delta f = \int\int \left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Integrando por partes, tenemos

$$\delta f = -\int\int \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\delta\zeta\, dx\, dy.$$

Comparando este resultado con (60.2), se obtiene

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right). \tag{60.11}$$

† En el caso del agua (por ejemplo), $\alpha = 0{,}122$ cm a 20°C.

Esta es la fórmula buscada; determina la suma de las curvaturas de una superficie ligeramente curvada.

Cuando están en equilibrio tres medios en contacto, las superficies de separación son tales que la resultante de las fuerzas superficie-tensión es nula en la línea común de intersección. Esta condición implica que las superficies de separación deben cortarse en ángulos (denominados *ángulos de contacto*) determinados por los valores de los coeficientes de tensión superficial.†

Finalmente, consideraremos la cuestión de las condiciones límites que deben satisfacerse en la frontera entre dos fluidos en movimiento, cuando se tienen en cuenta las fuerzas de tensión superficial. Si se desprecian estas últimas fuerzas, tendremos que en la frontera entre los fluidos $n_k(\sigma_{2,ik} - -\sigma_{1,ik}) = 0$, lo cual expresa la igualdad de las fuerzas de rozamiento viscoso en la superficie de cada fluido. Cuando se incluye la tensión superficial, hemos de sumar en el segundo miembro una fuerza determinada en su módulo por la fórmula de Laplace y dirigida a lo largo de la normal:

$$n_k \sigma_{2,ik} - n_k \sigma_{1,ik} = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i. \tag{60.12}$$

Esta ecuación puede escribirse también en la forma

$$(p_1 - p_2)n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik})n_k + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i. \tag{60.13}$$

Si ambos fluidos son ideales, las tensiones viscosas σ'_{ik} son cero, y nos encontramos de nuevo con la ecuación sencilla (60.3).

Sin embargo, la condición (60.13) no es todavía completamente general. La razón consiste en que el coeficiente de tensión superficial α puede no ser constante en toda la superficie (por ejemplo, teniendo en cuenta una variación de temperatura). Entonces, además de la fuerza normal (que es cero en el caso de una superficie plana), existe otra fuerza tangencial a la superficie. Del mismo modo que existe una fuerza volumétrica $-\mathbf{grad}\, p$ por unidad de volumen (ver § 2) en aquellos casos en que la presión es no uniforme, así tenemos aquí una fuerza tangencial $\mathbf{f}_t = \mathbf{grad}\, \alpha$ por unidad de área de la superficie de separación. En este caso tomaremos el gradiente como positivo, debido a que las fuerzas de tensión superficial tienden a reducir el área de la superficie, mientras que la fuerza de presión tiende a aumentar el volumen. Sumando esta fuerza al segundo miembro de la ecuación (60.13), obtenemos la condición límite

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik})n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}; \tag{60.14}$$

† Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 145, Editorial Reverté, Barcelona.

el vector unidad normal **n** está dirigido hacia el medio 1. Obsérvese que esta condición puede satisfacerse únicamente en el caso de un fluido viscoso: en un fluido ideal, $\sigma'_{ik} = 0$ y el primer miembro de la ecuación (60.14) es un vector dirigido a lo largo de la normal, mientras que el segundo miembro es, en este caso, un vector tangencial. Esta igualdad no puede ser válida excepto, como es natural, en el caso trivial en que ambos miembros son cero.

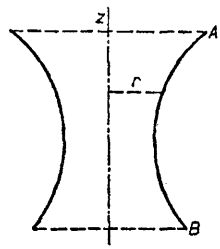

FIG. 31

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de una película de líquido apoyada en dos marcos circulares con sus centros situados en una línea perpendicular a sus planos, que a su vez son paralelos; la figura 31 muestra una sección recta de la película.

Solución. El problema equivale al de hallar la superficie que tenga la menor área de las que pueden formarse mediante la revolución alrededor de la línea $r = 0$ de una curva $r = r(z)$ que pasa por dos puntos dados A y B. El área de una superficie de rotación es

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} r\sqrt{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]}\,dz.$$

Es bien conocido que el mínimo de una integral de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x})\,dt$$

viene dado por la ecuación $L - \dot{x}\,\partial L/\partial\dot{x} =$ constante. En el caso presente esto conduce a

$$r = c_1\sqrt{[1+(dr/dz)^2]},$$

de aquí tenemos por integración que $r = c_1 \cosh[(z-c_2)/c_1]$. Así pues, la superficie buscada (denominada una *catenoide*) es la formada por la revolución de una catenaria. Las constantes c_1 y c_2 deben escogerse de modo que la curva $r(z)$ pase a través de los puntos dados A y B. El valor de c_2 depende únicamente de la selección del origen de z. Sin embargo, para la constante c_1 se obtienen dos valores, de los cuales debe escogerse el mayor (el menor no da un mínimo de la integral).

Cuando aumenta la distancia h entre los marcos se alcanza un valor para el cual la ecuación correspondiente a la constante c_1 deja de tener una raíz real. Para un valor mayor de h, solamente la forma compuesta por una película sobre cada marco es esta-

ble. Por ejemplo, en el caso de dos marcos de radios iguales R la forma catenoide es imposible para una distancia h entre los marcos que sea mayor de 1,33 R.

Problema 2. Determinar la forma de la superficie de un fluido en un campo gravitatorio y limitado por un lado por una pared plana vertical. El ángulo de contacto entre el fluido y la pared es θ (figura 32).

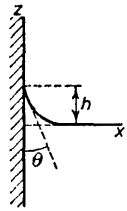

FIG. 32

Solución. Tomemos los ejes coordenados indicados en la figura 32. El plano $x = 0$ es el plano de la pared y $z = 0$ es el plano de la superficie del fluido lejos de la pared. Los radios de curvatura de la superficie $z = z(x)$ son $R_1 = \infty$, $R_2 = -(1 + z'^2)^{3/2}/z''$, de modo que la ecuación (60.6) se transforma en

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{constante}, \tag{1}$$

siendo a la constante de capilaridad. Para $x = \infty$ debemos tener $z = 0$, $1/R_2 = 0$, y, por tanto, la constante es cero. Una primera integral de la ecuación resultante es

$$\frac{1}{\sqrt{(1+z'^2)}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \tag{2}$$

A partir de la condición en el infinito ($z = z' = 0$ para $x = \infty$) tenemos $A = 1$. Una segunda integración da

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2a}}{z} + a\sqrt{\left(2 - \frac{z^2}{a^2}\right)} + x_0.$$

Debe escogerse la constante x_0, de modo que en la superficie de la pared ($x = 0$) tengamos $z' = -\operatorname{cotg}\theta$, o sea, según (2), $z = h$, en donde $h = a\sqrt{(1 - \operatorname{sen}\theta)}$ es la altura a la cual se eleva el fluido en la propia pared.

Problema 3. Determinar la forma de la superficie de un fluido que se eleva entre dos placas planas verticales (figura 33).

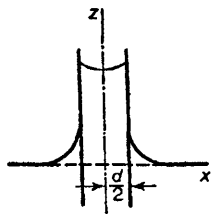

FIG. 33

Solución. Tomemos el plano yz como el intermedio entre ambas placas y supongamos que el plano xy coincide con la superficie del fluido lejos de las placas. En la ecuación (1) del problema 2, que da la condición de equilibrio y, por tanto, es válida en todos los puntos de la superficie del fluido (tanto entre las placas como fuera), las condiciones en $x = \infty$ nos dicen de nuevo que la constante es cero. en la integral (2), la constante A es ahora diferente de acuerdo con que $|x| > d/2$ o $|x| < d/2$ [teniendo una discontinuidad la función $z(x)$ para $|x| = d/2$]. Para el espacio situado entre las placas, las condiciones son $z' = 0$ para $x = 0$ y $z' = \operatorname{cotg}\theta$ para $x = d/2$, siendo θ el ángulo de contacto. De acuerdo con (2) tenemos para las alturas $z_0 = z(0)$ y $z_1 = z(d/2)$: $z_0 = a\sqrt{(A-1)}$, $z_1 = a\sqrt{(A-\operatorname{sen}\theta)}$. Integrando (2), se obtiene

$$x = \int_{z_0}^{z} \frac{(A - z^2/a^2)\mathrm{d}z}{\sqrt{[1-(A-z^2/a^2)^2]}} = \tfrac{1}{2}a \int_{0}^{a\sqrt{(A-\cos\xi)}-z} \frac{\cos\xi\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(A-\cos\xi)}},$$

en donde ξ es un nueva variable relacionada con z por $z = a\sqrt{(A-\cos\xi)}$. Esta integral es elíptica y no puede expresarse como un desarrollo de funciones elementales. La constante A se obtiene a partir de la condición de que $z = z_1$ para $x = d/2$, o sea,

$$d = a \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi-\theta} \frac{\cos\xi\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(A-\cos\xi)}}.$$

Las fórmulas obtenidas anteriormente dan la forma de la superficie del fluido en el espacio situado entre las placas. Cuando $d \to 0$, A tiende a infinito. De aquí que tengamos para $d \ll a$

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi-\theta} \cos\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{a}{\sqrt{A}}\cos\theta,$$

o sea, $A = (a^2/d^2)\cos^2\theta$. La altura a la cual se eleva el fluido es $z_0 \approx z_1 \approx (a^2/d)\cos\theta$; como es natural, también puede obtenerse directamente esta fórmula.

Problema 4. Una capa de fluido no uniformemente calentada y delgada descansa sobre una superficie sólida plana horizontal; su temperatura es una función determinada de la coordenada x en el plano, y podemos suponer (debido a que la capa es delgada) que es independiente de la coordenada z perpendicular a la capa. El calentamiento no uniforme da como resultado la aparición de un flujo estacionario y, en consecuencia, su espesor ζ varía en la dirección x. Determinar la función $\zeta(x)$.

Solución. La densidad del fluido ρ y la tensión superficial α son, junto con la temperatura, funciones conocidas de x. La presión del fluido es $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, en donde p_0 es la presión atmosférica (la presión en la superficie libre); puede despreciarse la variación de la presión debida a la curvatura de la superficie. También puede suponerse que la velocidad en todos los puntos de la capa es paralela al eje x. La ecuación del movimiento es

$$\eta\partial^2 v/\partial z^2 = \partial p/\partial x = g[\mathrm{d}(\rho\zeta)/\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x]. \qquad (1)$$

En la superficie sólida ($z = 0$) tenemos $v = 0$, mientras que en la superficie libre ($z = \zeta$) debe cumplirse la condición límite (60.14); en este caso es $\eta(\mathrm{d}v/\mathrm{d}z)_{z=\zeta} = d\alpha/\mathrm{d}x$. Integrando

la ecuación (1) con estas condiciones, obtenemos

$$\eta v = gz(\zeta - \tfrac{1}{2}z)\mathrm{d}(\rho\zeta)/\mathrm{d}x - \tfrac{1}{6}gz(3\zeta^2 - z^2)\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Puesto que el flujo es estacionario, el flujo de masa total a través de una sección recta de la capa debe ser cero:

$$\int_0^\zeta v\,\mathrm{d}z = 0.$$

Sustituyendo (2), se tiene

$$\tfrac{1}{3}\rho\frac{\mathrm{d}\zeta^2}{\mathrm{d}x} + \tfrac{1}{4}\zeta^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x},$$

que determina la función $\zeta(x)$. Integrando, obtenemos

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-\frac{1}{3}}[\int \rho^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}\alpha + \text{constante}]. \qquad (3)$$

Si la temperatura (y por tanto ρ y α) varía sólo ligeramente, entonces puede escribirse (3) como

$$\zeta^2 = \zeta_0^2(\rho_0/\rho)^{\frac{1}{3}} + 3(\alpha - \alpha_0)/\rho g,$$

en donde ζ_0 es el valor de ζ en un punto en donde $\rho = \rho_0$ y $\alpha = \alpha_0$.

§ 61. Ondas de capilaridad

Las superficies de los fluidos tienden a adquirir una forma de equilibrio, tanto bajo la acción de la fuerza de la gravedad como bajo la acción de las fuerzas de tensión superficial. Al estudiar las ondas en la superficie de un fluido en §§ 12 y 13, no tuvimos en cuenta estas últimas fuerzas. Veremos a continuación que la capilaridad tiene una influencia importante sobre las ondas de gravedad de pequeña longitud de onda.

Como en § 12, supondremos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña en comparación con la longitud de onda. Para valor del potencial de velocidad tenemos como antes la ecuación $\triangle\phi = 0$. Sin embargo, la condición en la superficie del fluido es ahora diferente: la diferencia de presiones entre las dos caras de la superficie no es cero, como se supuso en § 12, sino que viene dada por la fórmula de Laplace (60.3).

Designemos por ζ la coordenada z de un punto de la superficie. Como ζ es pequeña, podemos utilizar la expresión (60.11), y escribir la fórmula de Laplace en la forma

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Aquí p es la presión en el fluido cerca de la superficie y p_0 es la presión externa constante. Para p podemos sustituir, de acuerdo con (12.2), por

$$p = -\rho g\zeta - \rho\partial\phi/\partial t,$$

obteniéndose

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0;$$

por las mismas razones que en § 12 podemos omitir la constante p_0 si volvemos a definir ϕ. Derivando esta relación respecto a t y sustituyendo $\partial\zeta/\partial t$ por $\partial\phi/\partial z$, obtenemos la condición límite sobre el potencial ϕ:

$$\rho g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0 \text{ para } z = 0. \qquad (61.1)$$

Consideremos una onda plana que se propaga en la dirección del eje x. Como en § 12, obtenemos una solución de la forma $\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)$. Se obtiene ahora la relación entre k y ω a partir de la condición límite (61.1), y resulta ser

$$\omega^2 = gk + \alpha k^3/\rho. \qquad (61.2)$$

Vemos que, en el caso de longitudes de onda largas, tales que $k \ll \sqrt{(g\rho/\alpha)}$, o sea, $k \ll 1/a$ (en donde a es la constante de capilaridad), puede despreciarse el efecto de la capilaridad y tenemos una onda de gravedad pura. En el caso opuesto de longitudes de onda cortas, puede despreciarse el efecto de la gravedad. Entonces,

$$\omega^2 = \alpha k^3/\rho. \qquad (61.3)$$

Estas ondas se denominan *ondas de capilaridad*. Los casos intermedios se denominan *ondas de gravedad y capilaridad*.

Determinemos también la naturaleza de las oscilaciones de una gota esférica de fluido incompresible bajo la acción de fuerzas capilares. Las oscilaciones hacen que la superficie de la gota se desvíe de su forma esférica. Como es normal, supondremos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña.

Empezaremos por determinar el valor de la suma $1/R_1 + 1/R_2$ para una superficie ligeramente distinta de la de una esfera. A continuación, procederemos como en la deducción de la fórmula (60.11). El área de una superficie dada en coordenadas esféricas r, θ, ϕ†, mediante una función $r = r(\theta, \phi)$, es

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2\right]} r\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi. \qquad (61.4)$$

Una superficie esférica viene dada por $r =$ constante $\equiv R$ (siendo R el radio de la esfera), y una superficie próxima viene dado su radio por $r = R + \zeta$,

† En el resto de esta sección, ϕ designa el ángulo azimutal, mientras que designaremos el potencial de velocidad por ψ.

en donde ζ es pequeño. Sustituyendo en (61.4), obtenemos

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{(R+\zeta)^2+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}\right)^2\right]\right\}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi.$$

Encontremos la variación δf del área cuando varía ζ. Tenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)\delta\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\phi}\right\}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi.$$

Integrando el segundo término por partes respecto a θ, y el tercero por partes respecto a ϕ, obtenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}\right\}\delta\zeta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$$

Si dividimos la expresión entre llaves por $R(R+2\zeta)$, el coeficiente resultante de $\delta\zeta\delta f \approx \delta\zeta R(R+2\zeta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$ en el integrando es, según la fórmula (60.2), precisamente la suma requerida de las curvaturas, corregidas hasta los términos del primer orden en ζ. Así pues, obtenemos

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{R}-\frac{2\zeta}{R^2}-\frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right\}. \qquad (61.5)$$

El primer término corresponde a una superficie esférica, en la cual $R_1 = R_2 = R$.

El potencial de velocidades ψ satisface la ecuación de Laplace $\triangle\psi = 0$, con una condición límite en $r = R$ semejante a la de una superficie plana:

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\left\{\frac{2}{R}-\frac{2\zeta}{R^2}-\frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\phi^2}\right]\right\}+p_0 = 0.$$

La constante $p_0 + 2\alpha/R$ puede omitirse de nuevo; derivando respecto al tiempo y poniendo $\partial\zeta/\partial t = v_r = \partial\psi/\partial r$, tenemos, finalmente, la condición límite sobre ψ:

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\alpha}{R^2}\left\{2\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]\right\}=0$$

$$\text{para } r = R. \qquad (61.6)$$

Buscaremos una solución en forma de una onda estacionaria: $\psi = e^{-i\omega t}f(r,\theta,\phi)$, en donde la función f satisface la ecuación de Laplace, $\triangle f = 0$. Como es bien conocido, cualquier solución de la ecuación de Laplace puede representarse como una combinación lineal de lo que se denominan *funciones armónicas esféricas volumétricas* $r^l Y_{lm}(\theta,\phi)$, en donde $Y_{lm}(\theta,\phi)$ son los armónicos esfé-

ricos de Laplace: $Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$. Aquí $P_l^m(\cos\theta) = \text{sen}^m\theta\, d^m P_l(\cos\theta)/d(\cos\theta)^m$ es lo que se denomina una *función de Legendre asociada,* siendo $P_l(\cos\theta)$ el polinomio de Legendre de orden l. Como se sabe, l adquiere todos los valores enteros desde cero en adelante, mientras que m toma los valores $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$.

De acuerdo con ello buscaremos una solución particular del problema en la forma

$$\psi = Ae^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{61.7}$$

La frecuencia ω debe ser de tal tipo que satisfaga la condición límite (61.6). Sustituyendo la expresión (61.7) y utilizando el hecho de que el armónico esférico Y_{lm} satisface

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

se halla (eliminando ψ)

$$\rho\omega + l\alpha[2 - l(l+1)]/R^3 = 0,$$

o sea,

$$\omega^2 = \alpha l(l-1)(l+2)/\rho R^3. \tag{61.8}$$

Esta fórmula da las frecuencias propias de las oscilaciones por capilaridad de una gota esférica. Vemos que depende únicamente de l y no de m. Sin embargo, para un valor dado de l, existen $2l + 1$ funciones diferentes en correspondencia (61.7). Así pues, a cada una de las frecuencias (61.8) le corresponden $2l + 1$ oscilaciones distintas. Las oscilaciones independientes que poseen la misma frecuencia se dice que son *degeneradas*; en este caso, tenemos una degeneración de orden $2l + 1$.

La expresión (61.8) se anula para $l = 0$ y $l = 1$. El valor $l = 0$ corresponderá a oscilaciones radiales, es decir, a pulsaciones con simetría esférica de la gota; en el caso de un fluido incompresible, dichas oscilaciones son evidentemente imposibles. Para $l = 1$ el movimiento es simplemente un movimiento de traslación de la gota como un todo. La frecuencia de oscilación más pequeña posible de la gota corresponde a $l = 2$ y es

$$\omega_{\min} = \sqrt{(8\alpha/\rho R^3)}. \tag{61.9}$$

Se observa un movimiento ondulatorio peculiar debido a la tensión superficial cuando una capa delgada de fluido viscoso desciende fluyendo por una pared vertical. P. L. KAPITZA ha demostrado que estas ondas se deben a una inestabilidad del flujo original que se establece cuando existen unos números de Reynolds comparativamente pequeños.†

† Ver P. L. KAPITZA, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki,* **18**, 3, 1948.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la frecuencia en función del número de onda en el caso de ondas de gravedad y capilaridad en la superficie de un fluido de profundidad h.

Solución. Sustituyendo en la condición (61.1) $\phi = A\cos(kx - \omega t)\cosh k(z + h)$ (ver § 12, problema 1), obtenemos $\omega^2 = (gk + \alpha k^3/\rho)\operatorname{tgh} kh$. Para $kh \gg 1$ volvemos a encontrarnos con la fórmula (61.2), mientras que para ondas largas ($kh \ll 1$) tenemos $\omega^2 = ghk^2 + \alpha hk^4/\rho$.

Problema 2. Determinar el coeficiente de amortiguamiento en el caso de ondas capilares.

Solución. Sustituyendo (61.3) en 25.5), tenemos $\gamma = 2\eta k^2/\rho = 2\eta\omega^{4/3}/\rho^{1/3}\alpha^{2/3}$.

Problema 3. Hallar la condición para la estabilidad de una discontinuidad tangencial horizontal en un campo gravitatorio, teniendo en cuenta la tensión superficial (se suponen que son diferentes los fluidos que están situados en ambos lados de la superficie de discontinuidad).

Solución. Sea U la velocidad del fluido superior respecto al inferior. En el flujo original superpongamos una perturbación periódica en dirección horizontal y busquemos el potencial de velocidades en la forma

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t) \text{ en el fluido inferior,}$$

$$\phi' = A'e^{-kz}\cos(kx - \omega t) + Ux \text{ en el fluido superior.}$$

En el caso del fluido inferior tenemos en la superficie de discontinuidad $v_z = \partial\phi/\partial z = \partial\zeta/\partial t$, siendo ζ una coordenada vertical en la superficie de discontinuidad, y en el caso del fluido superior

$$v'_z = \partial\phi'/\partial z = U\partial\zeta/\partial x + \partial\zeta/\partial t.$$

La condición de presiones iguales en ambos fluidos en la superficie de discontinuidad es

$$\rho\,\partial\phi/\partial t + \rho g\zeta - \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2 = \rho'\,\partial\phi'/\partial t + \rho' g\zeta + \tfrac{1}{2}\rho'(v'^2 - U^2);$$

únicamente necesitan mantenerse los términos de primer orden en A' al desarrollar la expresión $v'^2 - U^2$. Buscaremos el desplazamiento ζ en la forma $\zeta = a\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t)$. Sustituyendo ϕ, ϕ' y ζ en las tres condiciones anteriores para $z = 0$, obtenemos tres ecuaciones, de las cuales pueden eliminarse a, A y A', llegando a

$$\omega = \frac{k\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\left[\frac{kg(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'}\right]}.$$

Con objeto de que esta expresión sea real para todo valor de k, es necesario que

$$U^4 \leqslant 4\alpha g(\rho - \rho')(\rho + \rho')^2/\rho^2\rho'^2.$$

Si no se cumple esta condición, existen valores complejos de ω con una parte imaginaria positiva y el movimiento es inestable.

§ 62. Influencia de películas absorbidas sobre el movimiento de un líquido

La presencia en la superficie de un líquido de una película de material adsorbido puede tener una influencia considerable sobre las propiedades hidrodinámicas de la superficie. La razón es que, cuando la forma de las superficies varía con el movimiento del líquido, la película se estira o se comprime, es decir, se modifica la concentración superficial de la sustancia adsorbida. Estas variaciones dan como resultado la aparición de fuerzas adicionales que han de tenerse en cuenta en las condiciones límites de la superficie libre.

Aquí consideraremos únicamente películas adsorbidas de sustancias que pueden considerarse como insolubles en el líquido. Esto significa que la sustancia está totalmente sobre la superficie y no penetra dentro del líquido. Si la sustancia adsorbida es apreciablemente soluble es necesario tener en cuenta la difusión de la misma entre la película superficial y el volumen del líquido cuando varía la concentración de la película.

Cuando está presente el material adsorbido, el coeficiente de tensión superficial α es una función de la concentración en la superficie del material (que es la cantidad del mismo por unidad de área de superficie), valor que designaremos por γ. Si γ varía a lo largo de la superficie, entonces el coeficiente α es también una función de las coordenadas de la superficie. La condición límite en la superficie del líquido incluye, por tanto, una fuerza tangencial que ya hemos estudiado al final del § 60 (ecuación 60.14). En el caso presente, el gradiente de α puede expresarse en función del gradiente de concentraciones superficiales, de modo que la fuerza tangencial sobre la superficie es

$$\mathbf{f}_t = (\partial\alpha/\partial\gamma)\mathbf{grad}\,\gamma. \tag{62.1}$$

Ya se ha mencionado en § 60 que la condición límite (60.14), en la cual se tiene en cuenta esta fuerza, puede satisfacerse únicamente en el caso de un fluido viscoso. De aquí se deduce que, en casos en que la viscosidad del líquido es pequeña y, por tanto, tiene poca importancia respecto al fenómeno en consideración, puede ignorarse la presencia de la película.

Para determinar el movimiento de un líquido cubierto por una película, debemos sumar a las ecuaciones del movimiento, con la condición límite (60.14), una ecuación adicional, puesto que ahora tenemos otra magnitud desconocida, la concentración superficial γ. Esta ecuación adicional es una «ecuación de continuidad» que expresa el hecho de que la cantidad total de material adsorbido en la película no ha variado. La forma real de la ecuación depende de las características y forma de la superficie. Si esta última es plana, entonces la ecuación es evidentemente

$$\partial\gamma/\partial t + \partial(\gamma v_x)/\partial x + \partial(\gamma v_y)/\partial y = 0, \tag{62.2}$$

en donde todas las magnitudes tienen sus valores correspondientes en la superficie (tomada como plano xy).

La solución de los problemas del movimiento de un líquido cubierto por una película adsorbida se simplifica considerablemente en aquellos casos en que la película puede suponerse incompresible, es decir, en los que podemos admitir que el área de un elemento de superficie cualquiera de la película permanece constante durante el movimiento.

Un ejemplo de los efectos hidrodinámicos importantes que produce una película adsorbida viene dado por el movimiento de una burbuja de gas dentro de un líquido viscoso. Si no existiese ninguna película en la superficie de la burbuja, el gas en su interior se movería también y la fuerza de arrastre ejercida sobre la burbuja por el líquido no es la misma que el arrastre sobre una esfera sólida del mismo radio (ver § 20, problema 2). Sin embargo, si la burbuja está cubierta por una película de material adsorbido, es evidente, a partir de la simetría del problema, que la película permanece en reposo cuando la burbuja se mueve. Así un movimiento de la película sólo puede producirse a lo largo de líneas meridianas de la superficie de la burbuja y el resultado sería que el material se acumularía continuamente en uno de los polos (puesto que el material adsorbido no penetra dentro del líquido ni del gas); esto es imposible. Además de la velocidad de la película, la velocidad del gas en la superficie de la burbuja debe ser también nula y con esta condición límite el gas dentro de la burbuja debe estar totalmente en reposo. Así pues, una burbuja cubierta por una película se mueve como una esfera sólida y, en particular, la fuerza de arrastre o de rozamiento sobre la misma (para números de Reynolds pequeños) viene dada por la fórmula de Stokes. Este resultado se debe a V. G. LEVICH, el cual dio también las soluciones a los problemas siguientes.†

PROBLEMAS

Problema 1. Dos recipientes están unidos por un canal largo y profundo de anchura a y longitud l con paredes plano-paralelas. La superficie del líquido en el sistema está cubierta por una película adsorbida y las concentraciones superficiales γ_1 y γ_2 de la película en ambos recipientes son diferentes. Como resultado se produce un movimiento cerca de la superficie del líquido en el canal. Determinar la cantidad de material de la película que se transporta mediante este movimiento.

Solución. Tomemos el plano de una pared del canal como plano xz y la superficie del líquido como plano xy, de modo que el eje x esté dirigido a lo largo del canal; el líquido

† Para una descripción más detallada, ver V. G. LEVICH, *Physico-chemical Hydrodynamics* (*Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika*), Moscow, 1952.

está en la región $z < 0$. No existe ningún gradiente de presiones, de modo que la ecuación del flujo estacionaro es (ver § 17)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

siendo v la velocidad del líquido que evidentemente tiene la dirección x. Existe un gradiente de concentraciones $d\gamma/dx$ a lo largo del canal. En la superficie del líquido en el canal tenemos la condición límite

$$\eta\, \partial v/\partial z = d\alpha/dx \quad \text{para} \quad z = 0. \tag{2}$$

En las paredes del canal el líquido debe estar en reposo, es decir,

$$v = 0 \text{ para } y = 0 \quad \text{e} \quad y = a. \tag{3}$$

La profundidad del canal se supone infinita y, por tanto,

$$v = 0 \quad \text{para} \quad z \to -\infty. \tag{4}$$

Las soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones (3) y (4) son

$$v_n = \text{constante} \times \exp[(2n+1)\pi z/a]\operatorname{sen}(2n+1)\pi y/a,$$

siendo n un número entero. La condición (2) se ve satisfecha por la suma

$$v = \frac{4a}{\eta\pi^2}\frac{d\alpha}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[(2n+1)\pi z/a]\operatorname{sen}(2n+1)\pi y/a}{(2n+1)^2}.$$

La cantidad de material de la película transferida por unidad de tiempo es

$$Q = \int_0^a \gamma[v]_{z=0}\, dy = \frac{8a^2}{\eta\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\gamma\frac{d\alpha}{dx},$$

y el movimiento está en el sentido de α creciente. El valor de Q debe, evidentemente, ser constante a lo largo del canal. De aquí que podamos escribir

$$\gamma\frac{d\alpha}{dx} = \text{constante} \equiv \frac{1}{l}\int_0^l \gamma\frac{d\alpha}{dx}dx = \frac{1}{l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\, d\alpha,$$

en donde $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$, y admitiremos que $\alpha_1 > \alpha_2$. Así pues, tenemos, finalmente,

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\, d\alpha = 0{,}27\frac{a^2}{\eta l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\, d\alpha.$$

Problema 2. Determinar el coeficiente de amortiguamiento para las ondas de capilaridad en la superficie de un líquido cubierto por una película adsorbida.

Solución. Si la viscosidad del líquido no es demasiado grande, las fuerzas de tensión

(tangenciales) ejercidas sobre la película por el líquido son pequeñas y la película puede considerarse, por tanto, como incompresible. De acuerdo con ello podemos calcular la disipación de energía como si tuviese lugar en una pared sólida, es decir, según la fórmula (24.14). Escribiendo el potencial de velocidades en la forma

$$\phi = \phi_0 e^{ikx - i\omega t} e^{-kz},$$

obtenemos para la disipación por unidad de área de la superficie

$$\bar{\dot{E}}_{\text{kin}} = -\sqrt{(\tfrac{1}{8}\rho\eta\omega)}|k\phi_0|^2.$$

La energía total (también por unidad de área) es

$$\bar{E} = \rho \int \overline{v^2}\,dz = \tfrac{1}{2}\rho|k\phi_0|^2/k.$$

El coeficiente de amortiguamiento es [utilizando (61.3)]

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\alpha^{1/3}\rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\rho^{3/4}}.$$

El cociente entre esta magnitud y el coeficiente de amortiguamiento en el caso de ondas de capilaridad sobre una superficie limpia (§ 61, problema 2) es $(\alpha\rho/k\eta^2)^{1/4}/4\sqrt{2}$, y es grande en comparación con la unidad a no ser que sea muy pequeña la longitud de onda. Así pues, la presencia de una película adsorbida sobre la superficie de un líquido conduce a un incremento notable del coeficiente de amortiguamiento.

CAPÍTULO VIII

SONIDO

§ 63. Ondas sonoras

Pasaremos ahora al estudio del flujo de fluidos compresibles y empezaremos investigando las oscilaciones pequeñas; un movimiento oscilatorio de pequeña amplitud en un fluido compresible se denomina *onda sonora*. En todo punto del fluido una onda sonora produce alternativamente compresiones y expansiones o rarefacciones.

Puesto que las oscilaciones son pequeñas, la velocidad $\mathbf{v}$ también es pequeña, de modo que el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ en la ecuación de Euler puede despreciarse. Por la misma razón, las variaciones relativas de la densidad de fluido y de la presión son pequeñas. Podemos escribir las variables p y ρ en la forma

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{63.1}$$

en donde p_0 y ρ_0 son la presión y densidad de equilibrio constantes y ρ' y p' son sus variaciones en la onda sonora ($\rho' \ll \rho_0$, $p' \ll p_0$). La ecuación de continuidad $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, al sustituir en (63.1) y despreciar las pequeñas cantidades de segundo orden (siendo ρ', p' y $\mathbf{v}$ de primer orden), se transforma en

$$\partial\rho'/\partial t + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{63.2}$$

La ecuación de Euler

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p$$

se reduce, en la misma aproximación, a

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (1/\rho_0)\mathbf{grad}\,p' = 0. \tag{63.3}$$

La condición de que las ecuaciones linealizadas del movimiento (63.2) y (63.3) sean aplicables a la propagación de ondas sonoras se basa en que la velocidad de las partículas del fluido en la onda deberá ser pequeña en comparación con la velocidad del sonido: $v \ll c$. Puede obtenerse esta condición, por ejemplo, a partir de la exigencia de que $p' \ll \rho_0$ [ver fórmula (63.12) a continuación].

Las ecuaciones (63.2) y (63.3) contienen las funciones incógnitas $\mathbf{v}$, p' y ρ'. Para eliminar una de ellas, observemos que una onda sonora en un fluido ideal es adiabática, como cualquier otro movimiento en un fluido ideal. De aquí que la variación pequeña p' de la presión está relacionada con la pequeña modificación ρ' de la densidad a través de

$$p' = (\partial p/\partial \rho_0)_s \rho'. \tag{63.4}$$

Sustituyendo ρ' de acuerdo con esta ecuación en (63.2), encontramos

$$\partial p'/\partial t + \rho_0 (\partial p/\partial \rho_0)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{63.5}$$

Las dos ecuaciones (63.3) y (63.5), con las incógnitas $\mathbf{v}$ y p', dan una descripción completa de la onda sonora.

Con objeto de expresar todas las incógnitas en función de una de ellas, es conveniente introducir el potencial de velocidades poniendo $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$. Tenemos a partir de la ecuación (63.3)

$$p' = -\rho\, \partial\phi/\partial t, \tag{63.6}$$

que relaciona p' y ϕ (en esta expresión, y de ahora en adelante, omitiremos por brevedad los sufijos en p_0 y ρ_0). Se obtiene entonces a partir de (63.5) la ecuación

$$\partial^2\phi/\partial t^2 - c^2 \triangle\phi = 0, \tag{63.7}$$

que debe satisfacer el potencial ϕ; ahora hemos introducido la notación

$$c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}. \tag{63.8}$$

Una ecuación de la forma (63.7) se denomina *ecuación de onda*. Aplicando el operador gradiente a (63.7), encontramos que cada uno de los tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$ satisface una ecuación de la misma forma y al derivar (63.7) respecto al tiempo vemos que la presión p' (y por tanto ρ') también satisface la ecuación de onda.

Consideremos una onda sonora en la que todas sus magnitudes dependen únicamente de una coordenada (por ejemplo, x). Es decir, el flujo es completamente homogéneo en el plano yz. Dicha onda se denomina *onda plana*. La ecuación de onda (63.7) se transforma en

$$\partial^2\phi/\partial x^2 - (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0. \tag{63.9}$$

Para resolver esta ecuación, sustituyamos x y t por las nuevas variables $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$. Es fácil ver que con estas variables (63.9) se reduce a $\partial^2\phi/\partial\eta\partial\xi = 0$. Integrando esta ecuación respecto a ξ, encontramos $\partial\phi/\partial\eta = F(\eta)$, en donde $F(\eta)$ es una función arbitraria de η. Integrando de nuevo, obtenemos $\phi = f_1(\xi) + f_2(\xi)$, en donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias de sus argumentos. Así pues,

$$\phi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \tag{63.10}$$

La distribución de las demás magnitudes (p', ρ', $\mathbf{v}$) en una onda plana viene dada por funciones de la misma forma.

Para concretar, estudiaremos la densidad, $\rho' = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Por ejemplo, sea $f_2 = 0$, de modo que $\rho' = f_1(x - ct)$. El significado de esta solución es evidente: en un plano cualquiera $x =$ constante la densidad varía con el tiempo, y en un tiempo determinado cualquiera, la densidad es diferente para valores distintos de x, pero es la misma para las coordenadas x y los tiempos t en los que se cumple que $x - ct =$ constante, o sea, $x =$ constante $+ ct$. Esto significa que si en un instante determinado $t = 0$ y en un punto concreto del fluido la densidad tiene un valor determinado, entonces después de un t se encuentra el mismo valor de la densidad a una distancia ct del punto original a lo largo del eje x. Lo mismo es cierto para todas las demás magnitudes de la onda. Así pues, el esquema del movimiento se propaga a través del medio en la dirección x con una velocidad c; c se denomina *velocidad del sonido.*

Así pues, $f_1(x - ct)$ representa lo que se denomina una *onda plana móvil,* que se propaga en el sentido positivo del eje x. Es evidente que $f_2(x + ct)$ representa una onda que se propaga en sentido opuesto.

De los tres componentes de la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$ en una onda plana, solamente $v_x = \partial\phi/\partial x$ es no nula. Así pues, la velocidad del fluido en una onda sonora tiene la dirección de la propagación. Por esta razón las ondas sonoras en un fluido se dice que son *longitudinales.*

En una onda plana móvil, la velocidad $v_x = v$ está relacionada con la presión p' y la densidad ρ' de un modo simple. Poniendo $\phi = f(x - ct)$, encontramos $v = \partial\phi/\partial x = f'(x - ct)$ y $p' = -\rho\partial\phi/\partial t = \rho c f'(x - ct)$. Comparando ambas expresiones, se encuentra

$$v = p'/\rho c. \tag{63.11}$$

Sustituyendo aquí de (63.4) $p' = c^2\rho'$, encontramos la relación existente entre la velocidad y la variación de la densidad:

$$v = c\rho'/\rho. \tag{63.12}$$

Podemos mencionar también la relación existente entre la velocidad y las oscilaciones de temperatura en una onda sonora. Tenemos $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$, y utilizando la fórmula termodinámica bien conocida $(\partial T/\partial p)_s = (T/c_p)(\partial V/\partial T)$ y la fórmula (63.11), obtenemos

$$T' = c\beta T v/c_p, \tag{63.13}$$

en donde $\beta = (1/V)(\partial V/\partial T)_p$ es el coeficiente de dilatación térmica.

La fórmula (63.8) da la velocidad del sonido en función de la compresibilidad adiabática del fluido. Está relacionada con la compresibilidad isoterma a través de la fórmula termodinámica

$$(\partial p/\partial\rho)_s = (c_p/c_v)(\partial p/\partial\rho)_T. \tag{63.14}$$

Calculemos la velocidad del sonido en un gas perfecto. La ecuación de estado es $pV = p/\rho = RT/\mu$, en donde R es la constante de los gases y μ el peso molecular. Se obtiene para la velocidad del sonido la expresión

$$c = \sqrt{(\gamma RT/\mu)}, \tag{63.15}$$

en donde γ designa el cociente c_p/c_v.† Como γ depende normalmente sólo ligeramente de la temperatura, la velocidad del sonido en el gas puede suponerse que es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura. Para una temperatura determinada no depende de la presión.

Existe un caso muy importtante, que es lo que se denominan *ondas monocromáticas*. En este caso todas las magnitudes son exactamente funciones periódicas del tiempo (*armónicos*). Normalmente, es conveniente escribir dichas funciones como la parte real de una magnitud compleja (ver el principio del § 24). Por ejemplo, podemos poner para el potencial de velocidad

$$\phi = \mathrm{re}[\phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}], \tag{63.16}$$

en donde ω es la frecuencia de la onda. La función ϕ_0 satisface la ecuación

$$\triangle\phi_0 + (\omega^2/c^2)\phi_0 = 0, \tag{63.17}$$

que se obtiene sustituyendo (63.16) en (63.7).

Consideremos una onda plana móvil monocromática que se propaga en el sentido positivo del eje x. En dicha onda, todas las magnitudes son funciones solamente de $x - ct$ y así el potencial tiene la forma

$$\phi = \mathrm{re}\{A \exp[-i\omega(t - x/c)]\}, \tag{63.18}$$

en donde A es una constante denominada *amplitud compleja*. Escribiendo esta constante como $A = ae^{i\alpha}$ con las constantes reales a y α, tenemos

$$\phi = a \cos(\omega x/c - \omega t + \alpha). \tag{63.19}$$

La constante a se denomina *amplitud* de la onda y el argumento del coseno se denomina *fase*. Designemos por $\mathbf{n}$ un vector unidad en la dirección de propagación. El vector

$$\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n} \tag{63.20}$$

se denomina *vector de onda*. En función de este vector (63.18) puede escribirse

$$\phi = \mathrm{re}\{A \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]\}. \tag{63.21}$$

Las ondas monocromáticas son muy importantes, debido a que cualquier onda puede representarse con una suma de ondas planas monocromáticas superpuestas con diversos vectores de ondas y distintas frecuencias. Esta

† Es útil señalar que la velocidad del sonido en un gas es del mismo orden de magnitud que la velocidad térmica media de las moléculas.

descomposición de una onda en ondas monocromáticas es simplemente un desarrollo en serie de Fourier o en integrales de Fourier (lo que se denomina también *resolución espectral*). Los términos de este desarrollo se denominan *componentes monocromáticos* o *componentes de Fourier* de la onda.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la velocidad del sonido en un sistema bifásico casi homogéneo compuesto de un vapor con pequeñas gotitas de líquido suspendidas en él («vapor húmedo») o bien un líquido con pequeñas burbujas en su interior. Se supone que la longitud de onda es grande en comparación con el tamaño de las inhomogeneidades del sistema.

Solución. En un sistema bifásico, p y T no son variables independientes, sino que están relacionadas por la ecuación de las fases. Una compresión o expansión del sistema está acompañada por una variación de una fase a la otra. Sea x la fracción (en masa) de la fase 2 en el sistema. Tenemos

$$\begin{aligned} s &= (1-x)s_1 + xs_2, \\ V &= (1-x)V_1 + xV_2, \end{aligned} \tag{1}$$

en donde los sufijos 1 y 2 distinguen las magnitudes que pertenecen a las fases puras 1 y 2. Para calcular la derivada $(\partial V/\partial p)_s$, la transformaremos de las variables p, s a p, x, obteniendo $(\partial V/\partial p)_s = (\partial V/\partial p)_x - (\partial V/\partial x)_p(\partial s/\partial p)_x/(\partial s/\partial x)_p$. La sustitución (1) da entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = x\left[\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}p} - \frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}p}\right] + (1-x)\left[\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}p} - \frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}p}\right]. \tag{2}$$

Se obtiene la velocidad del sonido a partir de (1) y (2), utilizando la fórmula (63.8).

Desarrollando las derivadas totales respecto a la presión, introduciendo el calor latente de la transición de la fase 1 a la fase 2 $[q = T(s_2 - s_1)]$ y utilizando la ecuación de Clapeyron-Clausius para la derivada $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ a lo largo de la curva de equilibrio $[\mathrm{d}p/\mathrm{d}T = p/T(V_2 - V_1)]$, obtenemos la expresión dentro del primer corchete de (2) en la forma

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p (V_2 - V_1) - \frac{Tc_p^2}{q^2}(V_2 - V_1)^2.$$

El segundo corchete se transforma de modo semejante.

Supongamos que el líquido es la fase 1 y el vapor la fase 2; supongamos, además, que el último es un gas perfecto y despreciamos el volumen específico V_1 en comparación con V_2. Si $x \ll 1$ (líquido que contiene algunas burbujas de vapor), se encuentra que la velocidad del sonido resulta ser

$$c = q\mu p V_1/RT\sqrt{(c_{p_1}T)}, \tag{3}$$

en donde R es la constante de los gases y μ el peso molecular. Esta velocidad es, en general, muy pequeña; así pues, cuando se forman burbujas de vapor en un líquido (*cavitación*), la velocidad del sonido sufre una disminución neta repentina.

Si $1 - x \ll 1$ (un vapor que contiene algunas gotitas de líquido), obtenemos

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_{p_2}T}{q^2}. \tag{4}$$

Comparando esta expresión con la velocidad del sonido en el gas puro (63.15), vemos que aquí también la adición de una segunda fase reduce el valor de c, aunque en este caso no tan notablemente.

Cuando x aumenta de 0 a 1, la velocidad del sonido crece monótonamente desde el valor (3) al valor (4). Para $x = 0$ y $x = 1$ varía discontinuamente cuando pasamos de un sistema monofásico a otro sistema bifásico. Esto origina el resultado de que, para valores de x muy próximos a cero o a la unidad, la teoría lineal usual del sonido deja de ser aplicable incluso aunque la amplitud de la onda sonora sea pequeña; las compresiones y dilataciones o rarefacciones producidas por la onda están acompañadas en este caso por una variación entre un sistema de una fase y un sistema a dos fases y la hipótesis esencial de una velocidad constante del sonido ya no es suficientemente satisfactoria.

Problema 2. Determinar la velocidad del sonido en un gas calentado a una temperatura tan alta que la presión de equilibrio de la radiación del cuerpo negro resulta comparable con la presión del gas.

Solución. La presión es $p = nkT + akT^4/4$ y la entropía es

$$s = (k/m)\log(T^{\frac{3}{2}}/n) + akT^3/n.$$

En estas expresiones el primer término se relaciona con las partículas y el segundo con la radiación; n es la densidad numérica de partículas, m su masa, k la constante de Boltzmann y $a = 4\pi^2k^3/45\hbar^3c^3$.† La densidad de la materia no se ve afectada por la radiación del cuerpo negro, de modo que $\rho = mn$. La velocidad del sonido designada aquí por u para distinguirla de la luz es

$$u^2 = \frac{\partial(p,s)}{\partial(\rho,s)} = \frac{\partial(p,s)}{\partial(n,T)} \Big/ \frac{\partial(\rho,s)}{\partial(n,T)},$$

en donde las derivadas se han escrito en forma jacobiana. Calculando los jacobianos, tenemos

$$u^2 = \frac{5kT}{3m}\left[1 + \frac{2a^2T^6}{5n(n+2aT^3)}\right].$$

§ 64. La energía y el impulso de las ondas sonoras

Deduzcamos una expresión para la energía de una onda sonora. De acuerdo con la fórmula general, la energía de la unidad de volumen del fluido es $\rho\epsilon + \rho v^2/2$. Sustituyamos ahora $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon'$, en donde las letras señaladas con prima designan las desviaciones de las magnitudes respectivas de sus valores cuando el fluido está en reposo. El término $\rho' v^2/2$ es una magnitud de tercer orden. De aquí que, si tomamos únicamente términos hasta el segundo orden, tengamos

$$\rho_0\epsilon_0 + \rho'\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0} + \tfrac{1}{2}\rho'^2\frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0^2} + \tfrac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

† Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 60, Editorial Reverté, Barcelona.

Las derivadas se toman a entropía constante, puesto que la onda sonora es adiabática. A partir de la relación termodinámica $d\epsilon = Tds - pdV = Tds + + (p/\rho^2)d\rho$, tenemos $[\partial(\rho\epsilon)/\partial\rho]_s = \epsilon + p/\rho = w$, y la segunda derivada es

$$[\partial^2(\rho\epsilon)/\partial\rho]_s = (\partial w/\partial\rho)_s = (\partial w/\partial p)_s(\partial p/\partial\rho)_s = c^2/\rho.$$

Así pues, la energía de la unidad de volumen del fluido es

$$\rho_0\epsilon_0 + w_0\rho' + \tfrac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho + \tfrac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

El primer término ($\rho_0\epsilon_0$) de esta expresión es la energía de la unidad de volumen cuando el fluido está en reposo y no está relacionado con la onda sonora. El segundo término ($w_0\rho'$) es la variación de energía debida a la modificación de la masa del fluido en el volumen unidad. Este término desaparece en la energía total, que se obtiene integrando la energía en el volumen completo del fluido: puesto que la masa total del fluido resulta sin variación, tenemos

$$\int \rho\, dV = \int \rho_0\, dV, \quad \text{or} \quad \int \rho'\, dV = 0.$$

Así pues, la variación total de la energía del fluido producida por la onda sonora viene dada por la integral

$$\int (\tfrac{1}{2}\rho_0 v^2 + \tfrac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho_0)dV.$$

El integrando puede considerarse como la densidad E de la energía sonora:

$$E = \tfrac{1}{2}\rho_0 v^2 + \tfrac{1}{2}c^2\rho'^2/\rho_0. \tag{64.1}$$

Esta expresión toma una forma más sencilla para una onda plana móvil. En dicha onda $\rho' = \rho_0 v/c$ [ver (63.12)] y los dos términos en (64.1) son iguales, de modo que

$$E = \rho_0 v^2. \tag{64.2}$$

En general, esta relación no es válida. Puede obtenerse una fórmula semejante únicamente para el promedio (temporal) de la energía sonora total. Se deduce inmediatamente a partir del bien conocido teorema general de la mecánica, que la energía potencial total media de un sistema que realiza oscilaciones pequeñas es igual a la energía cinética media total. Puesto que esta última es, en el caso considerado,

$$\tfrac{1}{2}\int \rho_0 \overline{v^2}\, dV,$$

encontramos que la energía sonora total media es

$$\int \bar{E}\, dV = \int \rho_0 \overline{v^2}\, dV. \tag{64.3}$$

Si se representa una onda no monocromática por medio de una serie de ondas monocromáticas, la energía media es igual a la suma de las energías medias de las componentes monocromáticas. Por lo tanto, si **v** esta repre-

sentado con una suma de términos de diversas frecuencias, $\overline{v^2}$ contendrá tanto el cuadrado de cada término como el producto de los términos de frecuencias distintas. Estos productos contienen factores de la forma $e^{i(\omega-\omega')t}$, que son funciones periódicas del tiempo. Pero el valor medio de una función periódica es cero, y, por tanto, estos términos se anulan. Así pues, la energía media contiene sólo términos en los que intervienen los valores cuadráticos medios de las componentes monocromáticas.

A continuación, consideremos un determinado volumen de fluido en el que se propaga el sonido y determinemos el flujo medio de energía a través de la superficie cerrada que limita dicho volumen. La densidad de flujo de energía en el fluido es, según (6.3), $\rho\mathbf{v}(v^2/2 + w)$. En el caso presente podemos despreciar el término en v^2, que es de tercer orden. De aquí que la densidad de flujo de energía media en la onda sonora sea $\overline{\rho w\mathbf{v}}$. Sustituyendo $w = w_0 + w'$, tenemos $\overline{\rho w\mathbf{v}} = w_0\overline{\rho\mathbf{v}} + \overline{\rho w'\mathbf{v}}$. En el caso de una variación pequeña w' de la entalpía tenemos $w' = (\partial w/\partial p)_s p'$. Puesto que $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, se deduce que $w' = p'/\rho$ y $\overline{\rho w\mathbf{v}} = w_0\overline{\rho\mathbf{v}} + \overline{p'\mathbf{v}}$. El flujo de energía total a través de la superficie en cuestión es

$$\oint (w_0\overline{\rho\mathbf{v}} + \overline{'p\mathbf{v}})\cdot d\mathbf{f}.$$

Sin embargo, puesto que la cantidad total de fluido en el volumen considerado no varía en valor medio, el promedio temporal del flujo de masa a través de la superficie cerrada debe ser nulo. De aquí que el flujo de energía sea simplemente

$$\oint \overline{p'\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{f}.$$

Vemos que el flujo de energía sonora media está representado por el vector

$$\bar{\mathbf{q}} = \overline{p'\mathbf{v}}. \tag{64.4}$$

Es fácil comprobar que la relación

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div}(\overline{p'\mathbf{v}}) = 0 \tag{64.5}$$

resulta válida. En esta forma la ecuación representa la ley de conservación de la energía sonora tomando el vector $\mathbf{q} = p'\mathbf{v}$ la parte de flujo de energía sonora. Así pues, la expresión es válida no sólo en el caso del flujo medio, sino también para el flujo en un instante cualquiera.

En una onda plana móvil la variación de presión está relacionada con la velocidad por $p' = c\rho_0 v$. Introduciendo el vector unidad $\mathbf{n}$ en la dirección de propagación de la onda (que es la misma que la dirección de la velocidad $\mathbf{v}$), obtenemos $\mathbf{q} = c\rho_0 v^2\mathbf{n}$, o sea,

$$\mathbf{q} = cE\mathbf{n}. \tag{64.6}$$

Así pues, la densidad de flujo de energía en una onda sonora plana es igual

a la densidad de energía multiplicada por la velocidad del sonido, resultado que era de esperar.

Consideremos a continuación una onda sonora que, en un instante dado cualquiera, ocupa una región finita del espacio† (un *paquete de ondas*), y determinemos el impulso total del fluido en la onda. El impulso de la unidad de volumen del fluido es igual a la densidad del flujo másico $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Sustituyendo $\rho = \rho_0 + \rho'$, tenemos $\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. La variación de densidad está relacionada con la variación de presión por $\rho' = p'/c^2$. Utilizando (64.4), se obtiene, por tanto,

$$\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2. \tag{64.7}$$

Puesto que tenemos un flujo potencial en una onda sonora podemos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi$; debe resaltarse que este resultado no es una consecuencia de las aproximaciones realizadas al deducir las ecuaciones lineales del movimiento en § 63, puesto que una solución tal como $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$ es una solución exacta de las ecuaciones de Euler. Por tanto, tenemos $\mathbf{j} = \rho_0\,\mathbf{grad}\,\phi + \mathbf{q}/c^2$. El impulso total en la onda es igual a la integral $\int \mathbf{j}\,dV$ extendida a todo el volumen ocupado por la onda. La integral del $\mathbf{grad}\,\phi$ puede transformarse en una integral de superficie,

$$\int \mathbf{grad}\,\phi\,dV = \oint \phi\,d\mathbf{f},$$

y es cero, puesto que ϕ vale cero fuera del volumen ocupado por la onda. Así pues, el impulso total de la onda es

$$\int \mathbf{j}\,dV = (1/c^2)\int \mathbf{q}\,dV. \tag{64.8}$$

Esta magnitud no es, en general, cero. La existencia de un impulso total no nulo significa que existe una transferencia de materia. Por tanto, se tiene la conclusión de que la propagación de un paquete de ondas sonoras está acompañado por la transferencia de fluido. Este es un efecto de segundo orden (puesto que $\mathbf{q}$ es una magnitud de segundo orden).

Finalmente, calculemos el valor medio de la variación de presión p' en una onda sonora. En primera aproximación, correspondiente a las ecuaciones linearizadas usuales del movimiento, p' es una función que varía de signo periódicamente y el valor medio de p' es cero. Sin embargo, este resultado deja de ser válido si pasamos a aproximaciones más altas. Si tomamos únicamente magnitudes de segundo orden, p' puede expresarse en función de magnitudes calculadas a partir de las ecuaciones sonoras lineales, de modo que no es necesario resolver directamente las ecuaciones no lineales del movimiento obtenidas cuando se tienen en cuenta términos de orden superior.

† No limitada por paredes sólidas.

Partiremos de la ecuación de Bernoulli: $w + v^2/2 + \partial\phi/\partial t = \text{constante}$, y la promediaremos respecto al tiempo. El valor medio de la derivada temporal $\partial\phi/\partial t$ es cero.† Haciendo también $w = w_0 + w'$ e incluyendo w_0 dentro de la constante, obtenemos $\overline{w'} + \overline{v^2/2} = \text{constante}$. Supongamos que la onda se propaga en un volumen infinito de fluido, pero que se amortigua en el infinito, es decir, que $\mathbf{v}$, w', etc., son cero en el infinito. Puesto que la constante es la misma en todo el espacio, evidentemente debe ser nula, de modo que

$$\overline{w'} + \tfrac{1}{2}\overline{v^2} = 0. \tag{64.9}$$

A continuación, desarrollaremos w' en potencias de p' y tomaremos únicamente los términos hasta el segundo orden:

$$w' = (\partial w/\partial p)_s p' + \tfrac{1}{2}(\partial^2 w/\partial p^2)_s p'^2;$$

como $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, tenemos

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Sustituyendo esta expresión en (64.9) se tiene

$$\overline{p'} = -\tfrac{1}{2}\rho_0\overline{v^2} + \overline{p'^2}/2\rho_0 c^2 = -\tfrac{1}{2}\rho_0\overline{v^2} + \overline{\rho'^2}c^2/2\rho_0, \tag{64.10}$$

que determina el valor medio requerido. La expresión del segundo miembro es una magnitud de segundo orden y se calcula utilizando los valores de ρ' y v obtenidos a partir de la solución de la ecuación linealizada del movimiento. La densidad media es

$$\overline{\rho'} = (\partial\rho/\partial p_0)_s \overline{p'} + \tfrac{1}{2}(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s \overline{p'^2}. \tag{64.11}$$

Si la onda puede considerarse como una onda plana móvil en el volumen referido, entonces $v = c\rho'/\rho_0$, de modo que $\overline{v^2} = c^2\overline{\rho'^2}/\rho_0^2$ y la expresión (64.10) es cero, es decir, la variación de presión media en una onda plana es un efecto de orden superior al segundo. Sin embargo, la variación de densidad $\overline{\rho'} = 1/2(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s\overline{p'^2}$ no es cero. (Podemos mencionar que la derivada $(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s$ de hecho es siempre negativa y, por lo tanto, $\overline{\rho'} < 0$ en una onda móvil.) Con la misma aproximación, tenemos para el valor medio del tensor de densidad de flujo del impulso en una onda plana móvil $\bar{p}\delta_{ik} + \overline{\rho v_i v_k} = p_0\delta_{ik} + \overline{\rho_0 v_i v_k}$. El primer término es la presión de equilibrio y no está rela-

† Por la definición general de valor medio, tenemos como valor medio de la derivada de cualquier función $f(t)$:

$$\overline{df/dt} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{df}{dt}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{f(T)-f(-T)}{2T}.$$

Si la función $f(t)$ permanece finita para todo t, el límite es cero, de modo que $df/dt = 0$.

cionada con la onda sonora. En el segundo término se introduce el vector unidad **n** en la dirección de **v** (que es la misma que la dirección de propagación de la onda), y, utilizando (64.2), obtenemos para la densidad de flujo del impulso en una onda sonora

$$\overline{\Pi_{ik}} = \bar{E} n_i n_k. \tag{64.12}$$

Si la onda se propaga en la dirección x, únicamente la componente $\overline{\Pi_{xx}} = \overline{E}$ es no nula. Así pues, en esta aproximación existe en la onda sonora plana sólo una componente x del flujo del impulso medio y esta componente se transmite en la dirección x.

§ 65. Reflexión y refracción de ondas sonoras

Cuando una onda sonora incide sobre el límite de separación entre dos medios fluidos diferentes, sufre una reflexión y una refracción. Esto significa que, además de la onda incidente aparecen otras dos más; una de ellas (la *onda reflejada*) se propaga hacia atrás en el propio medio inicial desde la superficie de separación, y la otra (la *onda refractada*) se propaga por el interior del segundo medio. En consecuencia, el movimiento en el primer medio es una combinación de dos ondas (la incidente y la reflejada), mientras que en el segundo medio solamente existe uno, el de la onda refractada.

La relación entre estas tres ondas está determinada por las condiciones límites en la superficie de separación, que exigen que las presiones y las componentes de velocidad normal sean iguales.

Consideremos la reflexión y la refracción de una onda longitudinal monocromática en una superficie plana que separa dos medios, la cual consideraremos como plano yz. Es fácil ver que las tres ondas tienen la misma frecuencia ω y los mismos componentes k_y, k_z del vector de onda, pero no el mismo componente k_x perpendicular al plano de separación. Efectivamente, en un medio homogéneo, una onda monocromática con valor constante de **k** y ω satisface las ecuaciones del movimiento. La presencia de un límite introduce solamente unas condiciones en la frontera, que en el caso considerado se aplican en $x = 0$, es decir, que no dependen ni del tiempo ni de las coordenadas y, z. De aquí que la dependencia de la solución respecto a t y z permanezca la misma en todo el espacio y en todo el tiempo, es decir, ω, k_y, k_z son los mismos que en la onda incidente.

A partir de este resultado podemos deducir inmediatamente las relaciones que dan las direcciones de propagación de las ondas reflejadas y refractadas. Supongamos que el plano de la onda incidente es el plano xy. Entonces, $k_z = 0$ en la onda incidente y lo mismo debe ser cierto en las ondas reflejada y refractada. Así pues, las direcciones de propagación de las tres ondas son coplanarias.

Sea θ el ángulo que forman la dirección de propagación de la onda y el eje x. Entonces, a partir de la igualdad $k_y = (\omega/c)\,\mathrm{sen}\,\theta$ para las ondas incidente y reflejada, se deduce que

$$\theta_1 = \theta_1', \tag{65.1}$$

es decir, el ángulo de incidencia θ_1 es igual al ángulo de reflexión θ_1'. A partir de una ecuación semejante para las ondas incidente y refractada, se deduce que

$$\mathrm{sen}\,\theta_1/\mathrm{sen}\,\theta_2 = c_1/c_2, \tag{65.2}$$

que relaciona el ángulo de incidencia θ_1 con el ángulo de refracción θ_2 (siendo c_1 y c_2 las velocidades del sonido en ambos medios).

Con objeto de obtener una relación cuantitativa entre las intensidades de las tres ondas, escribiremos los potenciales de velocidad respectivos en la forma

$$\phi_1 = A_1 \exp[i\omega\{(x/c_1)\cos\theta_1 + (y/c_1)\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - t\}],$$
$$\phi_1' = A_1' \exp[i\omega\{(-x/c_1)\cos\theta_1 + (y/c_1)\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - t\}],$$
$$\phi_2 = A_2 \exp[i\omega\{(x/c_2)\cos\theta_2 + (y/c_2)\,\mathrm{sen}\,\theta_2 - t\}].$$

En la superficie de separación ($x = 0$), la presión ($p = -\rho\partial\phi/\partial t$) y las velocidades normales ($v_x = \partial\phi/\partial x$) en los dos medios deben ser iguales; estas condiciones conducen a las ecuaciones

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos\theta_2}{c_2}A_2.$$

Se define *el coeficiente de reflexión* R como el cociente de las densidades de flujo de energía media (temporales) en las ondas reflejada e incidente. Puesto que la densidad de flujo de energía en una onda plana es $c\rho v^2$, tenemos $R = c_1\rho_1 v_1'^2/c_1\rho_1 v_1^2 = |A_1'|^2/|A_1|^2$. Un cálculo sencillo da

$$R = \left(\frac{\rho_2\ \mathrm{tg}\ \theta_2 - \rho_1\ \mathrm{tg}\ \theta_1}{\rho_2\ \mathrm{tg}\ \theta_2 + \rho_1\ \mathrm{tg}\ \theta_1}\right)^2. \tag{65.3}$$

Los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados a través de (65.2); expresando θ_2 en función de θ_1, podemos poner el coeficiente de reflexión en la forma

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2\cos\theta_1 - \rho_1\sqrt{(c_1^2 - c_2^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_1)}}{\rho_2 c_2\cos\theta_1 + \rho_1\sqrt{(c_1^2 - c_2^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_1)}}\right]^2. \tag{65.4}$$

En el caso de incidencia normal ($\theta_1 = 0$), esta fórmula nos da simplemente

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}\right)^2. \tag{65.5}$$

En el caso de un ángulo de incidencia tal que

$$\operatorname{tg}^2\theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2(c_1^2 - c_2^2)} \tag{65.6}$$

el coeficiente de reflexión es cero, es decir, la onda se refracta totalmente. Esto puede suceder si $c_1 > c_2$ pero $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, o bien si ambas desigualdades se invierten.

PROBLEMA

Determinar la presión ejercida por una onda sonora en el límite de separación de dos fluidos.

Solución. La suma de los flujos de energía total en las ondas reflejada y refractada deben igualar al flujo de energía incidente. Tomando el flujo de energía por unidad de área de la superficie de separación, podemos escribir esta condición en la forma $c_1 E_1 \cos\theta_1 = c_1 E_1' \cos\theta_1 + c_2 E_2 \cos\theta_2$, en donde E_1, E_1' y E_2 son las densidades de energía de las tres ondas. Introduciendo el coeficiente de reflexión $R = \overline{E_1'}/\overline{E_1}$, tenemos, por tanto,

$$\overline{E_2} = \frac{c_1 \cos\theta_1}{c_2 \cos\theta_2}(1-R)\overline{E_1}.$$

La presión requerida p se determina como la componente x del impulso perdido por unidad de tiempo por la onda sonora (y por unidad de área de la frontera). Utilizando la expresión (64.12) para el tensor de densidad de flujo del impulso de una onda sonora, tenemos

$$p = \overline{E_1}\cos^2\theta_1 + \overline{E_1'}\cos^2\theta_1 - \overline{E_2}\cos^2\theta_2.$$

Sustituyendo el valor de $\overline{E_2}$, e introduciendo R y utilizando (65.2), obtenemos

$$p = \overline{E_1}\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1[(1+R)\cot\theta_1 - (1-R)\cot\theta_2].$$

En el caso de incidencia normal ($\theta_1 = 0$), tenemos, utilizando (65.5),

$$p = 2\overline{E_1}\left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1\rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}\right].$$

§ 66. Acústica geométrica

Una onda plana tiene la propiedad distintiva de que su dirección de propagación y su amplitud son las mismas en todo el espacio. Una onda sonora arbitraria, como es natural, no posee esta propiedad. Sin embargo, pueden presentarse casos en donde una onda sonora que no es plana puede todavía considerarse como plana en una región pequeña del espacio. Para que esto sea así, es evidentemente necesario que la amplitud y la dirección de la propagación varíen únicamente de modo ligero en distancias del orden de la longitud de onda.

Si esta condición es válida, podemos introducir la idea de los *rayos*, que son líneas tales que la tangente a las mismas en un punto cualquiera coincide con la dirección de propagación; y podemos entonces decir que el sonido se propaga a lo largo de los rayos, ignorando su naturaleza ondulatoria. El estudio de las leyes de la propagación del sonido en estos casos es una tarea de la *acústica geométrica*. Podemos decir que la acústica geométrica corresponde al límite de longitudes de ondas pequeñas, $\lambda \to 0$.

Deduzcamos la ecuación básica de la acústica geométrica, que determina la dirección de los rayos. Escribamos el potencial de velocidades de la onda como

$$\phi = ae^{i\psi}. \tag{66.1}$$

En el caso en que la onda no es plana, pero puede aplicarse la acústica geométrica, la amplitud a es una función de variación lenta de las coordenadas y del tiempo, mientras que la fase de la onda ψ es «casi lineal» (recordemos que en una onda plana $\psi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha$, siendo $\mathbf{k}$ y ω constantes). En regiones pequeñas del espacio y en intervalos cortos de tiempo, la fase ψ puede desarrollarse en serie; hasta los términos de primer orden tenemos

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}\,\psi + t\,\partial\psi/\partial t.$$

De acuerdo con el hecho de que una región pequeña del espacio (y durante intervalos breves de tiempo), la onda puede considerarse como plana, definiremos el vector de onda y la frecuencia en cada punto como

$$\mathbf{k} = \partial\psi/\partial\mathbf{r} \equiv \mathbf{grad}\,\psi, \qquad \omega = -\partial\psi/\partial t. \tag{66.2}$$

La magnitud ψ se denomina *eikonal*.

En una onda sonora tenemos $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Sustituyendo (66.2), obtenemos la ecuación básica de la acústica geométrica:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{66.3}$$

Si el fluido no es homogéneo, el coeficiente $1/c^2$ es una función de las coordenadas.

Como sabemos, a partir de la mecánica, el movimiento de las partículas materiales puede determinarse mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi, la cual, como (66.3), es una ecuación diferencial parcial de primer orden. La magnitud análoga a ψ es la acción S de la partícula y las derivadas de la acción determinan el impulso $\mathbf{p} = \partial S/\partial\mathbf{r}$ y la función de Hamilton (la energía) de la partícula $H = -\partial S/\partial t$; estas fórmulas son semejantes a (66.2). También sabemos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es equivalente a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \partial H/\partial\mathbf{p}.$$

A partir de la analogía anterior, entre la mecánica de una partícula material y la acústica geométrica, podemos escribir a continuación unas ecuaciones semejantes para los rayos:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\partial\omega/\partial\mathbf{r}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \tag{66.4}$$

En un medio homogéneo e isótropo $\omega = ck$ con c constante, de modo que $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ (siendo $\mathbf{n}$ un vector unidad en la dirección de $\mathbf{k}$), es decir, los rayos se propagan en líneas rectas con una frecuencia constante ω, como era de esperar.

Como es natural, la frecuencia permanece constante a lo largo de un rayo en todos los casos en que la propagación del sonido se produce en condiciones estacionarias, es decir, las propiedades del medio en cada punto del espacio no varían con el tiempo. En el caso de la derivada temporal total de la frecuencia, que nos da su variación respecto al tiempo a lo largo de un rayo, tenemos $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \partial\omega/\partial t + \dot{\mathbf{r}} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{r} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Al sustituir (66.4), se anulan los últimos dos términos, y en un estado estacionario $\partial\omega/\partial t = 0$, de modo que $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 0$.

En la propagación estacionaria del sonido en un medio inhomogéneo en reposo $\omega = ck$, en donde c es una función dada de las coordenadas. Las ecuaciones (66.4) dan

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{k}} = -k\,\mathbf{grad}\,c. \tag{66.5}$$

El módulo del vector $\mathbf{k}$ varía a lo largo de un rayo de modo sencillo, de acuerdo con $k = \omega/c$ (siendo ω constante). Para determinar la variación de la dirección de $\mathbf{n}$ pongamos $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}c$ en la segunda de las ecuaciones (66.5): $\omega\dot{\mathbf{n}}/c - (\omega\mathbf{n}/c^2)(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{grad}\,c) = -k\,\mathbf{grad}\,c$, de aquí que $\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}t = -\mathbf{grad}\,c + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}\,c)$. Introduciendo el elemento de longitud a lo largo del rayo $\mathrm{d}l = c\,\mathrm{d}t$, podemos volver a escribir esta ecuación

$$\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}l = -(1/c)\,\mathbf{grad}\,c + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad}\,c)/c. \tag{66.6}$$

Esta ecuación determina la forma de los rayos; $\mathbf{n}$ es un vector unidad tangencial a un rayo.†

Si se resuelve la ecuación (66.3) y el eikonal ψ es una función conocida de las coordenadas y del tiempo, podemos también encontrar entonces la distribución de la intensidad del sonido en el espacio. En condiciones estacionarias, viene dada por la ecuación $\mathrm{div}\,\mathbf{q} = 0$ (siendo $\mathbf{q}$ la densidad de flujo de la energía sonora), que debe ser válida en todo el espacio, excepto en las fuentes de sonido. Haciendo $\mathbf{q} = cE\mathbf{n}$, en donde E es la densidad de energía

† Como sabemos, a partir de la geometría diferencial, la derivada $\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}l$ a lo largo del rayo es igual a $\mathbf{N}/R$, siendo $\mathbf{N}$ un vector unidad a lo largo de la normal principal y R el radio de curvatura del rayo. La expresión del segundo miembro de (66.6) es, aparte de un factor $1/c$, la derivada de la velocidad del sonido a lo largo de la normal principal; de aquí que podamos escribir la ecuación como $1/R = -(1/c)\,\mathbf{N} \cdot \mathbf{grad}\,c$. Los rayos se desvían hacia la región en donde c es menor.

del sonido [ver (64.6)], y recordando que $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{k} = \mathbf{grad}\,\psi$, obtenemos la ecuación

$$\operatorname{div}(cE\,\mathbf{grad}\,\psi/|\mathbf{grad}\,\psi|) = 0, \tag{66.7}$$

que determina la distribución de E en el espacio.

La segunda fórmula (66.4) da la velocidad de propagación de las ondas a partir de la dependencia conocida de la frecuencia con los componentes del vector de onda. Esta es una fórmula muy importante, que es válida no sólo para las ondas sonoras, sino para todas las ondas (por ejemplo, ya lo hemos aplicado a las ondas de gravedad en § 12). Daremos ahora otra deducción de esta fórmula que pone en evidencia el significado de la velocidad que se define en ella. Consideremos un *paquete de ondas* que ocupa una región finita determinada del espacio. Admitamos que su composición espectral incluye componentes monocromáticos, cuyas frecuencias están comprendidas sólo en un pequeño intervalo; lo mismo es cierto para los componentes de sus vectores de onda. Sea ω una cierta frecuencia media del paquete de onda y $\mathbf{k}$ un cierto vector de onda medio. Entonces, en un instante inicial concreto, el paquete de ondas está descrito por una función de la forma

$$\phi = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})f(\mathbf{r}). \tag{66.8}$$

La función $f(\mathbf{r})$ es apreciablemente distinta de cero únicamente en una región que es pequeña (aunque sea grande en comparación con la longitud $1/k$). Su desarrollo en forma de integrales de Fourier contiene, por las hipótesis anteriores, componentes de la forma $\exp(i\boldsymbol{r}\cdot\Delta\mathbf{k})$, siendo $\Delta\mathbf{k}$ pequeña.

Así pues, cada componente monocromático es, en el instante inicial,

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}]. \tag{66.9}$$

La frecuencia correspondiente es $\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})$ (recordemos que la frecuencia es una función del vector de onda). De aquí que la misma componente tenga en el instante t la forma

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\cdot\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})t].$$

Utilizaremos el hecho de que $\Delta\mathbf{k}$ es pequeño y desarrollaremos $\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})$ en serie, tomando únicamente los dos primeros términos: $\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}) = \omega + (\partial\omega/\partial\mathbf{k})\cdot\Delta\mathbf{k}$, en donde $\omega = \omega(\mathbf{k})$ es la frecuencia correspondiente al vector de onda medio. Entonces, $\phi_{\mathbf{k}}$ se transforma en

$$\phi_{\mathbf{k}} = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)] \exp[i\Delta\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - t\partial\omega/\partial\mathbf{k})]. \tag{66.10}$$

Si ahora sumamos todos los componentes monocromáticos, con todos los valores de $\Delta\mathbf{k}$ que se presentan en el paquete de ondas, vemos a partir de (66.9) y (66.10) que el resultado es

$$\phi = \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]f(\mathbf{r} - t\partial\omega/\partial\mathbf{k}), \tag{66.11}$$

siendo f la misma función que en (66.8). Comparando con (66.8) se ve que,

después de un tiempo t, la distribución de amplitud se ha trasladado como un todo a través de una distancia $t\partial\omega/\partial\mathbf{k}$; el coeficiente exponencial de f en (66.11) influye únicamente en la fase. En consecuencia, la velocidad del paquete de ondas es

$$\mathbf{U} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \tag{66.12}$$

Esta fórmula da la velocidad de propagación para cualquier dependencia de ω respecto a $\mathbf{k}$.† Cuando $\omega = ck$, con c constante, se obtiene naturalmente el resultado ordinario $U = \omega/k = c$. En general, cuando $\omega(\mathbf{k})$ es una función arbitraria, la velocidad de propagación es una función de la frecuencia y la dirección de propagación puede no ser la misma que la del vector de onda.

PROBLEMA

Determinar la variación con la altitud de la amplitud del sonido que se propaga en una atmósfera isoterma sometida sólo a la gravedad.

Solución. En una atmósfera isoterma (considerada como un gas perfecto) la velocidad del sonido es constante. La densidad del flujo de la energía disminuye, evidentemente, a lo largo de un rayo en proporción inversa al cuadrado de la distancia r desde la fuente o foco: $cp\overline{v^2} \sim 1/r^2$. De aquí se deduce que la amplitud de las fluctuaciones de velocidad de la onda sonora varía a lo largo de un rayo inversamente como $r\sqrt{p}$; de acuerdo con la fórmula barométrica, $p \sim \exp(-\mu gz/RT)$, siendo z la altitud, μ el peso molecular del gas y R la constante de los gases.

§ 67. Propagación del sonido en un medio móvil

La relación $\omega = ck$ entre las frecuencias y el número de ondas es válida únicamente para la onda sonora monocromática que se propaga en un medio en reposo. No es difícil obtener una relación semejante para una onda que se propaga en un medio móvil (y que se observa en un sistema de coordenadas fijo).

Consideremos un flujo homogéneo de velocidad $\mathbf{u}$. Tomemos un sistema fijo K de coordenadas x, y, z, y además un sistema K' de coordenadas x', y', z' que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ respecto a K. En el sistema K' el fluido está

† La velocidad definida por (66.12) se denomina *velocidad de grupo* de la onda y el cociente ω/k *velocidad de fase*. Sin embargo, debe recordarse que la velocidad de fase no corresponde a ninguna propagación física real.

Respecto a la deducción dada aquí debe resaltarse que el movimiento del paquete de ondas sin cambio de forma (es decir, sin variación en la distribución espacial de la amplitud), expresada por (66.11), es aproximada y se obtiene como resultado de la hipótesis de que el intervalo $\Delta\mathbf{k}$ es pequeño. En general, cuando U depende de ω, un «paquete de ondas» se «suaviza» durante su propagación y la región del espacio que ocupa aumenta de tamaño. Puede demostrarse que esta suavización es proporcional al valor al cuadrado del intervalo $\Delta\mathbf{k}$ de los vectores de onda que contribuyen a la composición del paquete de ondas.

en reposo y una onda monocromática tiene la forma normal ϕ = constante $\times$ $\times \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - kct)]$. El radio vector $\mathbf{r}'$ en el sistema K' está relacionado con el radio vector $\mathbf{r}$ en el sistema K por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. De aquí que, en el sistema fijo de coordenadas, la onda tenga la forma ϕ = constante $\times \exp\{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - (kc + \mathbf{k}\cdot\mathbf{u})t]\}$. El coeficiente de t en el exponente es la frecuencia ω de la onda. Así pues, la frecuencia en un medio móvil está relacionada con el vector de onda $\mathbf{k}$ por

$$\omega = ck + \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}. \tag{67.1}$$

La velocidad de propagación es

$$\partial\omega/\partial\mathbf{k} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}; \tag{67.2}$$

y es la suma vectorial de la velocidad c en la dirección de $\mathbf{k}$ con la velocidad $\mathbf{u}$, según la cual el sonido es «transportado» por el fluido móvil.

Utilizando la fórmula (67.1), podemos investigar lo que se denomina el *efecto Doppler:* la frecuencia del sonido, percibida por un observador móvil respecto a la fuente o foco, no es la misma que la frecuencia de oscilación de dicho foco.

Supongamos que el sonido emitido por una fuente en reposo (respecto al medio) es recibido por un observador que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$. En un sistema K' en reposo respecto al medio tenemos $k = \omega_0/c$, en donde ω_0 es la frecuencia de oscilación de la fuente. En un sistema K móvil con el observador, el medio se mueve con velocidad $-\mathbf{u}$, y la frecuencia del sonido es, según (67.1), $\omega = ck - \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}$. Introduciendo el ángulo θ entre la dirección de la velocidad $\mathbf{u}$ y la del vector de onda $\mathbf{k}$ y poniendo $k = \omega_0/c$, vemos que la frecuencia del sonido recibido por el observalor móvil es

$$\omega = \omega_0[1 - (u/c)\cos\theta]. \tag{67.3}$$

El caso opuesto, en cierta medida, es la propagación en un medio en reposo de una onda sonora emitida a partir de un foco móvil. Supongamos ahora que $\mathbf{u}$ es la velocidad del foco. Ahora pasaremos desde el sistema fijo de coordenadas a un sistema K' móvil con el foco; en el sistema K' el fluido se mueve con la velocidad $-\mathbf{u}$. En K', en donde el foco está en reposo, la frecuencia de la onda sonora emitida debe ser igual a la frecuencia ω_0 de las oscilaciones del foco. Variando el signo de $\mathbf{u}$ en (67.1) e introduciendo el ángulo θ entre las direcciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{k}$, tenemos $\omega_0 = ck[1 - (u/c)\cos\theta]$. Sin embargo, en el sistema fijo original K, la frecuencia y el vector de onda están relacionados por $\omega = ck$. Así pues, tenemos

$$\omega = \omega_0/[1 - (u/c)\cos\theta]. \tag{67.4}$$

Esta fórmula da la relación existente entre la frecuencia ω_0 de las oscilaciones de un foco móvil y la frecuencia ω del sonido oído por un observador en reposo.

Si el foco se mueve alejándose del observador, el ángulo θ formado por su velocidad y la dirección del observador está comprendido en el intervalo $\frac{1}{2}\pi < \theta \leqslant \pi$, de modo que $\cos\theta < 0$. Se deduce entonces a partir de (67.4) que, si el foco se mueve alejándose del observador, la frecuencia del sonido que se oye es menor que ω_0.

Por otra parte, si el foco se aproxima al observador, entonces $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$, de modo que $\cos\theta > 0$, y la frecuencia $\omega > \omega_0$ aumenta con u. Para $u\cos\theta > c$, y de acuerdo con la fórmula (67.4), ω resulta negativa, lo cual significa que el sonido oído por el observador realmente le alcanza en orden inverso, es decir, el sonido emitido por el foco en un instante determinado cualquiera llega antes que el sonido emitido en instantes previos o anteriores.

Como ya se ha mencionado al principio del § 66, la aproximación de la acústica geométrica corresponde al caso de longitudes de ondas pequeñas, es decir, valores grandes del vector de onda. Para que esto sea así, la frecuencia del sonido debe ser, en general, grande. Sin embargo, en la acústica de los medios móviles, esta última condición no es preciso que se cumpla si la velocidad del medio supera la del sonido. Porque en este caso k puede ser grande incluso aunque la frecuencia sea cero; a partir de (67.1), tenemos que para $\omega = 0$ se cumple la ecuación

$$ck = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}, \tag{67.5}$$

y esta expresión tiene soluciones si $u > c$. Así pues, en un medio móvil con velocidades supersónicas pueden existir pequeñas perturbaciones estacionarias descritas por la acústica geométrica (si k es suficientemente grande). Esto significa que dichas perturbaciones se propagan a lo largo de rayos.

Consideremos, por ejemplo, una corriente supersónica homogénea que se mueve con velocidad constante $\mathbf{u}$, cuya dirección se toma como eje x. El vector $\mathbf{k}$ se considera que está comprendido dentro del plano xy y sus componentes están relacionados por la expresión

$$(u^2 - c^2)k_x^2 = c^2k_y^2, \tag{67.6}$$

que se obtiene elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (67.5). Para determinar la forma de los rayos utilizaremos las ecuaciones de la acústica geométrica (66.4), de acuerdo con las cuales $\dot{x} = \partial\omega/\partial k_x$, $\dot{y} = \partial\omega/\partial k_y$. Dividiendo entre sí ambas ecuaciones, tenemos $dy/dx = (\partial\omega/\partial k_y)/(\partial\omega/\partial k_x)$. Sin embargo, esta relación es, según la regla de derivación que se aplica a las funciones implícitas, exactamente la derivada $-\partial k_x/\partial k_y$ tomada a una frecuencia constante (cero en este caso). Así pues, la ecuación que da la forma de los rayos a partir de la relación conocida entre k_x y k_y es

$$dy/dx = -\partial k_x/\partial k_y. \tag{67.7}$$

Sustituyendo (67.6), obtenemos

$$dy/dx = \pm c/\sqrt{(u^2 - c^2)}.$$

En el caso de u constante esta ecuación representa dos líneas rectas que cortan el eje x formando ángulos $\pm\,\alpha$, en donde $\operatorname{sen}\alpha = c/u$.

Volveremos a un estudio detallado de estos rayos en la dinámica de los gases, en donde son muy importantes; ver, en particular, §§ 79, 96 y 109.

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir una ecuación que exprese la forma de los rayos sonoros que se propagan en un medio homogéneo en movimiento estacionario con una distribución de velocidades $\mathbf{u}(x, y, z)$, cuando $u \ll c$ en todo punto.†

Solución. Sustituyendo (67.1) en (66.4) obtenemos las ecuaciones de propagación de los rayos en la forma

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u} - \mathbf{k}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}.$$

Utilizando estas ecuaciones y además

$$\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t \equiv \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u} \approx (c/k)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u},$$

podemos calcular la derivada $\mathrm{d}(k\mathbf{v})/\mathrm{d}t$, reteniendo únicamente los términos hasta el primer orden en $\mathbf{u}$. El resultado es $\mathrm{d}(k\mathbf{v})/\mathrm{d}t = -kv\,\mathbf{n}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$, en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{v}$. Pero $\mathrm{d}(k\mathbf{v})/\mathrm{d}t = \mathbf{n}\mathrm{d}(kv)/\mathrm{d}t + kv\,\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}t$. Puesto que $\mathbf{n}$ y $\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}t$ son perpendiculares (debido a que $\mathbf{n}^2 = 1$, y, por tanto, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$), se deduce de las ecuaciones anteriores que $\mathbf{n} = -\mathbf{n}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. Introduciendo el elemento de longitud a lo largo del rayo $\mathrm{d}l = c\,\mathrm{d}t$, podemos escribir finalmente

$$\mathrm{d}\mathbf{n}/\mathrm{d}l = -\mathbf{n}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{u}/c. \tag{1}$$

Esta ecuación determina la forma de los rayos; $\mathbf{n}$ es un vector tangencial unidad (que no tiene por qué tener la misma dirección que $\mathbf{k}$).

Problema 2. Determinar la forma de los rayos sonoros en un medio móvil con una distribución de velocidades $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$.

Solución. Desarrollando la ecuación (1), problema 1, encontramos $\mathrm{d}n_x/\mathrm{d}l = (n_z/c)\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}n_y/\mathrm{d}l = 0$; no es necesario escribir la ecuación para n_z, puesto que $\mathbf{n}^2 = 1$. La segunda ecuación da $n_y = \text{constante} \equiv n_{y,0}$. En la primera ecuación escribiremos $n_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}l$, y luego tendremos por integración $n_x = n_{x,0} + u(z)/c$. Estas fórmulas dan la solución buscada.

Admitamos que la velocidad u es cero para $z = 0$ y que aumenta hacia arriba ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}z > 0$). Si el sonido se propaga «contra el viento» ($n_x < 0$), su trayectoria se curva hacia arriba; si se propaga «con el viento» ($n_x > 0$), su trayectoria se curva hacia abajo. En este último caso un rayo que sale del punto $z = 0$ formando un ángulo pequeño con el eje x (es decir, con $n_{x,0}$ próximo a la unidad) se eleva únicamente hasta una altura finita $z = z_{\max}$, que puede calcularse del modo siguiente. En la altura $z_{\max}$ el rayo es horizontal, es decir, $n_z = 0$. De aquí tenemos

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x,0}^2 + n_{y,0}^2 + 2n_{x,0}u/c = 1,$$

de modo que $2n_{x,0}u(z_{\max})/c = n_{z,0}^2$, de aquí que podamos determinar $z_{\max}$ a partir de la función dada $u(z)$ y la dirección inicial $\mathbf{n}_0$ del rayo.

† Se supone que la velocidad $\mathbf{u}$ varía sólo en distancias grandes en comparación con la longitud de onda del sonido.

Problema 3. Obtener la expresión correspondinente al principio de Fermat para los rayos sonoros en un medio con movimiento estacionario.

Solución. El principio de Fermat establece que la integral

$$\oint \mathbf{k}\cdot d\mathbf{l},$$

tomada a lo largo de un rayo entre dos puntos dados es un mínimo; se supone que $\mathbf{k}$ se expresa como una función de la frecuencia ω y de la dirección $\mathbf{n}$ del rayo.† Puede encontrarse esta función eliminando v y k a partir de las relaciones $\omega = ck + \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}$ y $v\mathbf{n} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}$. El principio de Fermat toma entonces la forma

$$\delta \oint \{\sqrt{[(c^2-u^2)dl^2+(\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l})^2]}-\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}\}/(c^2-u^2) = 0.$$

En un medio en reposo, esta integral se reduce a la normal, $\oint dl/c$.

§ 68. Vibraciones características

Hasta ahora hemos estudiado únicamente el movimiento oscilatorio en un medio infinito, y hemos visto, en particular, que en dicho medio pueden propagarse ondas de frecuencia cualquiera.

El caso es muy distinto cuando consideramos un fluido dentro de un recipiente de dimensiones finitas. Las propias ecuaciones del movimiento (ecuaciones de onda) resultan invariables, como es natural, pero ahora deben suplementarse mediante condiciones límites que han de satisfacerse en las paredes macizas o en la superficie libre del fluido. Consideraremos ahora únicamente lo que se denomina *vibraciones libres*, es decir, aquéllas que se producen en ausencia de fuerzas externas variables. Las vibraciones que se producen como resultado de fuerzas externas se denominan *vibraciones forzadas*.

Las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido finito no tienen soluciones que satisfagan las condiciones límites apropiadas para todas las frecuencias. Dichas soluciones existen únicamente para una serie de frecuencias definidas ω. En otras palabras, en un medio de volumen finito, solamente pueden producirse vibraciones con determinadas frecuencias. Éstas se denominan *frecuencias características* del fluido en el recipiente de que se trate.

Los valores reales de las frecuencias características dependen del tamaño y de la forma del recipiente. En un caso cualquiera determinado existe un número infinito de frecuencias características. Para hallarlas es necesario examinar las ecuaciones del movimiento con las condiciones límites apropiadas.

El orden de magnitud de la primera frecuencia característica (es decir, la más pequeña) puede obtenerse fácilmente a partir de consideraciones

† Ver *Teoría clásica de los campos*, § 71. Editorial Reverté, Barcelona.

dimensionales. El único parámetro que tienen las dimensiones de longitud y que aparece en el problema es la dimensión lineal l del cuerpo. De aquí que resulte claro que la longitud de onda λ_1 correspondiente a la primera frecuencia característica debe ser del orden de l y el propio orden de magnitud de la frecuencia ω_1 se obtiene dividiendo la velocidad del sonido por la longitud de onda. Así pues,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim c/l. \tag{68.1}$$

Comprobaremos la naturaleza del movimiento en las vibraciones características. Si buscamos una solución de la ecuación de onda para el potencial de velocidades (por ejemplo) que sea periódica en el tiempo, de la forma $\phi = \phi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$, entonces tenemos para ϕ_0 la ecuación

$$\triangle\phi_0 + (\omega^2/c^2)\phi_0 = 0. \tag{68.2}$$

En un medio infinito, en donde no necesitan aplicarse las condiciones límites, esta ecuación tiene soluciones a la vez reales y complejas. En particular, tiene una solución proporcional a $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, que da un potencial de velocidades de la forma

$$\phi = \text{constante} \times \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)].$$

Dicha solución representa una onda que se propaga con una velocidad definida —*onda móvil.*

Sin embargo, en el caso de un medio de volumen finito no pueden existir, en general, soluciones complejas. Esto puede verse del modo siguiente. La ecuación satisfecha por ϕ_0 es real, y las condiciones límites son también reales. De aquí que si $\phi_0(x, y, z)$ es una solución de las ecuaciones del movimiento, la función conjugada compleja ϕ_0^* es también una solución. Sin embargo, puesto que la solución de las ecuaciones para condiciones límites determinadas es única† en general, aparte de un factor constante, debemos tener $\phi_0^* = \text{constante} \times \phi_0$, en donde la constante es compleja y su módulo es evidentemente la unidad. Así pues, ϕ_0 debe tener la forma $\phi_0 = f(x, y, z)e^{-i\alpha}$, siendo reales la función f y la constante α. El potencial ϕ tiene así la forma (tomando la parte real de $\phi_0 e^{-i\omega t}$)

$$\phi = f(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha), \tag{68.3}$$

es decir, es el producto de una cierta función de las coordenadas por una función periódica simple del tiempo.

Esta solución tiene propiedades totalmente diferentes de las correspondientes a una onda móvil. En esta última, en donde $\phi = \text{constante} \times \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \alpha)$, la fase $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \alpha$ de las oscilaciones en puntos diferen-

† Esto puede que no sea cierto cuando el recipiente tenga una forma con elevada simetría (por ejemplo una esfera).

tes del espacio es distinta en un instante cualquiera determinado, excepto únicamente en aquellos puntos para los cuales $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ difiere en un múltiplo entero de la longitud de onda. En la onda representada por (68.3), todos los puntos están oscilando en la misma fase $\omega t + \alpha$ en un instante dado cualquiera. Evidentemente dicha onda no se «propaga»; se denomina entonces *onda estacionaria.* Así pues, las vibraciones características son ondas estacionarias.

Consideremos una onda de sonido plana estacionaria en la que todas las magnitudes son funciones exclusivas de una coordenada (por ejemplo, x) y del tiempo. Escribiendo la solución general de $\partial^2\phi_0/\partial x^2 + \omega^2\phi_0/c^2 = 0$ en la forma $\phi_0 = a\cos(\omega x/c + \beta)$, tenemos $\phi = a\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega x/c + \beta)$. Mediante una selección apropiada del origen de x y t, podemos hacer que α y β sean cero, de modo que

$$\phi = a\cos\omega t\cos\omega x/c. \tag{68.4}$$

Para la velocidad y presión de la onda tenemos

$$v = \partial\phi/\partial x = -(a\omega/c)\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega x/c;$$
$$p' = -\rho\,\partial\phi/\partial t = \rho\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega x/c.$$

En los puntos $x = 0$, $\pi c/\omega$, $2\pi c/\omega$, ..., que difieren entre sí una distancia $\pi c/\omega = \lambda/2$, la velocidad v es siempre cero; estos puntos se denominan *nodos* de la velocidad. Los puntos intermedios, entre ellos ($x = \pi c/2\omega$, $3\pi c/2\omega$, ...), son aquellos en los que la amplitud de las variaciones respecto al tiempo de la velocidad es más alta. Estos puntos se denominan *antinodos* o *vientres.* La presión p' evidentemente tiene nodos y vientres en posiciones inversas. Así pues, en una onda plana estacionaria los nodos de la presión son los vientres de la velocidad y *viceversa.*

Un caso interesante de vibraciones características es el de las vibraciones de un gas en un recipiente que posee una pequeña abertura (un *resonador*). En un recipiente cerrado la frecuencia característica más pequeña es, como sabemos, del orden de c/l, siendo l la dimensión lineal del recipiente. Sin embargo, cuando existe una pequeña abertura, aparecen nuevas vibraciones características de unas frecuencias considerablemente menores. Estas vibraciones se deben al hecho de que, si existe una diferencia de presión entre el gas del interior del recipiente y el gas existente en el exterior, esta diferencia puede igualarse bien entrando o saliendo gas. Así pues, aparecen oscilaciones en las que interviene un intercambio de gas entre el resonador y el medio exterior. Como la abertura es pequeña, este intercambio tiene lugar lentamente y, por tanto, el período de las oscilaciones es grande, siendo en correspondencia pequeñas las frecuencias (ver problema 2). Las frecuencias de las vibraciones ordinarias que se producen en un recipiente cerrado son prácticamente invariables, aunque exista una pequeña abertura.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar las frecuencias características de las ondas sonoras de un fluido contenido en un recipiente de forma ortoédrica.

Solución. Busquemos una solución de la ecuación (68.2) de la forma

$$\phi_0 = \text{constante} \times \cos qx \cos ry \cos sz,$$

en donde $q^2 + r^2 + s^2 = \omega^2/c^2$. En las paredes del recipiente tenemos las condiciones $v_x = \partial\phi/\partial x = 0$ para $x = 0$ y a, $\partial\phi/\partial y = 0$ para $y = 0$ y b, $\partial\phi/\partial z = 0$ para $z = 0$ y c, siendo a, b, c las aristas del ortoedro. De aquí se encuentra que $q = m\pi/a$, $r = n\pi/b$, $s = p\pi/c$, siendo m, n y p números enteros cualesquiera. Así pues, las frecuencias características son

$$\omega^2 = c^2\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2 + p^2/c^2).$$

Problema 2. Un tubo estrecho de área de sección recta S y de longitud l está fijo en la abertura de un resonador. Determinar la frecuencia característica.

Solución. Como el tubo es estrecho, al considerar las oscilaciones acompañadas por el movimiento del gas hacia dentro y hacia fuera del resonador, podemos suponer que únicamente el gas en el tubo tiene una velocidad apreciable, mientras que el gas en el recipiente está casi en reposo. La masa del gas dentro del tubo es $S\rho l$, y la fuerza ejercida sobre la misma es $S(p_0 - p)$, en donde p y p_0 son las presiones del gas en el interior y en el exterior del resonador, respectivamente. De aquí que debamos tener $S\rho l\dot{v} = S(p - p_0)$, en donde v es la velocidad del gas en el tubo. La derivada temporal de la presión viene dada por $p = c^2\rho$, y la disminución por unidad de tiempo de la densidad del gas dentro del resonador ($-\dot{\rho}$) puede suponerse igual a la masa del gas que sale del resonador por unidad de tiempo ($S\rho v$) dividida por el volumen V del mismo. Así pues, tenemos $\dot{p} = -c^2 S\rho v/V$, de donde

$$\ddot{p} = -c^2 S\rho\dot{v}/V = -c^2 S(p - p_0)/lV.$$

Esta ecuación da $p - p_0 = \text{constante} \times \cos \omega_0 t$, en donde la frecuencia característica $\omega_0 = c\sqrt{(S/lV)}$. Este valor es pequeño en comparación con c/L (siendo L la dimensión lineal del recipiente) y, por tanto, la longitud de onda es grande en comparación con L.

Al resolver este problema hemos supuesto que la amplitud lineal de las oscilaciones del gas en el tubo es pequeña en comparación con su longitud l. Si esto no fuese así, las oscilaciones vendrían acompañadas por el flujo de una fracción considerable del gas en el tubo y sería inaplicable la ecuación lineal del movimiento utilizada anteriormente.

§ 69. Ondas esféricas

Consideremos una onda sonora en la que la distribución de la densidad, velocidad, etc., depende únicamente de la distancia a un punto determinado, es decir, tiene una simetría esférica. Dicha onda se denomina *onda esférica.*

Determinemos la solución general de la ecuación de onda que representa una onda esférica. Tomemos la ecuación de onda para el potencial de velocidad: $\triangle\phi - (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0$. Como ϕ es una función únicamente de la distancia r desde el centro y del tiempo t, tenemos, utilizando la expresión para la laplaciana en coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right). \tag{69.1}$$

Busquemos una solución de la forma $\phi = f(r, t)/r$. Sustituyéndola, tenemos, después de un cálculo simple, la ecuación siguiente para f: $\partial^2 f/\partial t^2 = c^2 \partial^2 f/\partial r^2$. Ésta es precisamente la ecuación de onda monodimensional ordinaria con el radio r como coordenada. La solución de esta ecuación es, como sabemos, de la forma $f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r)$, siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. La solución general de la ecuación (69.1) tiene la forma

$$\phi = \frac{f_1(ct-r)}{r} + \frac{f_2(ct+r)}{r}. \tag{69.2}$$

El primer término es una onda hacia fuera que se propaga desde el origen en todas las direcciones. El segundo, por el contrario, es una onda que va hacia el centro. A diferencia de una onda plana cuya amplitud permanece constante, una onda esférica tiene una amplitud que disminuye inversamente con la distancia al centro. La intensidad de la onda viene dada por el cuadrado de la amplitud y disminuye de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como ha de ser, puesto que el flujo de energía total de la onda se distribuye sobre una superficie cuya área aumenta proporcionalmente a r^2.

Las partes variables de la presión y de la densidad están relacionadas con el potencial por $p' = -\rho \partial \phi/\partial t$, $\rho' = -(\rho/c^2)\partial\phi/\partial t$, y su distribución está determinada por fórmulas, de la misma manera que (60.2). Sin embargo, la distribución de velocidades (radiales) que viene dada por el gradiente del potencial, tiene la forma

$$v = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct-r)+f_2(ct+r)}{r}\right\}. \tag{69.3}$$

Si no existe ninguna fuente de sonido en el origen, el potencial (69.2) debe permanecer finito cuando $r = 0$. Para que esto sea así, debemos tener $f_1(ct) = -f_2(ct)$, es decir, ϕ tiene la forma

$$\phi = \frac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r} \tag{69.4}$$

(onda esférica estacionaria). Si, por otra parte, no existe ningún foco en el origen, el potencial de la onda que emerge del mismo es $\phi = f(ct - r)/r$; no es necesario que permanezca finita en $r = 0$, puesto que la solución es válida únicamente para la región exterior al foco.

Una onda esférica estacionaria monocromática tiene la forma

$$\phi = Ae^{-i\omega t}\frac{\operatorname{sen} kr}{r}, \tag{69.5}$$

en donde $k = \omega/c$. Una onda esférica monocromática emitida hacia fuera viene dada por

$$\phi = Ae^{i(kr-\omega t)}/r. \tag{69.6}$$

Es interesante señalar que esta expresión satisface la ecuación diferencial

$$\triangle\phi + k^2\phi = -4\pi A e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \tag{69.7}$$

en donde en el segundo miembro tenemos la función delta $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Efectivamente, $\delta(\mathbf{r}) = 0$ en todos los puntos, excepto en el origen, y volvemos a la ecuación homogénea (69.1); e integrando (69.7) en todo el volumen de una esfera pequeña en la que se incluye el origen (por tanto, la expresión (69.6) se reduce a $Ae^{-i\omega t}/r$), obtenemos $-4\pi Ae^{-i\omega t}$ en cada lado.

Consideremos una onda esférica saliente que ocupa una corteza esférica, fuera de la cual el medio está en reposo o muy próximo al reposo; dicha onda puede originarse de un foco que emite durante un intervalo finito de tiempo únicamente o bien de una cierta región en donde existe una perturbación sonora (ver el final del § 71 y § 73, problema 4). Antes de que la onda llegue a un punto determinado, el potencial es $\phi \equiv 0$. Después de que ha pasado la onda, el movimiento debe ir amortiguándose; esto significa que ϕ debe ser constante. Sin embargo, en una onda esférica saliente el potencial es una función de la forma $\phi = f(ct - r)/r$; dicha función puede tender a una constante sólo si la función f es idénticamente nula. Así pues, el potencial debe ser cero antes y después del paso de la onda.† A partir de esto podemos obtener una conclusión importante respecto a la distribución de condensaciones y rarefacciones en una onda esférica.

La variación de presión en la onda está relacionada con el potencial por $p' = -\rho\partial\phi/\partial t$. A partir de lo dicho anteriormente, resulta claro que, si integramos p' respecto a todo tiempo para un r determinado, el resultado es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'\,dt = 0. \tag{69.8}$$

Esto significa que, cuando la onda esférica pasa a través de un punto determinado, se observarán tanto condensaciones ($p' > 0$) como rarefacciones ($p' < 0$) en dicho punto. En este aspecto una onda esférica es notablemente distinta de una onda plana que puede componerse únicamente de condensaciones o de rarefacciones.

Se observará un esquema semejante si consideramos el modo de variación de p' con la distancia en un instante dado; en lugar de la integral (69.8), consideraremos ahora otra integral que también se anula, a saber

$$\int_{0}^{\infty} rp'\,dr = 0. \tag{69.9}$$

† A diferencia de lo que ocurre en el caso de una onda plana, después de cuyo paso podemos tener ϕ = constante $\neq 0$.

PROBLEMAS

Problema 1. En el instante inicial, el gas en el interior de una esfera de radio a se comprime, de modo que $\rho' = \text{constante} \equiv \Delta$; fuera de esta esfera, $\rho' = 0$. La velocidad inicial es cero en todo el espacio. Determinar el movimiento subsiguiente.

Solución. Las condiciones iniciales en el potencial son $\phi = 0$ para $t = 0$ y $r < a$ o $r > a$; $\phi = F(r)$ para $t = 0$, en donde $F(r) = 0$ para $r > a$ y $F(r) = -c^2\Delta/\rho$ para $r < a$. Busquemos una solución de ϕ de la forma

$$\phi(r, t) = \frac{f(ct-r) - f(ct+r)}{r}.$$

A partir de las condiciones iniciales obtenemos $f(-r) - f(r) = 0$, $f'(-r) - f'(r) = rF(r)/c$. A partir de la primera ecuación tenemos $f'(-r) + f'(r) = 0$, que junto con la segunda ecuación da $f'(r) = -f'(-r) = -rF(r)/2c$. Finalmente, sustituyendo el valor de $F(r)$ hallamos las expresiones siguientes para la derivada $f'(\xi)$ y la propia función $f(\xi)$:

$$\text{para } |\xi| > a, \quad f'(\xi) = 0, \quad f(\xi) = 0;$$

$$\text{para } |\xi| < a, \quad f'(\xi) = c\xi\Delta/2\rho, \quad f(\xi) = c(\xi^2 - a^2)\Delta/4\rho,$$

que da la solución del problema. Si consideramos un punto en donde $r > a$, es decir, fuera de la región de compresión inicial, tenemos para la densidad

$$\text{para } t < (r-a)/c, \qquad \rho' = 0;$$

$$\text{para } (r-a)/c < t < (r+a)/c, \qquad \rho' = \tfrac{1}{2}(r-ct)\Delta/r;$$

$$\text{para } t > (r+a)/c, \qquad \rho' = 0.$$

La onda pasa el punto considerado durante un intervalo de tiempo $2a/c$; en otras palabras, la onda tiene la forma de una corteza esférica de espesor $2a$, que en el tiempo t está comprendida entre las esferas de radio $ct - a$ y $ct + a$. Dentro de esta corteza la densidad varía linealmente; en la parte exterior ($r > ct$), el gas está comprimido ($\rho' > 0$), mientras que en la parte interior ($r < ct$) está enrarecido ($\rho' < 0$).

Problema 2. Determinar las frecuencias características de las oscilaciones sonoras con simetría central en un recipiente esférico de radio a.

Solución. A partir de la condición límite $\partial\phi/\partial r = 0$ para $r = a$ [en donde ϕ viene dado por (69.5)], encontramos que $\operatorname{tg} ka = ka$, lo que determina las frecuencias características. La primera frecuencia (la más baja) es $\omega_1 = 4{,}49\, c/a$.

§ 70. Ondas cilíndricas

Consideremos ahora una onda en la cual la distribución de todas las magnitudes es homogénea en una dirección determinada (que tomaremos como eje z) y que tiene una simetría axial completa alrededor de esta dirección. Esta onda se denomina *onda cilíndrica*, y en ella se tiene $\phi = \phi(R, t)$, en donde R designa la distancia al eje z. Determinemos la forma general de la solución con simetría axial de la ecuación de onda. Esto puede hacerse partiendo de la solución con simetría general esférica (69.2). R está relacionado con r por $r^2 = R^2 + z^2$, de modo que ϕ, según viene dada por la fórmula

(69.2), depende de z cuando se dan R y t. Una función que depende de R y t únicamente y que sigue satisfaciendo la ecuación de onda, puede obtenerse integrando (69.2) para todo valor de z desde $-\infty$ hasta $+\infty$, o lo que es lo mismo, desde 0 a ∞. Podemos convertir la integración respecto a z en otra respecto a r. Puesto que $z = \sqrt{(r^2 - R^2)}$, $dz = r\,dr/\sqrt{(r^2 - R^2)}$. Cuando z varía desde 0 hasta ∞, r varía desde R a ∞. De aquí que encontremos que la solución general con simetría axial es

$$\phi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct-r)}{\sqrt{(r^2-R^2)}}dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct+r)}{\sqrt{(r^2-R^2)}}dr, \tag{70.1}$$

en donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias. El primer término es una onda cilíndrica que tiende a expansionarse y el segundo una que va hacia el interior.

Sustituyendo en estas integrales $ct \pm r = \xi$, podemos volver a escribir la fórmula (70.1) en la forma

$$\phi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{[(ct-\xi)^2-R^2]}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)d\xi}{\sqrt{[(\xi-ct)^2-R^2]}}. \tag{70.2}$$

Vemos que el valor del potencial en el instante t en la onda cilíndrica saliente está determinada por los valores de f_1 en los instantes que van desde $-\infty$ hasta $t - R/c$; análogamente los valores de f_2 que influyen en la onda que va hacia el interior son aquellos que corresponden a instantes desde $t + R/c$ hasta el infinito.

Como en el caso esférico, se obtienen ondas estacionarias cuando $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Puede demostrarse que una onda cilíndrica estacionaria se representa igualmente en la forma

$$\phi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{[R^2-(\xi-ct)^2]}}, \tag{70.3}$$

en donde $F(\xi)$ es otra función arbitraria.

Deduzcamos una expresión para el potencial en una onda cilíndrica monocromática. La ecuación de onda para el potencial $\phi(R, t)$ en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \phi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

En una onda monocromática $\phi = e^{-i\omega t}f(R)$, y tenemos para la función $f(R)$ la ecuación $f'' + f'/R + k^2 f = 0$. Esta es la ecuación de Bessel de orden cero. En una onda cilíndrica estacionaria, ϕ debe permanecer finito para $R = 0$; la solución apropiada es $J_0(kR)$, en donde J_0 es una función de Bessel de primera clase. Así pues, en el caso de una onda cilíndrica estacionaria,

$$\phi = Ae^{-i\omega}J_0(kR). \tag{70.4}$$

Para $R = 0$ la función J_0 tiende a la unidad, de modo que la amplitud tiende al valor límite finito A. A distancias R grandes, J_0 puede sustituirse por su expresión asintótica y ϕ toma entonces la forma

$$\phi = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(kR-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{(kR)}}e^{-i\omega t}. \tag{70.5}$$

La solución correspondiente a la onda móvil monocromática hacia fuera es

$$\phi = Ae^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kR), \tag{70.6}$$

en donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera clase, de orden cero. Esta función tiene una singularidad logarítmica para $R \to 0$:

$$\phi \cong (2iA/\pi)\log(kR)e^{-i\omega t}. \tag{70.7}$$

A distancias grandes tenemos la fórmula asintótica

$$\phi = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp[i(kR-\omega t-\frac{1}{4}\pi)]}{\sqrt{(kR)}}. \tag{70.8}$$

Vemos que la amplitud de la onda cilíndrica disminuye (a distancias grandes) de modo inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia respecto al eje y que la intensidad disminuye, por tanto, como $1/R$. Este resultado es evidente, puesto que el flujo de energía total se distribuye sobre una superficie cilíndrica cuya área aumenta proporcionalmente a R cuando se propaga la onda.

Una onda cilíndrica que sale hacia fuera difiere de otra onda esférica o plana en el aspecto importante de que tiene un frente hacia adelante, pero no hacia atrás: una vez que la perturbación sonora ha alcanzado un punto determinado, no cesa, sino que disminuye de modo comparativamente lento cuando $t \to \infty$. Supongamos que la función $f_1(\xi)$ en el primer término de (70.2) es distinta de cero únicamente en un determinado intervalo finito $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Entonces, en instantes tales que $ct > R + \xi_2$, tenemos

$$\phi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{[(ct-\xi)^2-R^2]}}.$$

Cuando $t \to \infty$, esta expresión tiende a cero como

$$\phi = \frac{1}{ct}\int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

es decir, inversamente al tiempo.

Así pues, el potencial en una onda cilíndrica que sale hacia fuera, debido a una fuente que actúa sola durante un tiempo finito, se anula, aunque lentamente, cuando $t \to \infty$. Esto significa que, como en el caso esférico, la

integral de p' respecto a todo instante es cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p' \, dt = 0. \tag{70.9}$$

De aquí que una onda cilíndrica, de modo igual a una onda esférica, debe incluir necesariamente tanto condensaciones como rarefacciones.

§ 71. Solución general de la ecuación de onda

Deduzcamos ahora una fórmula general que dé la solución de la ecuación de onda en un fluido infinito para unas condiciones iniciales cualesquiera, es decir, que da la distribución de velocidades y de presión dentro del fluido en un instante cualquiera en función de su distribución inicial.

Obtendremos primero algunas fórmulas auxiliares. Sea $\phi(x, y, z, t)$ y $\psi(x, y, z, t)$ dos soluciones cualquiera de la ecuación de onda que se anulan en el infinito. Consideremos la integral

$$I = \int (\phi\dot{\psi} - \psi\dot{\phi}) \, dV,$$

tomada respecto a todo el espacio y calculemos su derivada temporal. Puesto que ϕ y ψ satisface las ecuaciones $\triangle\phi - \ddot{\phi}/c^2 = 0$ y $\triangle\psi - \ddot{\psi}/c^2 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} dI/dt = \int (\phi\ddot{\psi} - \psi\ddot{\phi}) dV &= c^2 \int (\phi \triangle\psi - \psi \triangle\phi) dV \\ &= c^2 \int \operatorname{div}(\phi \, \mathbf{grad}\,\psi - \psi \, \mathbf{grad}\,\phi) dV. \end{aligned}$$

La última integral puede transformarse en una integral extendida a una superficie infinitamente alejada y, por tanto, es cero. Así pues, obtenemos la conclusión de que $dI/dt = 0$, es decir, I es independiente del tiempo:

$$\int (\phi\dot{\psi} - \psi\dot{\phi}) dV = \text{constante}. \tag{71.1}$$

A continuación, consideremos la siguiente solución particular de la ecuación de onda:

$$\psi = \delta[r - c(t_0 - t)]/r \tag{71.2}$$

(en donde r es la distancia desde un punto determinado O, t_0 es un instante definido y δ designa la función delta), y calculemos la integral de ψ respecto a todo el espacio. Tenemos.

$$\int \psi \, dV = \int_0^{\infty} \psi \cdot 4\pi r^2 \, dr = 4\pi \int_0^{\infty} r\delta[r - c(t_0 - t)] dr.$$

El argumento de la función delta es cero para $r = c(t_0 - t)$ (admitimos que $t_0 > t$). De aquí que, a partir de las propiedades de la función δ, resulta:

$$\int \psi \, dV = 4\pi c(t_0 - t). \tag{71.3}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos

$$\int \dot{\psi} dV = -4\pi c. \tag{71.4}$$

Sustituyamos ahora para ψ, en la integral (71.1), la función (71.2), y tomemos ϕ de modo que sea la solución general buscada de la ecuación de onda. De acuerdo con (71.1), I es una constante; utilizando este resultado, escribiremos a continuación las expresiones correspondientes a I en los instantes $t = 0$ y $t = t_0$, e igualaremos ambas. Para $t = t_0$ son las dos funciones ψ y ψ diferentes de cero únicamente para $r = 0$. De aquí que, al integrar, podemos poner $r = 0$ en ϕ y $\dot{\phi}$ (es decir, tomaremos sus valores en el punto O) y sacaremos fuera de la integral a ϕ y $\dot{\phi}$:

$$I = \phi(x, y, z, t_0) \int \dot{\psi} \, dV - \dot{\phi}(x, y, z, t_0) \int \psi \, dV,$$

en donde x, y, z son las coordenadas de O. De acuerdo con (71.3) y (71.4), el segundo término es cero para $t = t_0$ y el primer término nos da

$$I = -4\pi c \phi(x, y, z, t_0).$$

Calculemos ahora I para $t = 0$. Haciendo $\dot{\psi} = \partial\psi/\partial t = -\partial\psi/\partial t_0$ y designando por ϕ_0 el valor de la función ϕ para $t = 0$, tenemos

$$I = -\int \left(\phi_0 \frac{\partial \psi}{\partial t_0} + \dot{\phi}_0 \psi \right) dV = -\frac{\partial}{\partial t_0} \int \phi_0 \psi_{t=0} \, dV - \int \dot{\phi}_0 \psi_{t=0} \, dV.$$

Escribiremos el elemento de volumen como $dV = r^2 dr do$, en donde do es un elemento de ángulo sólido, y luego obtendremos por las propiedades de la función delta,

$$\int \phi_0 \psi_{t=0} \, dV = \int \phi_0 r \delta(r - ct_0) dr \, do = ct_0 \int \phi_{0, r=ct_0} do;$$

la integral $\dot{\phi}_0 \psi$ es semejante. Así pues,

$$I = -\frac{\partial}{\partial t_0} (ct_0 \int \phi_{0, r=ct_0} do) - ct_0 \int \dot{\phi}_{0, r=ct_0} do.$$

Finalmente, igualando ambas expresiones para I y omitiendo el sufijo cero en t_0, obtenemos

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (t \int \phi_{0, r=ct} do) + t \int \dot{\phi}_{0, r=ct} do \right\}. \tag{71.5}$$

Esta fórmula, denominada *fórmula de Poisson*, da la distribución espacial del potencial en un instante cualquiera en función de la distribución del potencial y de su derivada temporal (o, lo que es equivalente, en función

de la distribución de velocidades y de presión) en un instante inicial determinado. Vemos que el valor del potencial en el instante t está determinado por los valores de ϕ y $\dot{\phi}$ en el instante $t = 0$ en la superficie de una esfera centrada en O, de radio ct.

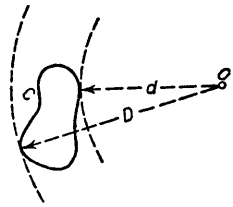

FIG. 34

Supongamos que, en el instante inicial, ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ son diferentes de cero únicamente en una región finita determinada del espacio, limitada por una superficie cerrada C (figura 34). Consideremos los valores de ϕ en instantes siguientes y en un punto determinado O. Estos valores se determinan mediante los valores de ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ a una distancia ct de O. Las esferas de radio ct pasan a través de la región dentro de la superficie C únicamente para $d/c \leqslant t \leqslant D/c$, en donde d y D son las distancias menor y mayor desde el punto O a la superficie C. En otros instantes, los integrandos dentro de (71.5) son nulos. Así pues, el movimiento en O empieza en un instante $t = d/c$ y cesa en el tiempo $t = D/c$. La onda que se propaga desde la región interior a C tiene un frente delantero y un frente trasero. El movimiento empieza cuando el frente delantero llega al punto en cuestión, mientras que las partículas que están en el frente trasero, y que estaban previamente oscilando, pasan al reposo.

PROBLEMA

Deducir la fórmula que da el potencial en función de las condiciones iniciales para una onda que depende sólo de dos coordenadas, x e y.

Solución. Un elemento de área de una esfera de radio ct puede escribirse $df = c^2t^2 do$, en donde do es un elemento de ángulo sólido. La proyección de df sobre el plano xy es $dx\,dy = df\sqrt{[(ct)^2 - \rho^2)]}/ct$, en donde ρ es la distancia del punto x, y al centro de la esfera. Comparando ambas expresiones podemos escribir $do = dx\,dy/ct\sqrt{[(ct)^2 - \rho^2]}$. Designando por x, y las coordenadas del punto en donde buscamos el valor de ϕ, y por ξ, η las cordenadas de un punto variable en la región de integración, podemos, por tanto, sustituir do en la fórmula general (71.5) por $d\xi\,d\eta/ct\sqrt{[(ct)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}$, duplicando la expresión resultante debido a que $dx\,dy$ es la proyección de dos elementos de

área en las caras opuestas del plano xy. Así pues,

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \frac{\phi_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{[(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}} + \\ + \frac{1}{2\pi c}\iint \frac{\phi_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{[(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}},$$

en donde la integración se extiende a una circunferencia centrada en O, de radio ct. Si ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ son nulas excepto en una región finita C en el plano xy (o más exactamente, excepto en una región cilíndrica con sus generatrices paralelas al eje z), las oscilaciones en el punto O (figura 34) empiezan en el tiempo $t = d/c$, siendo d la distancia mínima de O a un punto dentro de la región. Sin embargo, después de este tiempo, la circunferencia de radio $ct > d$ centrada en O encerrará siempre parte o la totalidad de la región C, y ϕ tenderá únicamente asintóticamente a cero. Así pues, a diferencia de las ondas tridimensionales, las ondas bidimensionales consideradas aquí tienen un frente delantero pero no un frente trasero (comparar con § 70).

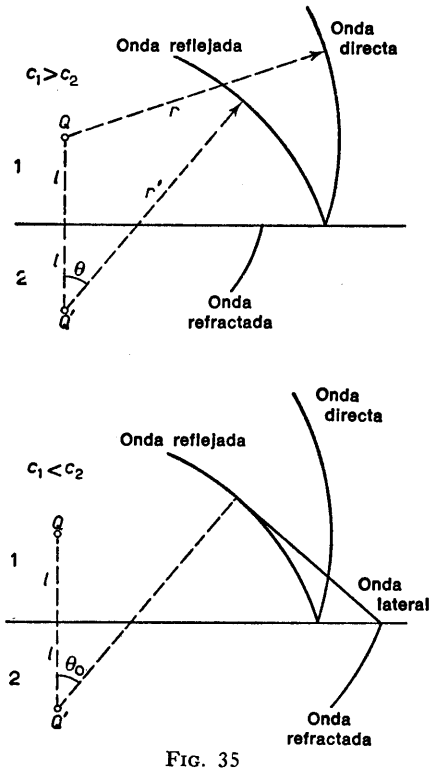

FIG. 35

§ 72. Onda lateral

La reflexión de una onda esférica en una superficie que separa dos medios tiene un interés particular, ya que puede ir acompañada por un fenómeno poco ordinario, que es la aparición de una *onda lateral.*

Sea Q (figura 35) la fuente o foco de la onda sonora esférica en el medio 1, a una distancia l de una superficie plana infinita que separa los medios 1 y 2. La distancia l es arbitraria y no necesita ser grande en comparación con la longitud de onda λ. Supongamos que las densidades de ambos medios son ρ_1, ρ_2 y que las velocidades del fluido en ellas son c_1, c_2. Supongamos primero que $c_1 > c_2$; entonces, a distancia grande de la fuente, en comparación con λ, el movimiento en el medio 1 será una superposición de dos ondas que van hacia fuera. Una de ella será una onda esférica emitida por la fuente (*onda directa*); su potencial es

$$\phi_1{}^0 = e^{ikr}/r, \tag{72.1}$$

en donde r es la distancia a la fuente, y la amplitud se toma arbitrariamente como la unidad. Por brevedad, omitiremos el factor $e^{-i\omega t}$ de todas las expresiones en la sección presente.

Las superficies de onda de la segunda onda (*reflejada*) son esferas centradas en Q', la imagen de la fuente Q en el plano de separación; este plano es el lugar geométrico de los puntos P que se alcanzan en un instante dado por los rayos que salen de Q simultáneamente y se reflejan en el plano de acuerdo con las leyes de la acústica geométrica (en la figura 36 se ha indicado el rayo QAP con ángulo de incidencia y reflexión θ). La amplitud de la onda reflejada disminuye inversamente con la distancia r' desde el punto Q' (que a veces se denomina *fuente* o *foco imaginario*), pero depende también del ángulo θ, como si cada rayo se reflejase con el coeficiente correspondiente a la reflexión de una onda plana con un ángulo de incidencia determinado θ. En otras palabras, a distancias grandes la onda reflejada viene dada por la fórmula

$$\phi_1{}' = \frac{e^{ikr'}}{r'}\left[\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1\sqrt{(c_1{}^2 - c_2{}^2\operatorname{sen}^2\theta)}}{\rho_2 c_2 + \rho_1\sqrt{(c_1{}^2 - c_2{}^2\operatorname{sen}^2\theta)}}\right]; \tag{72.2}$$

ver fórmula (65.4) para el coeficiente de reflexión de una onda plana. Esta fórmula, que es evidentemente válida para valores grandes de r', puede deducirse rigurosamente por el método indicado a continuación.

Un caso más interesante es aquél en el que $c_1 < c_2$. Aquí, además de la onda reflejada ordinaria (72.2), aparece otra onda en el primer medio. Las propiedades principales de esta onda pueden verse mediante las siguientes consideraciones elementales.

El rayo reflejado ordinario QAP (figura 36) obedece al principio de Fermat en el sentido de que es el trayecto más rápido de Q a P entre todos los

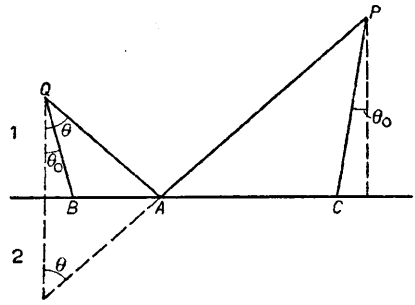

FIG. 36

trayectos que están comprendidos totalmente en el medio 1 y en el que interviene una sola reflexión. Sin embargo, cuando $c_1 < c_2$, el principio de Fermat se ve también satisfecho por otro trayecto, en el que el rayo incide sobre la frontera con el ángulo crítico de reflexión interna total θ_0 ($\operatorname{sen}\theta_0 = c_1/c_2$), luego se propaga en el medio 2 a lo largo del límite y, finalmente, vuelve al medio 1 con el ángulo θ_0. El trayecto es el *QBCP* de la figura 36 y es evidente que $\theta > \theta_0$. Es fácil ver que este trayecto también tiene la propiedad extremal: el tiempo empleado para recorrerlo es menor que para cualquier otro trayecto desde Q hasta P que esté comprendido parcialmente en el medio 2.

El lugar geométrico de los puntos P que son alcanzados en el mismo tiempo por rayos que dejan simultáneamente Q a lo largo del trayecto QB y luego vuelven al medio 1 en diversos puntos C, es evidentemente una superficie cónica, cuyas generatrices son perpendiculares a las líneas dibujadas desde el foco imaginario Q' formando un ángulo θ_0.

Así pues, si $c_1 < c_2$, junto con la onda reflejada ordinaria, que tiene un frente esférico, se propaga en el medio 1 otra onda que tiene un frente cónico extendiéndose desde el plano de separación (en donde encuentra al frente de onda refractada en el medio 2) hasta el punto en el que toca al frente esférico de la onda reflejada; esto se produce a lo largo de la línea de intersección con un cono de semiángulo θ_0 y eje QQ' (figura 35). Esta onda cónica se denomina *onda lateral.*

Es fácil de ver, mediante un cálculo simple, que el tiempo transcurrido a lo largo del trayecto *QBCP* (figura 36) es menor que el que se necesita para recorrer el trayecto *QAP* hasta el mismo punto *P*. Esto significa que una señal sonora procedente del foco Q alcanza a un observador situado en P, primero por la onda lateral y sólo después por la onda reflejada ordinaria.

Debe recordarse que la onda lateral es un efecto de la acústica ondulatoria, a pesar del hecho de que permite una interpretación simple como la

dada anteriormente en función del concepto de la acústica geométrica. Veremos a continuación que la amplitud de la onda lateral tiende a cero en el límite $\lambda \to 0$.

Realicemos ahora un cálculo cuantitativo. La propagación de una onda sonora monocromática procedente de un foco puntual está descrita por la ecuación (69.7):

$$\triangle\phi + k^2\phi = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}), \tag{72.3}$$

en donde $k = \omega/c$ y $\mathbf{l}$ es el radio vector del foco. Se escoge el coeficiente de la función delta, de modo que la onda directa tenga la forma (72.1). En lo que sigue tomaremos un sistema de coordenadas con el plano xy como plano de separación y el eje z a lo largo de QQ', siendo el primer medio aquél que tiene $z > 0$. En la superficie de separación la presión y la componente z de la velocidad, o (de modo equivalente) $\rho\phi$ y $\partial\phi/\partial z$, deben ser continuas.

Utilizando el método general de Fourier, obtenemos la solución en la forma

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\kappa(z)\exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y)]\,\mathrm{d}\kappa_x\,\mathrm{d}\kappa_y, \tag{72.4}$$

en donde

$$\phi_\kappa(z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\exp[-i(\kappa_x x + \kappa_y y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{72.5}$$

A partir de la simetría relativa al plano xy es evidente que ϕ_κ puede depender únicamente de la magnitud $|\kappa| = \sqrt{(\kappa_x^2 + \kappa_y^2)}$. Utilizando la bien conocida fórmula

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(u\,\mathrm{sen}\phi)\mathrm{d}\phi,$$

podemos escribir (72.4) como

$$\phi = 2\pi\int_0^{\infty} \phi_\kappa(z)J_0(\kappa R)\kappa\,\mathrm{d}\kappa, \tag{72.6}$$

en donde $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es la coordenada cilíndrica (la distancia al eje z). Para los cálculos siguientes es conveniente transformar esta fórmula en otra en el que la integral se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$, expresando el integrando en términos de la función de Hankel $H_0^{(1)}(u)$. Esta última tiene una singularidad logarítmica en el punto $u = 0$; si convenimos en ir desde la parte positiva real de u hasta la negativa, pasando por encima del punto $u = 0$ en el plano u complejo, entonces $H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u)$. Utilizando esta relación, podemos volver a escribir (72.6) como

$$\phi = \pi\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\kappa(z)H_0^{(1)}(\kappa R)\kappa\,\mathrm{d}\kappa. \tag{72.7}$$

A partir de la ecuación (72.3) encontramos para la función ϕ_κ la ecuación

$$\frac{d^2\phi_\kappa}{dz^2} - \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\kappa = -\frac{1}{\pi}\delta(z-l). \tag{72.8}$$

Puede eliminarse la función delta en el segundo miembro de la ecuación im poniendo a la función $\phi_\kappa(z)$ (que satisface la ecuación homogénea) las cor diciones límites en $z = l$:

$$\begin{aligned} [\phi_\kappa(z)]_{l+} - [\phi_\kappa(z)]_{l-} &= 0, \\ [d\phi_\kappa/dz]_{l+} - [d\phi_\kappa/dz]_{l-} &= -1/\pi. \end{aligned} \tag{72.9}$$

Las condiciones límites en $z = 0$ son

$$\begin{aligned} [\rho\phi_\kappa]_{0+} - [\rho\phi_\kappa]_{0-} &= 0, \\ [d\phi_\kappa/dz]_{0+} - [d\phi_\kappa/dz]_{0-} &= 0. \end{aligned} \tag{72.10}$$

Busquemos una solución en la forma

$$\left.\begin{aligned} \phi_\kappa &= Ae^{-\mu_1 z} && \text{para } z > l, \\ \phi_\kappa &= Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_1 z} && \text{para } l > z > 0, \\ \phi_\kappa &= De^{\mu_1 z} && \text{para } 0 > z. \end{aligned}\right\} \tag{72.11}$$

Aquí

$$\mu_1^2 = \kappa^2 - k_1^2, \quad \mu_2^2 = \kappa^2 - k_2^2 \ (k_1 = \omega/c_1, \ k_2 = \omega/c_2),$$

y debemos poner

$$\begin{aligned} \mu &= +\sqrt{(\kappa^2 - k^2)} && \text{para } \kappa > k, \\ \mu &= -i\sqrt{(k^2 - \kappa^2)} && \text{para } \kappa < k. \end{aligned} \tag{72.12}$$

La primera de estas expresiones es necesaria, de modo que ϕ no deber aumentar sin límite cuando $z \to \infty$, y la segunda para que ϕ represente un onda saliente. Las condiciones (72.9) y (72.10) dan cuatro ecuaciones qu determinan los coeficientes A, B, C y D. Un cálculo simple da

$$\begin{aligned} B &= C\frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, & C &= \frac{e^{-l\mu_1}}{2\pi\mu_1}, \\ D &= C\frac{2\rho_1\mu_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, & A &= B + Ce^{2l\mu_1}. \end{aligned} \tag{72.13}$$

Para $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = c_1$ (es decir, cuando todo el espacio está ocupado por u solo medio), B es cero y $A = Ce^{2l\mu_1}$; el término correspondiente en ϕ es ev dentemente la onda directa (72.1), y la onda reflejada en la que estamc interesados es, por tanto,

$$\phi_1' = \pi \int_{-\infty}^{\infty} B(\kappa) e^{-z\mu_1} H_0^{(1)}(\kappa R)\kappa \, d\kappa. \tag{72.14}$$

En esta expresión ha de especificarse el trayecto de integración. Pasa por encima del punto sigular $\kappa = 0$ (en el plano complejo κ), como ya hemos mencionado. El integrando tiene también puntos singulares (puntos ramificados) en $\kappa = \pm k_1, \pm k_2$, en donde μ_1 y μ_2 se anulan. De acuerdo con las condiciones (72.10), el contorno debe pasar por debajo de los puntos $+k_1$, $+k_2$, y por encima de los puntos $-k_1$, $-k_2$.

Analicemos la expresión resultante para distancias grandes respecto al foco. Sustituyendo la función de Hankel por su expresión asintótica bien conocida, obtenemos

$$\phi_1' = \int_C \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1)} \sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi R}} \exp[-(z+l)\mu_1 + i\kappa R]\, d\kappa. \qquad (72.15)$$

La figura 37 muestra el trayecto de integración C para el caso $c_1 > c_2$. Puede calcularse la integral mediante el método del punto de silla. El exponente $i[(z+l)\sqrt{(k_1^2 - \kappa^2)} + \kappa R]$ tiene un extremo en el punto en el que

$$\kappa/\sqrt{(k_1^2 - \kappa^2)} = R/(z+l) = r' \operatorname{sen}\theta / r' \cos\theta = \operatorname{tg}\theta,$$

es decir, $\kappa = k_1 \operatorname{sen}\theta$, en donde θ es el ángulo de incidencia (ver figura 35). Por el hecho de variar el trayecto de integración C' que pasa por este punto formando un ángulo de $\pi/4$ con eje de abcisas, obtenemos la fórmula (72.2).

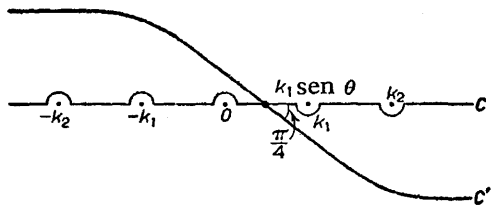

FIG. 37

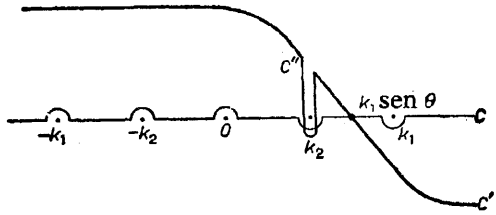

FIG. 38

En el caso $c_1 < c_2$ (es decir, $k_1 > k_2$), el punto $\kappa = k_1 \operatorname{sen}\theta$ cae entre k_2 y k_1 si $\operatorname{sen}\theta > k_2/k_1 = c_1/c_2 = \operatorname{sen}\theta_0$, es decir, si $\theta > \theta_0$ (figura 38). En este caso el contorno C' debe formar un lazo alrededor del punto k_2 y tenemos, además de la onda reflejada ordinaria (72.2), una onda ϕ_1'' dada por la integral (72.15) tomada alrededor del lazo, que denominaremos C''. Esta es la

onda lateral. La integral se calcula fácilmente si el punto $k_1 \operatorname{sen}\theta$ no está próximo al k_2, es decir, si el ángulo θ no está próximo al ángulo de reflexión interna θ_0.†

Cerca del punto $\kappa = k_2$, μ_2 es pequeño; desarrollaremos el coeficiente del exponencial en el integrando de (72.15) en potencias de μ_2. El término de orden cero no tiene ninguna singularidad en $\kappa = k_2$, y su integral alrededor de C'' es cero. De aquí que tengamos

$$\phi_1'' = -\int_{C'} \frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2}\sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi r}}\exp[-(z+l)\mu_1 + i\kappa R]\,\mathrm{d}\kappa. \qquad (72.16)$$

Desarrollando el exponente en potencias de $\kappa - k_2$ e integrando alrededor del lazo C'', tenemos, después de un cálculo sencillo, la expresión siguiente para el potencial de la onda lateral:

$$\phi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp[ik_1 r' \cos(\theta_0 - \theta)]}{r'^2\rho_2 k_1^2\sqrt{[\cos\theta_0 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^3(\theta_0 - \theta)]}}. \qquad (72.17)$$

De acuerdo con los resultados anteriores, las superficies de ondas son los conos $r'\cos(\theta - \theta_0) = R\operatorname{sen}\theta_0 + (z + l)\cos\theta_0 = \text{constante}$. En una dirección dada la amplitud de la onda disminuye de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r'. Vemos también que esta onda desaparece en el límite $\lambda \mapsto 0$. Para $\theta \to \theta_0$, la expresión (72.17) deja de ser válida; de hecho, la amplitud de la onda lateral en este intervalo de θ disminuye con la distancia proporcionalmente a $r'^{-5/4}$.

§ 73. Emisión del sonido

Un cuerpo que oscila en un fluido produce una compresión y rarefacción periódicas del fluido cerca de él, y, por tanto, produce ondas sonoras. La energía transportada por estas ondas la suministra la energía cinética del cuerpo. Así pues, podemos hablar de emisión del sonido mediante cuerpos oscilantes.††

† Para una investigación de la onda lateral para todo valor de θ, ver L. Brekhovskikh, *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, **18**, 455, 1948. Este artículo da también el término siguiente del desarrollo de la onda reflejada ordinaria en potencias de λ/R. Podemos mencionar aquí que, en el caso de ángulos próximos a θ_0 (en el caso $c_1 < c_2$), el cociente entre el término de corrección y el término principal disminuye con la distancia proporcionalmente a $(\lambda/R)^{1/4}$ y no a λ/R.

†† En lo que sigue supondremos siempre que la velocidad u del cuerpo oscilante es pequeña en comparación con la velocidad del sonido. Como $u \sim a\omega$, siendo a la amplitud lineal de las oscilaciones, esto significa que $a \ll \lambda$.

La amplitud de las oscilaciones se supone, en general, pequeña en comparación también con las dimensiones del cuerpo, puesto que en otro caso no tendríamos flujo potencial cerca del cuerpo (ver § 9). Esta condición es innecesaria únicamente en el caso de las pulsaciones puras, cuando la solución (73.7), utilizada más adelante, es realmente una deducción directa de la ecuación de continuidad.

En el caso general de un cuerpo de forma arbitraria oscilando de una manera cualquiera, el problema de la emisión de ondas sonoras debe resolverse del modo siguiente. Tomemos como magnitud fundamental el potencial de velocidades ϕ; satisface la ecuación de onda

$$\triangle\phi - (1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2 = 0. \tag{73.1}$$

En la superficie del cuerpo, la componente normal de la velocidad del fluido debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad **u** del cuerpo:

$$\partial\phi/\partial n = u_n. \tag{73.2}$$

A distancias grandes del cuerpo, la onda puede transformarse en una onda esférica saliente. La solución de la ecuación (73.1) que satisface estas condiciones límites y la condición en el infinito determina la onda sonora emitida por el cuerpo.

Consideremos las dos condiciones límites con más detalle. Supongamos primero que la frecuencia de oscilación del cuerpo es tan grande que la longitud de la onda emitida es muy pequeña en comparación con la dimensión l del cuerpo:

$$\lambda \ll l. \tag{73.3}$$

En este caso podemos dividir la superficie del cuerpo en porciones cuyas dimensiones sean tan pequeñas que puedan considerarse aproximadamente como planas, siendo, sin embargo, todavía grandes en comparación con la longitud de onda. Entonces podemos suponer que cada una de dichas porciones emite una onda plana en la cual la velocidad del fluido es simplemente la componente normal u_n de la velocidad de dicha porción de la superficie. Pero el flujo de energía media en una onda plana es (ver § 64) $\overline{c\rho v^2}$, en donde v es la velocidad del fluido en la onda. Haciendo $v = u_n$ e integrando respecto a la superficie completa del cuerpo, se obtiene el resultado de que la energía media emitida por unidad de tiempo por el cuerpo en forma de ondas sonoras, es decir, la intensidad total del sonido emitido, es

$$I = c\rho \oint \overline{u_n^2}\, df. \tag{73.4}$$

Esta expresión es independiente de la frencuencia de las oscilaciones (para una amplitud de velocidad determinada).

Consideremos ahora el caso límite opuesto en el que longitud de la onda emitida es grande en comparación con la dimensión del cuerpo:

$$\lambda \gg l. \tag{73.5}$$

Podemos entonces despreciar el término $(1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2$, en la ecuación general (73.1), cerca del cuerpo (a distancias pequeñas en comparación con la longitud de onda). En efecto, este término es del orden de $\omega^2\phi/c^2 \sim \phi/\lambda^2$, mientras que las segundas derivadas respecto a las coordenadas en esta región son del orden de ϕ/l^2.

Así pues, el flujo cerca del cuerpo satisface la ecuación de Laplace, $\triangle\phi = 0$. Esta es la ecuación correspondiente al flujo potencial de un fluido incompresible. En consecuencia, el fluido próximo al cuerpo se mueve como si fuese incompresible. Las propias ondas sonoras, es decir, las ondas de compresión y rarefacción se presentan sólo a distancias grandes del cuerpo.

A distancias del orden de la dimensión del cuerpo y menores, la ecuación buscada de la solución $\triangle\phi = 0$ no puede escribirse de una forma general, sino que depende de la forma real del cuerpo oscilante. A distancias grandes en comparación con l (aunque pequeñas en comparación con λ, de modo que la ecuación $\triangle\phi = 0$ siga siendo válida) podemos encontrar, sin embargo, una forma general de la solución, utilizando el hecho de que ϕ debe disminuir al aumentar la distancia. Hemos estudiado dichas soluciones de la ecuación de Laplace en § 11. Como allí, escribamos la forma general de la solución como

$$\phi = -(a/r) + \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}(1/r), \tag{73.6}$$

en donde r es la distancia desde un origen situado en un punto cualquiera en el interior del cuerpo. Aquí, como es natural, las distancias que intervienen deben ser grandes en comparación con la dimensión del cuerpo, puesto que en otro caso no podemos restringirnos nosotros mismos a los términos en ϕ que disminuyen con menor rapidez que el aumento que sufre r. Hemos incluido ambos términos en (73.6), aunque debe recordarse que el primer término está a veces ausente (ver a continuación).

Aclaremos en qué casos este término $-a/r$ no es nulo. Vimos en § 11 que un potencial $-a/r$ da como resultado un valor no nulo $4\pi\rho a$ del flujo másico a través de una superficie que rodea al cuerpo. Sin embargo, en un fluido incompresible, incluso dicho flujo de masa puede producirse sólo si varía el volumen total del fluido encerrado dentro de la superficie. En otras palabras, debe existir una variación en el volumen del cuerpo como resultado de la cual el fluido se vea expelido del volumen o bien aspirado hacia él. Así pues, el primer término en (73.6) aparece en aquellos casos en que el cuerpo emisor sufre pulsaciones, durante las cuales su volumen cambia.

Supongamos que esto sucede así y determinemos la intensidad total del sonido emitido. El volumen $4\pi a$ del fluido que circula a través de la superficie cerrada debe, por los argumentos anteriores, ser igual a la variación por unidad de tiempo del volumen V del cuerpo, es decir, a la derivada dV/dt (siendo el volumen V una función determinada del tiempo): $4\pi a = \dot{V}$. Así

pues, a distancias r tales que $l \ll r \ll \lambda$, el movimiento del fluido viene dado por la función $\phi = -\dot{V}(t)/4\pi r$. Sin embargo, a distancias $r \gg \lambda$ (es decir, en la «región ondulatoria»), ϕ debe representar una onda esférica saliente, es decir, debe tener la forma

$$\phi = -\frac{f(t-r/c)}{r}. \tag{73.7}$$

De aquí se obtiene, finalmente, la conclusión de que la onda emitida tiene a distancias grandes, en comparación con l, la forma

$$\phi = -\frac{\dot{V}(t-r/c)}{4\pi r}, \tag{73.8}$$

que se obtiene sustituyendo el argumento t de $(t\dot{V})$ por $t - r/c$.

La velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$ está dirigida en todo punto a lo largo del radio vector y su módulo vale $v = \partial\phi/\partial r$. Al derivar (73.8) para distancias $r \gg \lambda$, únicamente es necesario tomar la derivada del numerador, puesto que la derivada del denominador dará un término de orden superior en $1/r$, que podemos despreciar. Puesto que $\partial\dot{V}(t - r/c)/\partial r = -(1/c)\ddot{V}(t - r/c)$, obtenemos

$$\mathbf{v} = \ddot{V}(t-r/c)\mathbf{n}/4\pi cr, \tag{73.9}$$

en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{r}$.

La intensidad del sonido viene dada por el cuadrado de la velocidad y resulta aquí independiente de la dirección de emisión, es decir, la emisión es isótropa. El valor medio de la energía total emitida por unidad de tiempo es

$$I = \rho c \oint \overline{v^2}\,df = (\rho/16c\pi^2) \oint (\overline{\ddot{V}^2}/r^2)df,$$

en donde la integración se toma sobre una superficie cerrada que rodea el origen. Tomando esta superficie como una esfera de radio r y observando que el integrando depende únicamente de la distancia al origen, tenemos, finalmente,

$$I = \rho\overline{\ddot{V}^2}/4\pi c. \tag{73.10}$$

Esta es la intensidad total del sonido emitido. Vemos que viene dada por la derivada de segundo grado respecto al tiempo al cuadrado del volumen del cuerpo.

Si el cuerpo realiza pulsaciones armónicas de frecuencia ω, la segunda derivada temporal del volumen es proporcional a la frecuencia y a la amplitud de la velocidad de las oscilaciones y su valor cuadrático medio es proporcional al cuadrado de la frecuencia para una amplitud de velocidad determinada de los puntos situados en la superficie del cuerpo. Sin embargo, en el caso de una amplitud determinada de las oscilaciones, la amplitud de

la velocidad es por sí misma proporcional a la frecuencia, de modo que la intensidad de la emisión es proporcional a ω^4.

Consideremos ahora la emisión del sonido por un cuerpo oscilando sin variación de volumen. Entonces en (73.6) sólo resta el segundo término; lo escribiremos como $\phi = \operatorname{div}[\mathbf{A}(t)/r]$. Como en el caso anterior se llega a la conclusión de que la forma general de la solución para todas las distancias $r \gg l$ es $\phi = \operatorname{div}[\mathbf{A}(t - r/c)/r]$. Se ve inmediatamente que esta expresión es de hecho una solución de la ecuación de onda, puesto que la función $\mathbf{A}(t - r/c)/r$ es una solución y, por tanto, también lo son sus derivadas respecto a las coordenadas. Derivando de nuevo únicamente el numerador, obtenemos (para distancias $r \gg \lambda$)

$$\phi = -\dot{\mathbf{A}}(t - r/c)\cdot\mathbf{n}/cr. \tag{73.11}$$

Para calcular la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi$, necesitamos de nuevo derivar únicamente **A**. De aquí que tengamos, por las reglas familiares del análisis vectorial para la derivación respecto a un argumento escalar,

$$\mathbf{v} = -\frac{\ddot{\mathbf{A}}(t - r/c)\cdot\mathbf{n}}{cr}\mathbf{grad}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

y, sustituyendo $\mathbf{grad}\,(t - r/c) = -(1/c)\,\mathbf{grad}\,r = -\mathbf{n}/c$, tenemos, finalmente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{A}})/c^2 r. \tag{73.12}$$

La intensidad es ahora proporcional al coseno al cuadrado del ángulo formado por la dirección de emisión (es decir, la dirección de **n**) y el vector $\ddot{\mathbf{A}}$; este valor se denomina *emisión dipolar*. La emisión total viene dada por la integral

$$I = \frac{\rho}{c^3}\oint \frac{\overline{(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{A}})^2}}{r}\mathrm{d}f.$$

Tomemos de nuevo la superficie de integración como una esfera de radio r y utilicemos coordenadas esféricas con el eje polar en la dirección del vector **A**. Una integración simple da, finalmente, para la emisión total por unidad de tiempo

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \tag{73.13}$$

Los componentes del vector **A** son funciones lineales de los componentes de la velocidad **u** del cuerpo (ver § 11). Así pues, la intensidad es aquí una función cuadrática de las derivadas de segundo orden de las componentes de la velocidad.

Si el cuerpo realiza oscilaciones armónicas de frecuencia ω, podemos obtener la conclusión (razonando como en el caso anterior) de que la intensidad es proporcional a ω^4 para un valor determinado de la amplitud de la

velocidad. Cuando se tiene una amplitud lineal determinada de las oscilaciones del cuerpo, la amplitud de la velocidad es proporcional a la frecuencia y, por tanto, la intensidad es proporcional a ω^6.

De un modo totalmente análogo puede resolverse el problema de una emisión de ondas sonoras cilíndricas por un cilindro de una sección recta cualquiera que sufre la acción de pulsaciones u oscilaciones perpendicularmente a su eje. Daremos ahora las fórmulas correspondientes en vista a las aplicaciones posteriores.

Consideremos en primer lugar las pulsaciones de un cilindro y sea $S = S(t)$ su área de la sección recta (variable). A distancias del eje del cilindro tales que $l \ll r \ll \lambda$, en donde l es la dimensión transversal del cilindro, tenemos análogamente a (73.8),

$$\phi = [\dot{S}(t)/2\pi]\log fr, \tag{73.14}$$

en donde $f(t)$ es una función del tiempo y el coeficiente del $\log fr$ se escoje, de modo que se obtenga el valor correcto del flujo de masa a través de una superficie cilíndrica coaxial. De acuerdo con la fórmula para el potencial de una onda cilíndrica saliente [el primer término de la fórmula (70.2)], se obtiene ahora la conclusión de que a todas las distancias $r \gg l$ el potencial viene dado por

$$\phi = -\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\mathrm{d}t'}{\sqrt{[c^2(t-t')^2-r^2]}}. \tag{73.15}$$

Cuando $r \to 0$ el término principal de esta expresión es el mismo que (73.14) y la función $f(t)$ en la última ecuación está automáticamente determinada (suponemos que la derivada $S(t)$ tiende con suficiente rapidez a cero cuando $t \to -\infty$). En el caso de valores muy grandes de r, por otra parte (la «región ondulatoria»), los valores de $t - t' \sim r/c$ son los que tienen más importancia en la integral (73.15). Por tanto, podemos poner en el denominador del integrando

$$(t-t')^2 - r^2/c^2 \approx (2r/c)(t-t'-r/c),$$

obteniendo así

$$\phi = -\frac{c}{2\pi\sqrt{(2r)}}\int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\mathrm{d}t'}{\sqrt{[c(t-t')-r]}}. \tag{73.16}$$

Finalmente, la velocidad $v = \partial\phi/\partial r$. Para realizar la derivación es conveniente sustituir $t - t' - r/c = \xi$:

$$\phi = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2r}}\int_0^\infty \frac{\dot{S}(t-r/c-\xi)}{\sqrt{\xi}}\mathrm{d}\xi;$$

los límites de la integración son entonces independientes de r. El factor $1/\sqrt{r}$ delante de la integral no necesita derivarse, puesto que simplemente daría un término de orden superior en $1/r$. Derivando bajo el signo integral y luego volviendo a la variable t', obtenemos

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2r)}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')\mathrm{d}t'}{\sqrt{[c(t-t')-r]}}. \tag{73.17}$$

La intensidad viene dada por el producto $2\pi r\rho c v^2$. Debe señalarse que ahora, a diferencia de lo que ocurre en el caso esférico, la intensidad en un instante cualquiera está determinada por el comportamiento de la función $S(t)$ en todos los instantes desde $-\infty$ hasta $t - r/c$.

Finalmente, en el caso de las oscilaciones de traslación de un cilindro infinito en una dirección perpendicular a su eje, el potencial a distancias r tales que $l \ll r \ll \lambda$ tiene la forma

$$\phi = \mathrm{div}(\mathbf{A} \log fr), \tag{73.18}$$

en donde $\mathbf{A}(t)$ se determina al resolver la ecuación de Laplace para el flujo de un fluido incompresible que rodea un cilindro. De aquí que de nuevo obtengamos la conclusión de que para todas las distancias $r \gg l$,

$$\phi = -\mathrm{div} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\mathbf{A}(t')\mathrm{d}t'}{\sqrt{[(t-t')^2 - r^2/c^2]}}. \tag{73.19}$$

En conclusión, debemos hacer la siguiente observación. Hemos despreciado ahora totalmente el efecto de la viscosidad del fluido y, de acuerdo con ello, hemos supuesto que existe un flujo potencial en la onda emitida. Sin embargo, en realidad, no tenemos ningún flujo potencial en una capa de fluido de espesor $\sim \sqrt{(\nu/\omega)}$ alrededor del cuerpo oscilante (ver § 24). De aquí, que si han de aplicarse las fórmulas anteriores es necesario que el espesor de esta capa sea pequeño en comparación con la dimensión l del cuerpo:

$$\sqrt{(\nu/\omega)} \ll l. \tag{73.20}$$

Esta condición puede que no se cumpla para frecuencias pequeñas o dimensiones pequeñas del cuerpo.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la intensidad total del sonido emitido por una esfera que realiza oscilaciones de traslación (armónicas) pequeñas de frecuencia ω, siendo comparable el valor de su longitud de onda con el radio R de la esfera.

Solución. Escribamos la velocidad de la esfera en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$; entonces ϕ depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$ también, y satisface la ecuación $\Delta\phi + k^2\phi = 0$,

en donde $k = \omega/c$. Buscaremos una solución de la forma $\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}\, f(r)$, tomándose el origen en la posición instantánea del centro de la esfera. Para f obtenemos la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}\,(\Delta f + k^2 f) = 0$, de aquí que $\Delta f + k^2 f =$ constante. Aparte de una constante aditiva sin importancia, tenemos, por tanto, $f = Ae^{ikr}/r$. La constante A se determina a partir de la condición $\partial\phi/\partial r = u_r$ para $r = R$, y el resultado es

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} e^{ik(r-R)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Así tenemos la emisión dipolar. A distancias suficientemente grandes de la esfera podemos despreciar la unidad en comparación con ikr y entonces ϕ toma la forma (73.11), siendo ahora el vector $\dot{\mathbf{A}}$

$$\dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{u} e^{ik(r-R)} R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Observando que $\overline{(\mathrm{re}\,\dot{\mathbf{A}})^2} = \overline{|\dot{\mathbf{A}}|^2}/2$, obtenemos para la emisión total, según (73.13),

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3} |\mathbf{u}_0|^2 \frac{R^6\omega^4}{4 + (\omega R/c)^4}.$$

Cuando $\omega R/c \ll 1$, esta expresión se transforma en $I = \pi\rho R^6 |\mathbf{u}_0|^2 \omega^4/6c^6$, resultado que podía obtenerse también directamente sustituyendo en (73.13) la expresión $\mathbf{A} = R^3\mathbf{u}/2$ a partir del § 11, problema 1. Para $\omega R/c \gg 1$ tenemos $I = 2\pi\rho c R^2 |\mathbf{u}_0|^2/3$, correspondiente a la fórmula (73.4).

La fuerza de arrastre que actúa sobre la esfera se obtiene integrando en toda la superficie de la esfera la componente de las fuerzas de presión $[p' = -\rho(\phi')_{r=R}]$ en la dirección de $\mathbf{u}$, y vale

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho\omega R^3 \mathbf{u} \frac{-k^3R^3 + i(2 + k^2R^2)}{4 + k^4R^4};$$

ver al final del § 24 respecto al significado de una fuerza de arrastre compleja.

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero para el caso en el que el radio R de la esfera es comparable en magnitud con $\sqrt{(\nu/\omega)}$, hientras que $\lambda \gg R$.

Solución. Si la dimensión del cuerpo es pequeña en comparación con $\sqrt{(\nu/\omega)}$, entonces la onda emitida debe analizarse, no a partir de la ecuación $\Delta\phi = 0$, sino a partir de la ecuación del movimiento de un fluido viscoso incompresible. La solución apropiada de esta ecuación para una esfera viene dada por las fórmulas (1) y (2) en § 24, problema 5. A distancias grandes puede omitirse el primer término de (1) que disminuye exponencialmente con r. El segundo término da la velocida $\mathbf{v} = -b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{grad}(1/r)$. La comparación con (73.6) muestra que

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}R^3[1 - 3/(i-1)\kappa - 3/2i\kappa^2]\mathbf{u},$$

en donde $\kappa = R\sqrt{(\omega/2\nu)}$, es decir, $\mathbf{A}$ difiere de la expresión correspondiente para un fluido ideal en el factor comprendido entre corchetes. El resultado es

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3} \omega^4 \left(1 + \frac{3}{\kappa} + \frac{9}{2\kappa^2} + \frac{9}{2\kappa^3} + \frac{9}{4\kappa^4}\right) |\mathbf{u}_0|^2.$$

Para $\kappa \gg 1$ esta expresión se transforma en la fórmula dada en el problema 1, mientras que para $\kappa \ll 1$ obtenemos

$$I = 3\pi\rho R^2 \nu^2 \omega^2 |\mathbf{u}_0|^2/2c^3,$$

es decir, la emisión es proporcional a la segunda y no a la cuarta potencia de la frecuencia.

Problema 3. Determinar la intensidad del sonido emitido por una esfera que realiza pulsaciones pequeñas (armónicas) de frecuencia arbitraria.

Solución. Busquemos una solución de la forma $\phi = (au/r)e^{ik(r-R)}$, siendo R el radio de equilibrio de la esfera, y determinemos la constante a a partir de la condición $[\partial\phi/\partial r]_{r=R} = u = u_0e^{-i\omega t}$ (siendo u la velocidad radial de los puntos situados en la superficie de la esfera):

$$a = R^2/(ikR-1).$$

La intensidad es $I = 2\pi\rho c|u_0|^2k^2R^4/(1 + k^2R^2)$. Para $kR \ll 1$, $I = 2\pi\rho\omega^2R^4|u_0|^2/c$, de acuerdo con (73.10), mientras que para $kR \gg 1$, $I = 2\pi\rho cR^2|u_0|^2$, de acuerdo con (73.4).

Problema 4. Determinar la naturaleza de la onda emitida por una esfera (de radio R) que realiza pulsaciones pequeñas cuando la velocidad radial de los puntos situados sobre la superficie es una función arbitraria del tiempo $u(t)$.

Solución. Busquemos una solución de la forma $\phi = f(t')/r$, en donde $t' = t - (r-R)/c$, y determinemos f a partir de la condición límite $\partial\phi/\partial r = u(t)$ para $r = R$. Esto nos da la ecuación $df/dt + cf(t)/R = -Rcu(t)$. Resolviendo esta ecuación lineal y sustituyendo t por t' en la solución, obtenemos

$$\phi(r, t') = -\frac{cR}{r}e^{-ct'/R}\int_{-\infty}^{t'} u(\tau)e^{c\tau/R}d\tau. \qquad (1)$$

Si las oscilaciones de la esfera cesan en un instante determinado, digamos $t = 0$ [es decir, $u(\tau) = 0$ para $\tau > 0$], entonces el potencial a una distancia r del centro será de la forma $\phi =$ constante $\times\, e^{-ct/R}$ después del instante $t = (r-R)/c$, es decir, disminuirá exponencialmente.

Sea T el tiempo durante el cual la velocidad $u(t)$ varía apreciablemente. Si $T \gg R/c$, es decir, si la longitud de onda de las ondas emitidas $\lambda \sim cT \gg R$, entonces podemos tomar el factor de variación lenta $u(\tau)$ sacándolo de la integral en (1) y sustituyéndolo por $u(t')$. Para distancias $r \gg R$, obtenemos entonces $\phi = -(R^2/r)u(t - r/c)$, de acuerdo con la fórmula (73.8). Por otra parte, si $T \ll R/c$, obtenemos de modo semejante

$$\phi = -\frac{cR}{r}\int_{-\infty}^{t'} u(\tau)d\tau, \quad v = \partial\phi/\partial r = (R/r)u(t'),$$

de acuerdo con la fórmula (73.4).

Problema 5. Determinar el movimiento de un fluido compresible ideal cuando una esfera de radio R realiza en él un movimiento de traslación arbitrario con una velocidad pequeña en comparación con la del sonido.

Solución. Busquemos una solución de la forma

$$\phi = \operatorname{div}[\mathbf{f}(t')/r], \qquad (1)$$

siendo r la distancia al origen, tomado en la posición del centro de la esfera en el instante $t' = t - (r-R)/c$; puesto que la velocidad $\mathbf{u}$ de la esfera es pequeña en compara-

ción con la velocidad del sonido, puede despreciarse el movimiento del origen. La velocidad del fluido es

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi = \frac{3(\mathbf{f}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}'\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{(\mathbf{f}''\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{c^2 r}, \tag{2}$$

siendo $\mathbf{n}$ un vector unidad en la dirección de $\mathbf{r}$, y designando con el símbolo prima la derivación respecto al argumento de $\mathbf{f}$. La condición límite es $v_r = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ para $r = R$, de aquí que $\mathbf{f}''(t) + (2c/R)\mathbf{f}'(t) + (2c^2/R^2)\mathbf{f}(t) = Rc^2\mathbf{u}(t)$. Resolviendo esta ecuación mediante variación de parámetros, obtenemos para la función $\mathbf{f}(t)$ la expresión general

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-ct/R}\int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{sen}\frac{c(t-\tau)}{R}\,e^{c\tau/R}\,\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Al sustituir en (1), debemos sustituir t por t'. El límite inferior se toma como $-\infty$, de modo que $\mathbf{f}$ deberá ser cero para $t = -\infty$.

Problema 6. Una esfera de radio R empieza en el instante $t = 0$ a moverse con velocidad constante $\mathbf{u}_0$. Determinar la intensidad del sonido emitido en el instante en que empieza el movimiento.

Solución. Sustituyendo en la fórmula (3) del problema 5 $\mathbf{u}(\tau)=0$ para $\tau < 0$ y $\mathbf{u}(\tau)=\mathbf{u}_0$ para $\tau > 0$, y sustituyendo en la fórmula (2) (reteniendo únicamente el último término, que disminuye con menor rapidez al aumentar r), encontramos para valor de la velocidad del fluido lejos de la esfera:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_0)\frac{\sqrt{2R}}{r}\,e^{-ct'/R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{ct'}{R} - \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

en donde $t' > 0$. La intensidad total disminuye a lo largo del tiempo de acuerdo con

$$I = (8\pi/3)c\rho R^2 u_0^2\, e^{-2ct'/R}\,\mathrm{sen}^2(ct'/R - \tfrac{1}{4}\pi).$$

La cantidad total de energía emitida es $1/3\pi\rho R^3 u_0^2$.

Problema 7. Determinar la intensidad del sonido emitido por un cilindro infinito, de radio R, que realiza pulsaciones armónicas de longitud de onda $\lambda \gg R$.

Solución. De acuerdo con la fórmula (73.14), nos encontramos a primero de todo que a distancias $r \ll \lambda$ (en los problemas 7 y 8, r es la distancia desde el eje del cilindro), el potencial es $\phi = Ru \log kr$, en donde $u = u_0 e^{i\omega t}$ es la velocidad de los puntos situados en la superficie del cilindro. Para una comparación con las fórmulas (70.7) y (70.8), encontramos ahora que a distancias grandes el potencial tiene la forma $\phi = -Ru\sqrt{(i\pi/2kr)}e^{ikr}$. Pcr tanto, la velocidad es

$$\mathbf{v} = Ru\sqrt{(\pi k/2ir)}\,\mathbf{n}e^{ikr},$$

en donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad perpendicular al eje del cilindro y la intensidad por unidad de longitud del mismo es $I = 1/2\pi^2\rho\omega R^2 u_0^2$.

Problema 8. Determinar la intensidad del sonido emitido por un cilindro que realiza oscilaciones de traslación armónicas en una dirección perpendicular a su eje.

Solución. A distancias $r \ll \lambda$ tenemos $\phi = -\mathrm{div}(R^2\mathbf{u}\log kr)$; comparar con la fórmula (73.18) y § 10, problema 3. De aquí se obtiene la conclusión de que a distancias grandes

$$\phi = R^2\sqrt{(i\pi/2k)}\,\mathrm{div}(e^{ikr}\mathbf{u}/\sqrt{r}) = -R^2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\sqrt{(\pi k/2ir)}e^{ikr},$$

y, por consiguiente, la velocidad es $\mathbf{v} = -kR^2\sqrt{(i\pi k/2r)}\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})e^{ikr}$. La intensidad es proporcional al coseno al cuadrado del ángulo formado entre las direcciones de oscilación y la de emisión. La intensidad total es $I = (\pi^2/4c^2)\rho\omega^3R^4|\mathbf{u}_0|^2$.

Problema 9. Determinar la intensidad del sonido emitido por una superficie plana cuya temperatura varía periódicamente con frecuencia $\omega \ll c^2/\chi$, en donde χ es la conductividad termométrica del fluido.

Solución. Supongamos que la parte variable de la temperatura de la superficie es $T'_0e^{-i\omega t}$. Estas oscilaciones de temperatura producen una onda térmica amortiguada en el fluido (52.17):

$$T' = T'_0\, e^{-i\omega t}e^{-(1-i)\sqrt{(\omega/2\chi)}x},$$

y, por tanto, la densidad del fluido oscila también: $\rho' = (\partial\rho/\partial T)_p T' = -\rho\beta T'$, en donde β es el coeficiente de dilatación térmica. Esto, a su vez, da como resultado la presencia de un movimiento determinado por la ecuación de continuidad: $\rho\,\partial v/\partial x = -\partial\rho'/\partial t = -i\omega\rho\beta T'$. En la superficie sólida la velocidad $v_x = v = 0$, y lejos de dicha superficie tiende al límite

$$v = -i\omega\beta\int_0^\infty T'\,dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\beta\sqrt{(\omega\chi)}T'_0\,e^{-i\omega t}.$$

Y este valor se alcanza a distancias $\sim\sqrt{(\chi/\omega)}$, que son pequeñas en comparación con c/ω, y así tenemos una condición límite que actúa sobre la onda sonora resultante. De aquí resulta la intensidad por unidad de área de la superficie que es igual a $I = 1/2c\rho\beta^2\omega\chi|T'_0|^2$.

Problema 10. Un foco puntual que emite una onda esférica está a una distancia l de una pared maciza que refleja totalmente el sonido y limita un semiespacio ocupado por el fluido. Determinar el cociente entre la intensidad total del sonido emitido por la fuente y el que se encontraría en un medio infinito, y, además, la dependencia existente entre la intensidad y la dirección para distancias grandes del foco.

Solución. La suma de las ondas directa y reflejada viene dada por una solución de la ecuación de onda tal que la componente de la velocidad normal $v_n = \partial\phi/\partial n$ sea cero en la pared. Dicha solución es

$$\phi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega}$$

(para mayor sencillez omitimos el factor constante), en donde r es la distancia al foco O (figura 39), y r' es la distancia desde un punto O' que es la imagen de O en la pared. A distancias grandes del foco tenemos $r' \approx r - 2l\cos\theta$, de modo que

$$\phi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(1 + e^{-2ikl\cos\theta}).$$

La relación entre la intensidad y la dirección viene dada por el factor $\cos^2(kl\cos\theta)$.

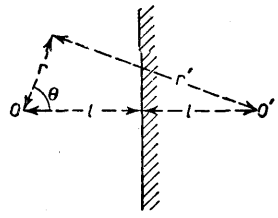

FIG. 39

Para determinar la intensidad total, integremos el flujo de energía $\overline{\mathbf{q}} = \overline{p'\mathbf{v}} = -\overline{\rho\phi\ \mathbf{grad}\ \phi}$ [ver (64.4)] sobre la superficie de una esfera de radio arbitrariamente pequeño, centrado en O. Esto nos da $2\pi\rho k\omega(1 + [1/2kl]\ \mathrm{sen}\ 2kl)$. Por otra parte, en un medio infinito, deberíamos tener simplemente una onda esférica $\phi = e^{i(kr-\omega t)}/r$, con un flujo de energía total $2\pi\rho k\omega$. Así pues, el cociente de intensidades buscado es $1 + (1/2kl)\ \mathrm{sen}\ 2kl$.

Problema 11. El mismo que el problema 10, pero en el caso de un fluido limitado para una superficie libre.

Solución. En la superficie libre debe ser válida la condición $p' = -\rho\phi = 0$; en una onda monocromática esta condición equivale a $\phi = 0$. La solución correspondiente a la ecuación de onda es

$$\phi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}.$$

A distancias grandes del foco, la intensidad viene dada por un factor $\mathrm{sen}^2(kl\cos\theta)$. La relación buscada de intensidades es $1 - (1/2kl)\ \mathrm{sen}\ 2kl$.

§ 74. Principio de reciprocidad

Al deducir las ecuaciones de una onda sonora en § 63, se admitió que la onda se propagaba en un medio homogéneo. En particular, la densidad ρ_0 del medio y la velocidad del sonido en él, c, se consideraron como constantes. Con objeto de obtener algunas relaciones generales aplicables en el caso de un medio inhomogéneo arbitrario deduciremos, en primer lugar, la ecuación correspondiente a la propagación del sonido en dicho medio.

Escribamos la ecuación de continuidad en la forma $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t + \rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$. Puesto que la propagación del sonido es adiabática, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p\right),$$

y la ecuación de continuidad se deduce a $\partial p/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p + \rho c^2\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$.

Como es normal hagamos $\rho = \rho_0 + \rho'$, en donde ρ_0 es ahora una función determinada de las coordenadas. Sin embargo, en la ecuación $p = p_0 + p'$, debemos considerar, como antes, $p_0 =$ constante, puesto que la presión debe ser constante en todo un medio que esté en equilibrio (como es natural, en ausencia de un campo externo). Así pues, tenemos hasta magnitudes del segundo orden $\partial p'/\partial t + \rho_0 c^2\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$.

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (63.5), pero el coeficiente $\rho_0 c^2$ es una función de las coordenadas. Como en § 63, obtenemos la ecuación de Euler en la forma $\partial\mathbf{v}/\partial t = -(1/\rho_0)\ \mathbf{grad}\ p'$. Eliminando $\mathbf{v}$ y omitiendo el sufijo en ρ_0, obtenemos, finalmente, la ecuación de propagación del sonido en un medio inhomogéneo:

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{grad}\,p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \tag{74.1}$$

Si la onda es monocromática, con frecuencia ω, tenemos $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, de modo que

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{grad}\, p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \tag{74.2}$$

Consideremos una onda sonora emitida por un foco pulsante de dimensiones pequeñas; hemos visto en § 73 que la emisión es isótropa. Designemos por A el punto en donde está situado el foco y por $p_A(B)$ la presión p' en un punto B de la onda emitida.† Si se sitúa el mismo foco en B, produce en A una presión que designaremos por $p_B(A)$. Deduciremos la relación existente entre $p_A(B)$ y $p_B(A)$.

Para ello, utilizaremos la ecuación (74.2), aplicándola en primer lugar al sonido procedente de un foco situado en A y luego al sonido procedente de un foco situado en B:

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_A = 0, \quad \operatorname{div}\frac{\mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_B = 0.$$

Multipliquemos la primera ecuación por p'_B y la segunda por p'_A y restemos. El resultado es

$$p'_B \operatorname{div}\frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} - p'_A \operatorname{div}\frac{\mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} = \operatorname{div}\left(\frac{p'_B\, \mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} - \frac{p'_A\, \mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} \right) = 0.$$

Integremos esta ecuación respecto a todo el volumen situado entre una superficie cerrada a distancia infinita C y dos pequeñas esferas C_A y C_B que encierran a los puntos A y B, respectivamente. La integral de volumen puede transformarse en tres integrales de superficie y resulta que la integral respecto a C es cero, puesto que el campo sonoro se anula en el infinito. Así pues, obtenemos

$$\oint_{C_A+C_B} \left(p'_B \frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} \right) \cdot \mathbf{df} = 0. \tag{74.3}$$

Dentro de la pequeña esfera C_A, la presión p'_A en la onda procedente de un foco situado en A disminuye rápidamente con la distancia a A y el gradiente $\mathbf{grad}\, p'_A$ es, por tanto, grande. La presión p'_B debida a un foco situado en B, es una función lentamente variable de las coordenadas en la región próxima al punto A, que está a una distancia considerable de B, de modo

† La dimensión del foco o fuente debe ser pequeña en comparación con la distancia entre A y B y con la longitud de onda.

que el gradiente **grad** p'_B es relativamente pequeño. Por tanto, cuando el radio de la esfera C_A es suficientemente pequeño, podemos despreciar la integral

$$\oint (p'_A/\rho)\,\mathbf{grad}\,p'_B\cdot\mathbf{df}$$

extendida a C_A en comparación con

$$\oint (p'_B/\rho)\,\mathbf{grad}\,p'_A\cdot\mathbf{df},$$

y en esta última puede extraerse de la integral la magnitud casi constante p'_B sustituyéndola por su valor en el punto A. Un razonamiento semejante es válido para las integrales extendidas a la esfera C_B, y como resultado obtenemos, a partir de (74.3), la relación

$$p'_B(A)\oint_{C_A}\frac{\mathbf{grad}\,p'_A}{\rho}\cdot\mathbf{df} = p'_A(B)\oint_{C_B}\frac{\mathbf{grad}\,p'_B}{\rho}\cdot\mathbf{df}.$$

Pero $(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p' = -\partial\mathbf{v}/\partial t$, y, por tanto, esta ecuación puede volverse a escribir como

$$p'_B(A)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_A}\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{df} = p'_A(B)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_B}\mathbf{v}_B\cdot\mathbf{df}.$$

La integral

$$\oint \mathbf{v}_A\cdot\mathbf{df}$$

extendida a C_A es el volumen del fluido que fluye por unidad de tiempo a través de la superficie de la esfera C_A, es decir, la variación respecto al tiempo del volumen del foco sonoro pulsante. Puesto que los focos en A y B son idénticos, es evidente que

$$\oint_{C_A}\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{df} = \oint_{C_B}\mathbf{v}_B\cdot\mathbf{df},$$

y en consecuencia

$$p'_A(B) = p'_B(A). \tag{74.4}$$

Esta ecuación constituye el *principio de reciprocidad*: la presión en B, debida a un foco en A, es igual a la presión en A, debida a un foco semejante en B. Debe resaltarse que este resultado es válido en particular para el caso en que el medio esté compuesto de varias regiones diferentes, cada una de las cuales sea homogénea. Cuando se propaga el sonido en un medio de estos, se refleja y se refracta en las superficies que lo separan de las diversas regiones. Así pues, el principio de reciprocidad es válido también en aquellos casos en que la onda sufre una reflexión y refracción en su trayecto desde A a B.

PROBLEMA

Deducir el principio de reciprocidad para la emisión dipolar del sonido por un foco que oscila sin variación de volumen.

Solución. En este caso la integral

$$\oint \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{df}$$

extendida a C_A es idénticamente nula y debe tomarse la aproximación siguiente al calcular las integrales en (74.3). Para ello escribamos, dentro de los términos de primer orden,

$$p'_B = p'_B(A) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}\, p'_B,$$

siendo $\mathbf{r}$ el radio vector desde A. En la integral

$$\oint_{C_A} \left(p'_B \frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} \right) \cdot \mathbf{df}, \tag{1}$$

los dos términos son ahora del mismo orden de magnitud. Sustituyendo aquí p'_B por el desarrollo anterior, y utilizando el hecho de que la integral

$$\oint (1/\rho)\, \mathbf{grad}\, p'_A \cdot \mathbf{df}$$

extendida a C_A es ahora cero, obtenemos

$$\oint_{C_A} \left\{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}\, p'_B) \frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\mathbf{grad}\, p'_B}{\rho} \right\} \cdot \mathbf{df}.$$

A continuación, saquemos fuera de la integral la magnitud casi constante $\mathbf{grad}\, p'_B = -\rho \dot{\mathbf{v}}_B$, sustituyéndola por su valor en A:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_B(A) \cdot \oint_{C_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} \mathbf{df} - \mathbf{r} \left(\frac{\mathbf{grad}\, p'_A}{\rho} \cdot \mathbf{df} \right) \right\},$$

en donde ρ_A es la densidad del medio en el punto A. Para calcular esta integral observemos que cerca de un foco el fluido puede suponerse incompresible (ver § 73), y de aquí que podamos escribir para la presión dentro de la esfera pequeña C_A, según (11.1), $p'_A = -\rho\dot{\phi} = \rho \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}/r^3$. En una onda monocromática $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}} = -i\omega \mathbf{A}$; incluyendo también el vector unidad $\mathbf{n}_A$ en la dirección del vector $\mathbf{A}$ para un foco situado en A, vemos que la integral (1) es proporcional a $\rho_A \mathbf{v}_B(A) \cdot \mathbf{n}_A$. Análogamente, la integral extendida sobre la esfera C_B es proporcional a $-\rho_B \mathbf{v}_A(B) \cdot \mathbf{n}_B$, con el mismo factor de proporcionalidad. Igualando la suma a cero, se encuentra la relación buscada

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A) \cdot \mathbf{n}_A = \rho_B \mathbf{v}_A(B) \cdot \mathbf{n}_B,$$

que expresa el principio de reciprocidad en el caso de la emisión dipolar del sonido.

§ 75. Propagación de los sonidos en un tubo

Consideremos ahora la propagación de una onda sonora en un tubo estrecho largo. Por tubo «estrecho» entendemos aquél cuya anchura es peque-

ña en comparación con la longitud de onda. La sección recta del tubo puede variar a lo largo de su longitud, tanto en forma como de área. Sin embargo, es importante que esta variación ocurra con suficiente lentitud: el área de la sección recta S debe variar sólo ligeramente en distancias del orden de la anchura del tubo.

En estas condiciones podemos suponer que todas las magnitudes (velocidad, densidad, etc.) son constantes en cualquier sección recta transversal del tubo. Puede suponerse que la dirección de propagación de la onda coincide con el eje del tubo en todo punto. La ecuación para la propagación de dicha onda se deduce de modo más conveniente por un método semejante al utilizado en § 13 al deducir la ecuación de propagación de ondas de gravedad en canales.

En el tiempo unidad una masa $S\rho v$ de fluido pasa a través de una sección recta del tubo. De aquí que la masa del fluido existente en el volumen comprendido entre dos secciones rectas transversales y distantes entre sí dx disminuya en la unidad de tiempo en

$$(S\rho v)_{x+dx} - (S\rho v)_x = [\partial(S\rho v)/\partial x]dx,$$

midiéndose la coordenada x a lo largo del eje del tubo. Puesto que el volumen entre dos secciones permanece constante, la disminución sólo puede deberse a la variación de densidad del fluido. La variación de densidad por unidad de tiempo es $\partial\rho/\partial t$, y la disminución correspondiente en la masa del fluido dentro del volumen $S\,dx$ entre ambas secciones rectas es $-S(\partial\rho/\partial t)dx$. Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$S\partial\rho/\partial t = -\partial(S\rho v)/\partial x, \tag{75.1}$$

que es la «ecuación de continuidad» para el flujo en el interior de una tubería.

A continuación escribamos la ecuación de Euler omitiendo el término cuadrático en la velocidad

$$\partial v/\partial t = -(1/\rho)\partial p/\partial x. \tag{75.2}$$

Derivemos (75.1) respecto al tiempo, considerando a la magnitud que está en el segundo miembro independiente del tiempo, puesto que la derivación de ρ da un término en el que interviene $v\partial\rho/\partial t = v\partial\rho'/\partial t$, y, por tanto, es un término de segundo orden. Así pues, $S\partial^2\rho/\partial t^2 = -\partial(S\rho\partial v/\partial t)/\partial x$. A continuación, sustituyamos la expresión (75.2) correspondiente a $\partial v/\partial t$, y expresemos la derivada de la densidad del primer miembro en función de la derivada de la presión a través de $\rho = (\partial\rho/\partial p)p = p/c^2$.

El resultado es la ecuación siguiente para la propagación del sonido en un tubo:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{75.3}$$

En una onda monocromática p depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$, y (75.3) se transforma en

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)+k^2p=0. \tag{75.4}$$

en donde $k=\omega/c$ es el número de onda.†

Finalmente, consideremos el problema de la emisión del sonido procedente del extremo abierto de un tubo. La diferencia de presiones entre el gas en el extremo del tubo y el que está en el espacio que lo rodea es pequeño en comparación con la diferencia de presiones dentro del propio tubo. De aquí que la condición límite en el extremo abierto del tubo es, con suficiente exactitud, que la presión p debe ser nula. La velocidad del gas v en el extremo del tubo no es cero; supongamos que su valor es v_0. El producto Sv_0 es el volumen de gas que sale del tubo por unidad de tiempo.

Podemos ahora considerar el extremo abierto del tubo como una «fuente» de gas de intensidad Sv_0. El problema de la emisión de un tubo se hace así equivalente al de emisión de un cuerpo pulsante, el cual está resuelto por la fórmula (73.10). En lugar de la derivada respecto al tiempo $\dot{V}$ del volumen del cuerpo debemos ahora poner Sv_0. Así pues, la intensidad total del sonido emitido es

$$I=\rho S^2\overline{\dot{v}_0^2}/4\pi c. \tag{75.5}$$

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el coeficiente de transmisión para el sonido que pasa de un tubo de sección recta S_1 a otro de sección recta S_2.

Solución. En el primer tubo tenemos dos ondas, la onda incidente $p_1=a_1e^{i(kx-\omega t)}$ y la onda reflejada $p_1'=a_1'e^{-i(kx+\omega t)}$. En el segundo tubo tenemos la onda transmitida $p_2=a_2e^{i(xk-\omega t)}$. En el punto en donde se unen los tubos ($x=0$), deben ser iguales las presiones y, por tanto, también lo deben ser los volúmenes Sv de gas que pasan de un tubo al otro por unidad de tiempo. Ambas condiciones nos dan $a_1+a_1'=a_2$, $S_1(a_1-a_1')=S_2a_2$, de aquí que $a_2=2a_1S_1/(S_1+S_2)$. El cociente D entre el flujo de energía de la onda transmitida y el de la onda incidente es

$$D=S_2\rho c\overline{|v_2|^2}/S_1\rho c\overline{|v_1|^2}=S_2\overline{|v_2|^2}/S_1\overline{|v_1|^2}$$

o sea

$$D=\frac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2}=1-\left(\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}\right)^2.$$

Problema 2. Determinar la cantidad de energía emitida por el extremo abierto de un tubo cilíndrico.

† Aquí, como en el problema, p designa la parte variable de la presión, que previamente designábamos por p'.

Solución. En la condición límite $p = 0$ en el extremo abierto del tubo, podemos despreciar aproximadamente la onda emitida (veremos que la intensidad emitida del extremo del tubo es pequeña). Entonces, tenemos la condición $p_1 = -p_1'$, en donde p_1 y p_1' son las presiones en la onda incidente y en la onda reflejada que retroceden por el interior del tubo; en el caso de las velocidades tenemos en correspondencia $v_1 = v_1'$, de modo que la velocidad total en el extremo del tubo es $v_0 = v_1 + v_1' = 2v_1$. El flujo de energía en la onda incidente es $cS\overline{\rho v_1^2} = cC\overline{\rho v_0^2}/4$. Utilizando (75.5), obtenemos como cociente entre la energía emitida y el flujo de energía de la onda incidente $D = S\omega^2/\pi c^2$. En el caso de un tubo de sección recta circular (*radio* R) tenemos $D = R^2\omega^2/c^2$. Puesto que, por hipótesis, $R \ll c/\omega$, se deduce que $D \ll 1$.

Problema 3. Uno de los extremos de una tubería cilíndrica se recubre con una membrana que realiza una oscilación determinada emitiendo sonido; el otro extremo está abierto. Determinar el modo en que se emite el sonido del tubo.

Solución. En la solución general

$$p = (ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$$

determinaremos las constantes a y b a partir de las condiciones $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$, la velocidad determinada de la membrana en el extremo cerrado ($x = 0$) y $p = 0$ en el extremo abierto ($x = l$). Estas condiciones nos dan al $ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0$, $a - b = c\rho u_0$. Determinando a y b vemos que la velocidad del gas en el extremo abierto del tubo es $v_0 = u/\cos kl$. Si no existiese tubo, la intensidad del sonido emitido por la membrana oscilante vendría dada por el valor cuadrático medio $S^2|\overline{\dot{u}}|^2 = S^2\omega^2|\overline{u}|^2$, de acuerdo con la fórmula (73.10) poniendo Su en lugar de $\dot{V}$; S es el área de la sección recta de la membrana. La emisión del extremo del tubo es proporcional a $S^2|\overline{v_0}|^2\omega^2$. Definiendo el «coeficiente de amplificación» de la tubería como $A = S^2|\overline{v_0}|^2/S^2|\overline{u}|^2$, obtenemos $A = 1/\cos^2 kl$. Esta expresión se hace infinita para frecuencias de oscilación de la membrana igual a las frecuencias características del tubo (*resonancia*); como es natural, en realidad permanece finita debido a los efectos que hemos despreciado (como el rozamiento originado por la emisión del sonido).

Problema 4. El mismo que el problema 3, pero en el caso de un tubo cónico con la membrana cubriendo el extremo más pequeño.

Solución. La sección recta del tubo es $S = S_0x^2$; supongamos que los valores de las coordenadas x que corresponden a los extremos menor y mayor son x_1 y x_2, de modo que la longitud del tubo es $l = x_2 - x_1$. La solución final de la ecuación (75.4) es $p = (1/x)(ae^{ikx} + be^{-ikx})e^{-i\omega t}$; a y b están determinados por las condiciones $v = u$ para $x = x_1$ y $p = 0$ para $x = x_2$. El coeficiente de amplificación resulta ser

$$A = \frac{S_0x_2^2\,\overline{|v_2|^2}}{S_0x_1^2\,\overline{|u|^2}} = \frac{k^2x_1^2}{(\operatorname{sen} kl + kx_1\cos kl)^2}.$$

Problema 5. Igual que el problema 3, pero en el caso de un tubo cuya sección recta varía exponencialmente a lo largo de su longitud: $S = S_0e^{\alpha x}$.

Solución. La ecuación (75.4) se transforma en $\partial^2p/\partial x^2 + \alpha\partial p/\partial x + k^2p = 0$, de aquí

$$p = e^{-\frac{1}{2}\alpha x}(ae^{imx} + be^{-imx})e^{-i\omega t},$$

con $m = \sqrt{(k^2 - \alpha^2/4)}$. Determinando a y b a partir de las condiciones $v = u$ para $x = 0$

y $p = 0$ para $x = l$, se tiene para el coeficiente de amplificación

$$A = \frac{S_0 e^{\alpha l} |v_0|^2}{S_0 |u|^2} = \frac{e^{\alpha l}}{[\frac{1}{2}(\alpha/m)\operatorname{sen} ml + \cos ml]^2}$$

para $k > \alpha/2$ y

$$A = \frac{e^{\alpha}}{[\frac{1}{2}(\alpha/m')\operatorname{senh} m'l + \cosh m'l]^2}, \qquad m' = \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - k^2)},$$

para $k < \alpha/2$.

§ 76. Dispersión del sonido

Si existe algún cuerpo en el trayecto de la propagación de una onda sonora, entonces el sonido se *dispersa*: además de la onda incidente aparecen otras ondas (dispersadas), que se propagan en todas las direcciones a partir del cuerpo dispersor. La dispersión de una onda sonora se produce simplemente a causa de la presencia del cuerpo en su trayecto. Además, la onda incidente hace que el propio cuerpo se mueva y, por lo tanto, origina a su vez una emisión adicional de sonido por el propio cuerpo, es decir, una dispersión añadida. Sin embargo, si la densidad del cuerpo es grande en comparación con la del medio en el que se propaga el sonido y si su compresibilidad es pequeña, entonces la dispersión debida al movimiento del cuerpo constituye únicamente una pequeña corrección frente a la dispersión principal originada por la mera presencia del cuerpo. En lo que sigue despreciaremos esta corrección y supondremos, por tanto, que el cuerpo dispersor está inmóvil.

Admitiremos que la longitud de onda λ del sonido es grande en comparación con la dimensión l del cuerpo; para calcular las propiedades de la onda dispersada, podemos utilizar entonces las fórmulas (73.8) y (73.11).† Al hacer esto, consideraremos la onda dispersada como si fuese emitida por el cuerpo; la única diferencia es que en lugar de un movimiento del cuerpo en el fluido tenemos ahora un movimiento del fluido relativo al cuerpo. Evidentemente ambos problemas son equivalentes.

Para el potencial de la onda emitida hemos obtenido la expresión $\phi = -\dot{V}/4\pi r - \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r}/cr^2$. En esta fórmula V era el volumen del cuerpo. Sin embargo, en el caso presente el propio volumen del cuerpo permanece invariable y debe tomarse $\dot{V}$ no como la variación respecto al tiempo del volumen del cuerpo, sino como el volumen del fluido que entraría, por unidad de tiempo, en el volumen V_0 ocupado por el cuerpo, si éste estuviese ausente. De hecho, en presencia del cuerpo este volumen de fluido no penetra dentro

† Al mismo tiempo, la dimensión del cuerpo debe ser grande en comparación con la amplitud del desplazamiento de las partículas del fluido en la onda, puesto que en otro caso el fluido no está, en general, en flujo potencial.

de V_0, lo que es equivalente a la emisión del mismo volumen de fluido desde V_0. Como hemos visto en § 73, el coeficiente de $1/4\pi r$ en el primer término de ϕ debe coincidir exactamente con el volumen de fluido emitido desde el origen por unidad de tiempo. Este volumen es fácil de encontrar. La variación por unidad de tiempo de la masa de fluido en un volumen igual al del cuerpo es $V_0\dot{\rho}$, en donde $\dot{\rho}$ representa la variación respecto al tiempo de la densidad del fluido en la onda sonora incidente (puesto que la longitud de onda es grande en comparación con la dimensión del cuerpo, puede suponerse que la densidad ρ es constante en distancias del orden de esta dimensión; de aquí que podamos escribir la variación respecto al tiempo de la masa del fluido en V_0 como $V_0\dot{\rho}$ simplemente, siendo $\dot{\rho}$ la misma en todo el volumen V_0). La variación de volumen correspondiente a una variación de masa $V_0\dot{\rho}$ es evidentemente $V_0\dot{\rho}/\rho$. Así pues, $\dot{V}$ en la expresión correspondiente a ϕ debe sustituirse por $V_0\dot{\rho}/\rho$. En una onda plana incidente, la parte variable ρ' de la densidad está relacionada con la velocidad por $\rho' = \rho v/c$; de aquí que $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho\dot{v}/c$ y podemos sustituir $V_0\dot{\rho}/\rho$ por $V_0\dot{v}/c$.

Cuando el cuerpo se mueve dentro del fluido, el vector **A** se determina por las fórmulas (11.5), (11.6): $4\pi\rho A_i = m_{ik}u_k + \rho V_0 u_i$. Ahora debemos sustituir la velocidad **u** del cuerpo por la velocidad inversa **v** del fluido en la onda incidente que debería tener en la posición del cuerpo si éste estuviese ausente. Así pues,

$$A_i = -m_{ik}v_k/4\pi\rho - V_0 v_i/4\pi. \tag{76.1}$$

Finalmente, obtenemos para el potencial de la onda dispersada

$$\phi_{sc} = -V_0\dot{v}/4\pi cr - \dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{r}/cr^2, \tag{76.2}$$

viniendo dado el vector **A** por la fórmula (76.1). De aquí que tengamos para la distribución de velocidades de la onda dispersada

$$\mathbf{v}_{sc} = V_0\ddot{v}\mathbf{n}/4\pi rc^2 + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{A}})/rc^2 \tag{76.3}$$

(ver § 73), siendo **n** un vector unidad en la dirección de dispersión.

La cantidad media de energía dispersada por unidad de tiempo dentro de un elemento de ángulo sólido dado do viene dada por el flujo de energía que es $c\rho\overline{\mathbf{v}_{sc}^2 r^2}do$. La intensidad dispersada I_{sc} se obtiene integrando esta expresión respecto a todas las direcciones. La integración del doble del producto de los dos términos que aparecen en (76.3) da cero, puesto que este producto es proporcional al coseno del ángulo formado entre la dirección de la dispersión y la dirección de propagación de la onda incidente y queda entonces [comparar con (73.10) y (73.13)]

$$I_{sc} = \frac{V_0^2\rho}{4\pi c^3}\overline{\dot{v}^2} + \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \tag{76.4}$$

La dispersión está caracterizada, generalmente, por lo que se denomina *sección eficaz efectiva* $d\sigma$, que es el cociente de la energía media (temporal) dispersada dentro de un elemento de ángulo sólido y la densidad de flujo de energía media en la onda incidente. La *sección eficaz efectiva total* σ es la integral de $d\sigma$ en todas las direcciones de dispersión, es decir, el cociente de la intensidad dispersada total y la densidad de flujo de energía incidente, que tiene evidentemente dimensiones de un área.

La densidad de flujo de energía media en la onda incidente es $c\rho\overline{\mathbf{v}^2}$. De aquí que la sección eficaz dispersada efectiva diferencial sea $(c\rho\overline{\mathbf{v}_{sc}^2}/c\rho\overline{\mathbf{v}^2})r^2 d\mathrm{o}$, es decir,

$$d\sigma = (\overline{\mathbf{v}_{sc}^2}/\overline{\mathbf{v}^2})r^2\, d\mathrm{o}. \tag{76.5}$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = \frac{V_0^2}{4\pi c^4}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{v}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} + \frac{4\pi}{3c^4}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}. \tag{76.6}$$

En el caso de una onda incidente monocromática, el valor cuadrático medio de la segunda derivada respecto al tiempo de la velocidad es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Así pues, la sección eficaz efectiva correspondiente a la dispersión del sonido por un cuerpo, que es pequeño en comparación con la longitud de onda, es proporcional a ω^4.

Finalmente, estudiaremos brevemente el caso límite opuesto, en el que la longitud de onda del sonido dispersado es pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo. En este caso toda la dispersión, excepto aquélla correspondiente a la dispersión en ángulos muy pequeños, se debe a la reflexión simple en la superficie del cuerpo. La parte correspondiente de la sección eficaz de dispersión efectiva total es evidentemente igual al área S de la sección recta del cuerpo cortado por un plano perpendicular a la dirección de la onda incidente. La dispersión en ángulos pequeños (del orden de λ/l), sin embargo, constituye la *difracción* en los bordes del cuerpo. No nos detendremos ahora en exponer la teoría de este fenómeno que es totalmente análogo al de la difracción de la luz.† Unicamente mencionaremos que, debido al principio de Babinet, la intensidad total del sonido difractado es igual a la intensidad total del sonido reflejado. De aquí que la parte de difracción de la sección eficaz de dispersión efectiva sea también igual a S, y, por tanto, la sección eficaz total es $2S$.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la sección eficaz efectiva para la dispersión de una onda sonora plana por una esfera maciza de radio R pequeño en comparación con la longitud de onda.

† Ver *Teoría clásica de campos*, §§ 7-7 a 7-9. Editorial Reverté, Barcelona.

Solución. La velocidad en un punto determinado de una onda plana es $v = a\cos\omega t$. En el caso de una esfera (ver § 11, problema 1), el vector **A** es $-R^3\mathbf{v}/2$. Para la sección eficaz efectiva diferencial tenemos

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}(1 - \tfrac{3}{2}\cos\theta)^2\, do,$$

siendo θ el ángulo formado por la dirección de la onda incidente y la dirección de dispersión. La intensidad dispersada es máxima en dirección $\theta = \pi$, que es la que tiene sentido opuesto a la de la onda incidente. La sección eficaz efectiva es

$$\sigma = (7\pi/9)(R^3\omega^2/c^2)^2. \tag{1}$$

En este caso se supone (y lo mismo en los problemas 3 y 4, a continuación) que la densidad ρ_0 de la esfera es grande en comparación con la densidad ρ del gas; si no fuese así, sería necesario tener en cuenta el movimiento de la esfera debido a las fuerzas de presión ejercida sobre ella por el gas oscilante.

Problema 2. Determinar la sección eficaz efectiva correspondiente a la dispersión del sonido por una gota de fluido, teniendo en cuenta la compresibilidad del mismo y el movimiento de la gota producido por la onda incidente.

Solución. Cuando la presión del gas que rodea la gota varía adiabáticamente en p', el volumen de la gota se reduce en $(V_0/\rho_0)(\partial\rho_0/\partial p)_s p'$, en donde ρ_0 es la densidad de la gota. Pero $(\partial p/\partial\rho_0)_s$ es el cuadrado de la velocidad del sonido c_0 en el fluido y la variación de presión dentro de una onda plana está relacionada con la velocidad por $p' = vc\rho$, siendo ρ la densidad del gas. Así pues, la disminución del volumen de la gota es $V_0 \dot{v} c\rho/c_0^2\rho_0$ por unidad de tiempo. En las expresiones (76.2) y (76.3) debemos ahora sustituir $V_0\dot{v}/c$ por la diferencia $V_0(\dot{v}/c - vc\rho/c_0^2\rho_0)$. Además, en la expresión correspondiente a **A** debemos sustituir $-\mathbf{v}$ por la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, en donde **u** es la velocidad adquirida por la gota como resultado de la acción de la onda incidente. En el caso de una esfera tenemos, utilizando los resultados del § 11, problema 1, $\mathbf{A} = R^3\mathbf{v}(\rho - \rho_0)/(2\rho_0 + \rho)$. Sustituyendo estas expresiones, tenemos para la sección eficaz efectiva el valor

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left\{\left(1 - \frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right) - 3\cos\theta\frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0 + \rho}\right\}^2 do.$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^4 R^6}{9c^4}\left\{\left(1 - \frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right)^2 + \frac{3(\rho_0 - \rho)^2}{(2\rho_0 + \rho)^2}\right\}.$$

Problema 3. Determinar la sección eficaz efectiva para la dispersión del sonido por una esfera sólida de radio R pequeño en comparación con $\sqrt{(\nu/\omega)}$. Se supone que el calor específico de la esfera es tan grande que puede considerarse su temperatura como constante.

Solución. En este caso hemos de tener en cuenta el efecto de la viscosidad del gas sobre el movimiento de la esfera y debe modificarse el vector **A** como se indica en § 73, problema 2. Para $R\sqrt{(\omega/\nu)} \ll 1$ tenemos $\mathbf{A} = -3iR\nu\mathbf{v}/2\omega$.

La conductividad térmica del gas da como resultado también una dispersión del mismo orden. Sea $T'_0 e^{-i\omega t}$ la variación de temperatura en un punto determinado de la onda

sonora. La distribución de temperaturas cerca de una esfera es (ver § 52, problema 2)

$$T' = T'_0 e^{-i\omega t}[1-(R/r)e^{-(1-i)(r-R)\sqrt{(\omega/2\chi)}}]$$

(en el caso en que $r = R$ debemos tener $T' = 0$). La cantidad de calor transferida del gas a la esfera por unidad de tiempo es [en el caso en que $R\sqrt{(\omega/\chi)} \ll 1$] $q = 4\pi R^2\kappa[dT'/dr]_{r=R} = 4\pi R\kappa T'_0 e^{-i\omega t}$. Esta transferencia de calor da como resultado una variación del volumen del gas que puede considerarse que influye en la dispersión como una variación efectiva correspondiente del volumen de la esfera, $\dot{V} = 4\pi R\chi\beta T'_0 e^{-i\omega t} = -4\pi R\chi(\gamma-1)v/c$, siendo β el coeficiente de dilatación térmica del gas y $\gamma = c_p/c_v$; hemos utilizado también las fórmulas (63.13) y (77.2).

Teniendo en cuenta ambos efectos, obtenemos la sección eficaz de dispersión efectiva diferencial

$$d\sigma = (\omega R/c^2)^2[\chi(\gamma-1)-\tfrac{3}{2}\nu\cos\theta]^2\,do.$$

La sección eficaz efectiva total es

$$\sigma = 4\pi(\omega R/c^2)^2[\chi^2(\gamma-1)^2+\tfrac{3}{4}\nu^2].$$

Estas fórmulas son válidas únicamente si la fuerza de rozamiento de Stokes es pequeña en comparación con la fuerza de inercia, es decir, si $\eta R \ll M\omega$, en donde $M = 4\pi R^3\rho_0/3$ es la masa de la esfera; en otro caso, el movimiento de la esfera debido a las fuerzas de viscosidad resulta ser importante.

Problema 4. Determinar la fuerza media ejercida sobre una esfera sólida que dispersa una onda sonora plana ($\lambda \gg R$).

Solución. El impulso transmitido por unidad de tiempo desde la onda incidente a la esfera, es decir, la fuerza requerida, es la diferencia entre el impulso de la onda incidente y el flujo del impulso total en la onda dispersada. A partir de la onda incidente se dispersa un flujo de energía $\sigma c\overline{E}_0$, siendo E_0 la densidad de energía de la onda incidente; el flujo del impulso correspondiente se obtiene dividiendo por c y vale, por tanto, σE_0. En la onda dispersada, el flujo del impulso dentro del elemento de ángulo sólido es $E_{sc}r^2do = E_0 d\sigma$; proyectando este valor en la dirección de propagación de la onda incidente (que evidentemente es la dirección de la fuerza buscada), e integrando respecto a todos los ángulos, obtenemos

$$\overline{E_0}\int\cos\theta\,d\sigma.$$

Así pues, la fuerza ejercida sobre la esfera es

$$F = \overline{E_0}\int(1-\cos\theta)d\sigma.$$

Sustituyendo el valor $d\sigma$ obtenido del problema 1, obtenemos $F = 11\pi\omega^4R^6E_0/9c^4$.

§ 77. Absorción del sonido

La existencia de la viscosidad y de la conductividad térmica da como resultado la disipación de la energía de las ondas sonoras y, en consecuencia, el sonido es *absorbido*, es decir, su intensidad disminuye progresivamente. Para calcular la velocidad de disipación de energía E_{mec}, utilizaremos los razonamientos generales siguientes. La energía mecánica coincide con la cantidad máxima de trabajo que puede realizarse al pasar de un estado dado de no equilibrio a otro de equilibrio termodinámico. Como sabemos, a partir de la

termodinámica,† el trabajo máximo se obtiene cuando la transición es reversible (es decir, sin variación de entropía) y vale entonces $E_{\text{mec}} = E_0 - E(S)$, en donde E_0 es el valor inicial dado de la energía y $E(S)$ es la energía en el estado de equilibrio con la misma entropía S que el sistema tenía inicialmente. Derivando respecto al tiempo, obtenemos $\dot{E}_{\text{mec}} = -\dot{E}(S) = -(\partial E/\partial S)\dot{S}$. La derivada de la energía respecto a la entropía es la temperatura. De aquí que $\partial E/\partial S$ sea la temperatura que el sistema tendría si estuviese en equilibrio termodinámico (con el valor dado de la entropía). Designando esta temperatura por T_0, tenemos, por tanto, $\dot{E}_{\text{mec}} = -T_0\dot{S}$.

Utilicemos para $\dot{S}$ la expresión (49.6), que da la variación respecto al tiempo de la entropía, debida tanto a la conducción térmica como a la viscosidad. Puesto que la temperatura T varía sólo ligeramente a través del fluido y difiere poco de T_0, puede sacarse fuera de la integral y entonces puede escribirse T_0 simplemente como T:

$$\dot{E}_{\text{mech}} = -\frac{\kappa}{T}\int (\mathbf{grad}\, T)^2\, \mathrm{d}V - \tfrac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 \mathrm{d}V -$$

$$-\zeta\int (\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2\, \mathrm{d}V. \qquad (77.1)$$

Esta fórmula generaliza la fórmula (16.3) al caso de un fluido compresible que conduce el calor.

Supongamos que el eje x está en la dirección de propagación de la onda sonora. Entonces $v_x = v_0\cos(kx - \omega t)$, $v_y = v_z = 0$. Los dos últimos términos en (77.1) dan

$$-(\tfrac{4}{3}\eta + \zeta)\int\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}V = -k^2(\tfrac{4}{3}\eta + \zeta)v_0^2\int \mathrm{sen}^2(kx - \omega t)\, \mathrm{d}V.$$

Como es natural, estamos interesados únicamente en el promedio temporal; tomando este promedio, tenemos $-k^2(4\eta/3 + \zeta)\cdot v_0^2 V_0/2$, siendo V_0 el volumen del fluido.

A continuación, calculemos el primer término en (77.1). La desviación T' de la temperatura en la onda sonora respecto a su valor de equilibrio está relacionada con la velocidad a través de la fórmula (63.13), de modo que el gradiente de temperatura es

$$\partial T/\partial x = (\beta c T/c_p)\,\partial v/\partial x = -(\beta c T/c_p)v_0 k\,\mathrm{sen}(kx - \omega t).$$

Para el promedio temporal del primer término de (77.1) obtenemos $-\kappa c^2 T\beta^2 v_0^2 k^2 V_0/2c_p^2$. Utilizando las fórmulas termodinámicas bien conocidas

$$c_p - c_v = T\beta^2(\partial p/\partial\rho)_T = T\beta^2(c_v/c_p)(\partial p/\partial\rho)_s = T\beta^2 c^2 c_v/c_p, \qquad (77.2)$$

† Ver, por ejemplo, *Física Estadística*, § 19.

podemos volver a escribir esta expresión como $-\frac{1}{2}\kappa(1/c_v - 1/c_p)k^2v_0^2V_0$.

Reuniendo los resultados anteriores, encontramos el valor medio de la disipación de energía:

$$\dot{\bar{E}}_{\text{mech}} = -\tfrac{1}{2}k^2v_0^2V_0[(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)+\kappa(1/c_v-1/c_p)]. \tag{77.3}$$

La energía total de la onda sonora es

$$\bar{E} = \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 V_0. \tag{77.4}$$

El coeficiente de amortiguamiento deducido en § 25, en el caso de las ondas de gravedad, da el modo de disminución de la intensidad con el tiempo. Sin embargo, en el caso de las ondas sonoras, el problema se establece de ordinario de un modo ligeramente distinto: una onda sonora se propaga a través de un fluido y su intensidad disminuye con la distancia x recorrida. Es evidente que esta disminución se producirá de acuerdo con una ley $e^{-2\gamma x}$ y la amplitud disminuirá como $e^{-\gamma x}$, en donde el *coeficiente de absorción* γ viene definido por

$$\gamma = |\dot{\bar{E}}_{\text{mec}}|/2c\bar{E}. \tag{77.5}$$

Sustituyendo aquí (77.3) y (77.4), encontramos la expresión siguiente para el coeficiente de absorción del sonido:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{77.6}$$

Podemos señalar que es proporcional al cuadrado de la frecuencia del sonido.†

Esta fórmula es aplicable en tanto que el coeficiente de absorción determinado por ella sea pequeño: la amplitud debe disminuir relativamente poco en distancias del orden de una longitud de onda (es decir, debemos tener $\gamma c/\omega \ll 1$). La deducción anterior se basa, esencialmente, en esta hipótesis, puesto que hemos calculado la disipación de energía utilizando la expresión para una onda sonora no amortiguada. En el caso de los gases, esta condición se satisface en la práctica siempre. Consideremos, por ejemplo, el primer término en (77.6). La condición $\gamma c/\omega \ll 1$ significa que $\nu\omega/c^2 \ll 1$. Sin embargo, se sabe a partir de la teoría cinética de los gases que el coeficiente de viscosidad ν para un gas es del orden del producto de recorrido libre medio l por la velocidad térmica media de la molécula; la última es del mismo orden que la velocidad del sonido en el gas, de modo que $\nu \sim lc$. De

† M. A. Isakovich ha demostrado que debe existir una absorción especial cuando el sonido se propaga en un sistema de dos fases (una *emulsión*). Debido a las diferentes propiedades termodinámicas de los dos componentes, sus variaciones de temperatura durante el paso del sonido serán, en general, distintas. El intercambio térmico resultante entre los componentes conduce a una absorción adicional del sonido. Teniendo en cuenta la lentitud relativa de este intercambio de calor, tiene lugar con una rapidez comparativamente grande una considerable dispersión del sonido. Para cálculos detallados ver M. A. Isakovich, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **18**, 907, 1948.

aquí que tengamos

$$\nu\omega/c^2 \sim l\omega/c \sim l/\lambda \ll 1, \tag{77.7}$$

puesto que sabemos que $l \ll \lambda$. El término de conducción térmica en (77.6) da el mismo resultado, puesto que $\chi \sim \nu$.

En los líquidos, la condición de absorción pequeña se ve siempre cumplida cuando el problema de la absorción sonora, como hemos afirmado aquí, tiene significado en el punto considerado. La absorción en una longitud de onda puede resultar grande únicamente si las fuerzas de viscosidad son comparables con las fuerzas de presión que se producen cuando las sustancias se comprimen. Sin embargo, en estas condiciones la propia ecuación de Navier-Stokes (con los coeficientes de viscosidad independientes de la frecuencia) resulta que carece de validez y se produce una dispersión considerable del sonido, debido a procesos de rozamiento interno.†

En el caso de la absorción del sonido, la relación existente entre el número de onda y la frecuencia puede escribirse, evidentemente,

$$k = \omega/c + ia\omega^2, \tag{77.8}$$

en donde a designa el coeficiente de ω^2 en el coeficiente de absorción $\gamma = a\omega^2$. Es fácil ver, a partir de esta expresión, cómo debe modificarse la ecuación correspondiente a la onda sonora móvil, con objeto de tener en cuenta la absorción. Para ello observemos que, en ausencia de absorción, la ecuación diferencial para (por ejemplo) la presión $p' = p'(x - ct)$ puede escribirse $\partial p'/\partial x = -(1/c)\partial p'/\partial t$. La ecuación cuya solución es $e^{i(kx-\omega t)}$, con k dada por (77.8), debe ser, evidentemente,

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t} + a\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \tag{77.9}$$

Si sustituimos t por $\tau + x/c$, esta ecuación se transforma en

$$\partial p'/\partial x = a\,\partial^2 p'/\partial \tau^2,$$

es decir, es una ecuación monodimensional de conducción térmica.

La solución general de esta ecuación puede escribirse (ver § 51)

$$p'(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi a x)}} \int p'_0(\tau') \exp[-(\tau' - \tau)^2/4ax]\, d\tau', \tag{77.10}$$

en donde $p'_0(\tau) = p'(0, \tau)$. Si la onda se emite durante un intervalo de tiempo finito, la expresión se transforma, a distancias suficientemente grandes del foco, en

$$p'(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi a x)}} \exp(-\tau^2/4ax) \int p'_0(\tau')\, d\tau'. \tag{77.11}$$

† Un caso especial en que es posible una intensa absorción, pero que puede estudiarse por los métodos usuales, es el de un gas con una conductividad térmica anormalmente grande en comparación con su viscosidad, para tener en cuenta efectos tales como la transferencia radiativa a temperaturas muy elevadas (ver problema 3).

En otras palabras, el perfil de la onda a grandes distancias es gaussiano. Su «anchura» es del orden de $\sqrt{(ax)}$, es decir, aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia recorrida por la onda, mientras que la amplitud disminuye inversamente a $\sqrt{x}$. De aquí se puede obtener la conclusión de que la energía total de la onda disminuye como $1/\sqrt{x}$.

Es fácil deducir formas análogas para ondas esféricas; para ello debemos utilizar el hecho de que en dichas ondas

$$\int p' \mathrm{d}t = 0$$

(ver § 69). En lugar de (77.11) tenemos ahora

$$p'(r,\tau) = \text{constante} \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\exp(-\tau^2/4ar)}{\sqrt{r}},$$

o sea,

$$p'(r,\tau) = \text{constante} \times \frac{\tau}{r^{\frac{5}{2}}} \exp(-\tau^2/4ar). \tag{77.12}$$

Debe producirse una absorción intensa cuando una onda sonora se refleja en una pared sólida (K. F. HERZFELD, 1938; B. P. KONSTANTINOV, 1939). La razón de este comportamiento es la siguiente. En una onda sonora sufren oscilaciones periódicas alrededor de sus valores medios, no sólo la densidad y la presión, sino también la temperatura. Por tanto, cerca de una pared maciza existe una diferencia de temperaturas con fluctuación periódica entre el fluido y la pared, aunque la temperatura media del fluido sea igual a la de la pared. Sin embargo, en la propia pared su temperatura y la del fluido que está en contacto deben ser iguales. Como resultado, se produce un gran gradiente de temperatura en una capa límite delgada de fluido, en donde la temperatura varía rápidamente desde su valor en la onda sonora a la temperatura de la pared. Sin embargo, la presencia de gradientes de temperatura grandes dan como resultado una elevada disipación de energía por conducción térmica. Por una razón semejante la viscosidad del fluido conduce a una absorción intensa del sonido cuando la onda incide en dirección oblicua. En este caso la velocidad del fluido de la onda (en la dirección de propagación) tiene una componente tangencial a la superficie no nula. Sin embargo, en la propia superficie el fluido debe «adherirse» por completo. De aquí que deba producirse un gradiente de velocidades tangencial grande† en la capa límite de fluido, dando como resultado una disipación de energía viscosa importante (ver problema 1).

† La componente de velocidad normal es cero en el límite debido a las condiciones en la frontera, exista o no la viscosidad.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la fracción de energía que se absorbe cuando una onda sonora se refleja en una pared sólida. La densidad de la pared se supone tan grande que el sonido no penetra en ella y el calor específico es también tan elevado que la temperatura de la pared puede suponerse constante.

Solución. Tomemos el plano de la pared como plano $x = 0$, y el plano de incidencia como plano xy. Sea θ el ángulo de incidencia (que es igual al ángulo de reflexión). La variación de densidad de la onda incidente en un punto cualquiera de la superficie ($x = y = 0$, por ejemplo) es $\rho'_1 = Ae^{-i\omega t}$. La onda reflejada tiene la misma amplitud, de modo que $\rho'_2 = \rho'_1$ en la pared. La variación real de la densidad de fluido, puesto que ambas ondas (incidente y reflejada) se propagan simultáneamente, es $\rho' = 2Ae^{-i\omega t}$. La velocidad del fluido en la onda viene dada por $\mathbf{v}_1 = c\rho'_1\mathbf{n}_1/\rho$, $\mathbf{v}_2 = c\rho'_2\mathbf{n}_2/\rho$. La velocidad total en la pared, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, es, por tanto, $v = v_y = 2A \operatorname{sen}\theta \times ce^{-i\omega t}/\rho$ (o, más precisamente, esta es la velocidad que se encuentra cuando no se aplican las condiciones límites correctas en la pared en presencia de viscosidad). La variación real de la velocidad v_y a lo largo de la pared está determinada por la fórmula (24.13) y la disipación de energía debida a la viscosidad por la fórmula (24.14), en la cual debe sustituirse la expresión anterior para v por $v_0e^{-i\omega t}$.

La desviación T' de la temperatura, respecto a su valor medio (que es la temperatura de la pared), se calcula sin utilización de las condiciones límites correctas en la pared, resultando ser, entonces [ver (63.13)], $T' = 2Ac^2T\beta e^{-i\omega t}/c_p\rho$. Sin embargo, en realidad, la distribución de temperaturas está determinada por la ecuación de conducción térmica, con la condición límite $T' = 0$ para $x = 0$, y de acuerdo con esto viene dada por una fórmula totalmente semejante a (24.13).

Al calcular la disipación de energía debida a la conducción térmica, conforme al primer término de la fórmula (77.1), obtenemos para la disipación de energía total por unidad de área de la pared:

$$\bar{E}_{\text{mech}} = -\frac{A^2c^2\sqrt{(2\omega)}}{\rho}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sqrt{\nu}\operatorname{sen}^2\theta\right].$$

La densidad de flujo de energía media incidente sobre la unidad de área de la pared a partir de la onda incidente es $\overline{c\rho v_1^2}\cos\theta(c^3A^2/2\rho)\cos\theta$. De aquí que la fracción de energía absorbida en la reflexión sea

$$\frac{2\sqrt{(2\omega)}}{c\cos\theta}\left[\sqrt{\nu}\operatorname{sen}^2\theta+\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right].$$

Esta expresión es válida únicamente si su valor es pequeño (puesto que al deducirlo hemos supuesto que las amplitudes de las ondas incidente y reflejada son iguales). Esta condición significa que el ángulo de incidencia θ no debe ser demasiado próximo a $\pi/2$.†

Problema 2. Determinar el coeficiente de absorción del sonido que se propaga en una tubería cilíndrica.

Solución. La contribución principal a la absorción se debe a la presencia de las paredes. El coeficiente de absorción γ es igual a la energía disipada en las paredes por unidad

† Puede verse un cálculo de la absorción del sonido en la reflexión con un ángulo cualquiera en B. P. KONSTANTINOV, *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, **9**, 226, 1939.

de tiempo y por unidad de longitud de la tubería, dividida por el doble del flujo de energía total que atraviesa una sección recta de la misma. Un cálculo totalmente semejante al dado en el problema 1 conduce al resultado

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2Rc}}\left[\sqrt{\nu}+\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right],$$

siendo R el radio de la tubería.

Problema 3. Hallar la relación de dispersión para el sonido que se propaga en un medio de conductividad térmica muy alta.

Solución. En presencia de una conductividad térmica elevada el flujo de una onda sonora no es adiabático. De aquí que tengamos ahora, en lugar de la condición de entropía constante,

$$\dot{s} = \kappa \triangle T'/\rho T, \tag{1}$$

que es la forma linearizada de la ecuación (49.4) sin los términos de viscosidad. Como segunda ecuación tomaremos

$$\ddot{\rho}' = \triangle p', \tag{2}$$

que se obtiene eliminando **v** entre las ecuaciones (63.2) y (63.3). Tomando como variables fundamentales p' y T', escribiremos ρ' y s' en la forma

$$\rho' = (\partial\rho/\partial T)_p T' + (\partial\rho/\partial p)_T p', \quad s' = (\partial s/\partial T)_p T' + (\partial s/\partial p)_T p'.$$

Sustituyamos estas expresiones en (1) y (2), y luego busquemos T' y p' en una forma proporcional a $e^{i(kx-\omega t)}$. La condición de compatibilidad para las dos ecuaciones resultantes para p' y T' puede transformarse (utilizando diversas relaciones entre las derivadas de las magnitudes termodinámicas) en la forma

$$k^4 - k^2\left(\frac{\omega^2}{{c_T}^2}+\frac{i\omega}{\chi}\right)+\frac{i\omega^3}{\chi {c_s}^2} = 0, \tag{3}$$

que da la relación buscada entre k y ω. Aquí hemos utilizado la notación

$${c_s}^2 = (\partial p/\partial\rho)_s, \quad {c_T}^2 = (\partial p/\partial\rho)_T = {c_s}^2/\gamma,$$

en donde $\gamma = c_p/c_v$ es el cociente de los calores específicos.

En el caso límite de frecuencias pequeñas ($\omega \ll c^2/\chi$), la ecuación (3) da

$$k = \frac{\omega}{c_s}+i\frac{\omega^2\chi}{2c_s}\left(\frac{1}{{c_T}^2}-\frac{1}{{c_s}^2}\right),$$

que corresponde la propagación del sonido con la velocidad ordinaria «adiabática» c_s y un coeficiente de absorción pequeño que es el segundo término de (77.6). Esto es como debería ocurrir, puesto que la condición $\omega \ll c^2/\chi$, significa que durante un período el calor puede transmitirse únicamente en una distancia $\sim\sqrt{(\chi/\omega)}$ [comparar con (51.7)] que es pequeña en comparación con la longitud de onda c/ω.

En el caso límite opuesto de frecuencias grandes tenemos, a partir de (3),

$$k = \frac{\omega}{c_T}+i\frac{c_T}{2\chi {c_s}^2}({c_s}^2-{c_T}^2).$$

En este caso el sonido se propaga con la velocidad «isoterma» c_T, que es siempre menor que c_s. El coeficiente de absorción es de nuevo pequeño en comparación con el valor

inverso de la longitud de onda y es independiente de la frecuencia e inversamente proporcional a la conductividad térmica.†

Problema 4. Determinar la absorción adicional debida a la difusión del sonido que se propaga en una mezcla de dos sustancias (I. G. SHAPOSHNIKOV y Z. A. GOL'DBERG, 1952).

Solución. La mezcla contiene una fuente adicional de absorción del sonido debido a que los gradientes de temperatura y de presión que se presentan en la onda sonora dan como resultado procesos irreversibles de difusión térmica y de barodifusión (pero, evidentemente, no existe ningún gradiente de concentración de masas y, por tanto, no hay transferencia de masa). La absorción viene dada por el término

$$(1/T\rho D)(\partial\mu/\partial C)_{p,T}\int \mathbf{i}^2\,dV$$

en la variación de entropía por unidad de tiempo (58.13); llamamos aquí C a la concentración para distinguirla de c, velocidad del sonido. El flujo de difusión es

$$\mathbf{i} = -\rho D[(k_T/T)\,\mathbf{grad}\,T+(k_p/p)\,\mathbf{grad}\,p],$$

dado k_p por (58.10). Un cálculo semejante al dado en § 77, utilizando diversas relaciones entre las derivadas de las magnitudes termodinámicas, conduce al resultado de que a la expresión (77.6) para el coeficiente de absorción debe añadirse un término

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2(\partial\mu/\partial C)_{p,T}}\left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{p,T}+\frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,C}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,T}\right\}^2.$$

Problema 5. Determinar la sección eficaz efectiva para la absorción del sonido por una esfera de radio pequeño en comparación con $\sqrt{(\nu/\omega)}$.

Solución. La absorción total está compuesta de los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica del gas. El primero viene dado por el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de Stokes cuando el gas se mueve dentro de un flujo de una onda sonora que rodea la esfera; como en § 76, problema 3, se supone que la esfera no se mueve por la acción de esta fuerza. El efecto de la conductividad viene dado por la cantidad de calor q transferido del gas a la esfera por unidad de tiempo (§ 76, problema 3): la disipación de energía cuando se transfiere la cantidad de calor q, es qT'/T, siendo T' la diferencia de temperatura existente entre el gas (lejos de la esfera) y la propia esfera. La sección eficaz de absorción efectiva total resulta ser

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c}\left[3\nu+2\chi\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right].$$

§ 78. Segunda viscosidad

El coeficiente de viscosidad segundo ζ (que denominaremos simplemente la *segunda viscosidad*) es, normalmente, del mismo orden de magnitud que

† La raíz segunda de la ecuación (3), que es cuadrática en k^2, corresponde a «ondas térmicas» que son rápidamente amortiguadas con el incremento de x. En el límite $\omega\chi \ll c^2$ esta raíz da:

$$k = \sqrt{(i\omega/\chi)} = (1+i)\sqrt{(\omega/2\chi)},$$

de acuerdo con (52.17). En el caso $\omega\chi \gg c^2$ tenemos

$$k = (1+i)\sqrt{(\omega c_v\rho/2\chi c_p)}.$$

el coeficiente de viscosidad η. Sin embargo, existen casos en los que ζ puede tomar valores que superan considerablemente a η. Como sabemos, la segunda viscosidad aparece en los procesos que vienen acompañados de un cambio de volumen (es decir, de la densidad) del fluido. En la compresión o expansión, como en cualquier variación rápida de estado, el fluido deja de estar en equilibrio termodinámico y se establecen procesos internos en los que tiende a restaurar su equilibrio. Estos procesos son, normalmente, tan rápidos (es decir, su tiempo de relajación es tan corto) que la restauración del equilibrio sigue a la variación de volumen casi inmediatamente, a no ser, como es natural, que la variación del volumen por unidad de tiempo sea muy grande.

Sin embargo, puede ocurrir que los tiempos de relajación de los procesos de restauración del equilibrio sean largos, es decir, tengan lugar con una lentitud comparativamente alta. Por ejemplo, si se trata de un gas o un líquido que sea una mezcla de sustancias entre las que se producen reacciones químicas, existe un estado de equilibrio químico caracterizado por las concentraciones de las sustancias de la mezcla para cualquier densidad y temperatura determinadas. Por ejemplo, si comprimimos el fluido, se destruye el estado de equilibrio del fluido y empieza una reacción como resultado de la cual la concentración de la sustancia tiende a tomar los valores de equilibrio correspondientes a las nuevas densidad y temperatura. Si esta reacción no es rápida, la restauración del equilibrio se produce de modo relativamente lento y no sigue inmediatamente a la compresión. El último proceso es acompañado entonces por procesos internos que tienden hacia el estado de equilibrio. Pero los procesos que establecen el equilibrio son irreversibles; hacen aumentar la entropía y, por tanto, en ellos interviene una disipación de energía. De aquí que si el tiempo de relajación de estos procesos es largo se produzca una disipación considerable de energía cuando se comprime o se expansiona el fluido, y, puesto que esta disipación debe estar acompañada por la segunda viscosidad, se obtiene la conclusión de que ζ es grande.†

La intensidad de los procesos disipativos, y, por tanto, el valor de ζ, depende, como es natural, de la relación existente entre la velocidad de compresión o de expansión y el tiempo de relajación. Por ejemplo, si tenemos una compresión o expansión debida a una onda sonora, la segunda viscosidad dependerá de la frecuencia de la onda. Así pues, la segunda viscosidad no es precisamente una constante característica del material considerado, sino que depende de la frecuencia del movimiento en el cual aparece. La dependencia de ζ con la frecuencia se denomina *dispersión*.

† Un proceso lento que da como resultado un valor grande de ζ suele ser la transferencia de energía desde los grados de libertad de traslación de una molécula a los grados de libertad de vibración (intramoleculares).

El método general siguiente de estudiar todos estos fenómenos se debe a L. I. MANDEL'SHTAM y M. A. LEONTOVICH (1937). Sea ξ cierta magnitud física que caracteriza el estado de un cuerpo y ξ_0 su valor en el estado de equilibrio; ξ_0 es una función de la temperatura y de la densidad. Por ejemplo, en mezclas de fluidos, ξ puede ser la concentración de un componente y entonces ξ_0 es la concentración en el caso de equilibrio químico.

Si el cuerpo no está en equilibrio, ξ variará con el tiempo, tendiendo al valor ξ_0. En estados próximos al equilibrio, la diferencia $\xi - \xi_0$ es pequeña y podemos desarrollar la variación por unidad de tiempo $\dot{\xi}$ de ξ en una serie de potencias de esta diferencia. El término de orden cero está ausente, puesto que $\dot{\xi}$ es cero en el estado de equilibrio, es decir, cuando $\xi = \xi_0$. De aquí que, hasta el término de primer orden, tengamos

$$\dot{\xi} = -(\xi - \xi_0)/\tau. \tag{78.1}$$

El coeficiente de proporcionalidad debe ser negativo, puesto que en otro caso ξ no tendería a un límite finito. La constante positiva τ tiene dimensiones de tiempo y puede considerarse como el tiempo de relajación para el proceso en cuestión; cuanto mayor es τ, más lentamente tiene lugar la aproximación al equilibrio.

En lo que sigue consideraremos procesos en los que el fluido está sometido a una compresión y expansión adiabática† periódica, de modo que la parte variable de la densidad (y de las demás magnitudes termodinámicas) depende del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$; estamos considerando una onda sonora en el fluido. Junto con la densidad y las demás magnitudes, la posición de equilibrio varía también, de modo que ξ_0 puede escribirse como $\xi_0 = \xi_{00} + \xi_0'$, en donde ξ_{00} es el valor constante de ξ_0 correspondiente a la densidad media y ξ_0' es una parte periódica proporcional a $e^{-i\omega t}$. Escribiendo el verdadero valor ξ en la forma $\xi = \xi_{00} + \xi'$, obtenemos en conclusión, a partir de la ecuación (78.1), que ξ' también es una función periódica del tiempo relacionada con ξ_0' por

$$\xi' = \xi_0'/(1 - i\omega\tau). \tag{78.2}$$

Calculemos la derivada de la presión respecto a la densidad para el proceso en cuestión. La presión debe considerarse ahora como una función de la densidad y del valor de ξ en el estado considerado, y también de la entropía, que suponemos constante y omitimos para mayor brevedad. Entonces,

$$\partial p/\partial \rho = (\partial p/\partial \rho)_\xi + (\partial p/\partial \xi)_\rho \, \partial \xi/\partial \rho.$$

De acuerdo con (78.2), sustituyamos aquí

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho},$$

† La variación de entropía (en estados próximos al equilibrio) es de segundo orden de magnitud. De aquí que podamos hablar de un proceso adiabático con este orden de exactitud.

obteniendo así

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1-i\omega\tau}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right\}.$$

La suma $(\partial p/\partial \rho)_\xi + (\partial p/\partial \xi)_\rho \partial \xi_0/\partial \rho$ es exactamente la derivada de p respecto a ρ para un proceso que es tan lento que el fluido permanece en equilibrio. Designándola por $(\partial p/\partial \rho)_{eq}$, tenemos, finalmente,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1-i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{eq} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right]. \tag{78.3}$$

A continuación, supongamos que p_0 es la presión en un estado de equilibrio termodinámico; p_0 está relacionada con las demás magnitudes termodinámicas por la ecuación de estado del fluido y está totalmente determinada cuando la densidad y la entropía están dadas. Sin embargo, la presión p en un estado de no equilibrio difiere de p_0 y es una función también de ξ. Si la densidad aumenta adiabáticamente en $\delta\rho$, la presión de equilibrio varía en $\delta p_0 = (\partial p/\partial \rho)_{eq}\delta\rho$, mientras que el aumento total de la presión es $(\partial p/\partial \rho)\delta\rho$, viniendo dado $\partial p/\partial \rho$ por la fórmula (78.3). De aquí que la diferencia $p - p_0$ entre la presión verdadera y la presión de equilibrio, en un estado en donde la densidad es $\rho + \delta\rho$, vale

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{eq}\right]\delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{eq} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right]\delta\rho. \tag{78.3a}$$

Ahora estamos interesados en las variaciones de densidad debidas al movimiento del fluido. Entonces $\delta\rho$ está relacionado con la velocidad a través de la ecuación de continuidad, que escribiremos en la forma $\mathrm{d}(\delta\rho)/\mathrm{d}t + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, en donde $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ designa la derivada temporal total. En un movimiento periódico tenemos $\mathrm{d}(\delta\rho)/\mathrm{d}t = -i\omega\delta\rho$, y, por tanto, $\delta\rho = (\rho/i\omega)\operatorname{div}\mathbf{v}$. Sustituyendo esta expresión en (78.3a), obtenemos

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(c_0^2 - c_\infty^2)\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{78.4}$$

en donde hemos hecho uso de la notación

$$c_0^2 = (\partial p/\partial \rho)_{eq}, \quad c_\infty^2 = (\partial p/\partial \rho)_\xi, \tag{78.5}$$

cuyo significado explicaremos a continuación.

Con objeto de relacionar estas expresiones con la viscosidad del fluido, escribiremos a continuación el tensor de tensiones σ_{ik}. En este tensor la presión aparece en el término $-p\delta_{ik}$. Restando la presión p_0 determinada a través de la ecuación de estado, encontramos que en un estado de no-equilibrio σ_{ik} contiene un término adicional

$$-(p - p_0)\delta_{ik} = \frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(c_\infty^2 - c_0^2)\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Comparando este término con la expresión general (15.2) y (15.3) para el tensor de tensiones, en el que div **v** aparece en el término ζ div **v**, llegamos a la conclusión de que la presencia de procesos lentos que tienden a establecer el equilibrio es macroscópicamente equivalente a la presencia de una segunda viscosidad dada por

$$\zeta = \tau\rho(c_\infty^2 - c_0^2)/(1 - i\omega\tau). \tag{78.6}$$

Estos procesos no influyen en la viscosidad ordinaria η. Para aquellos procesos tan lentos en los que $\omega\tau \ll 1$, ζ es

$$\zeta_0 = \tau\rho(c_\infty^2 - c_0^2); \tag{78.7}$$

aumenta con el tiempo de relajación τ, de acuerdo con lo que dijimos anteriormente. Para frecuencias grandes, ζ depende de la frecuencia, es decir, presenta una dispersión.

Consideremos ahora la cuestión de cómo influye en la propagación del sonido en un fluido la presencia de procesos con tiempos de relajación grandes (para mayor definición, hablaremos de reacciones químicas). Para ello, podemos partir de la ecuación del movimiento de un fluido viscoso, viniendo dada ζ por la fórmula (78.6). Sin embargo, es más sencillo considerar un movimiento en el cual se desprecia la viscosidad, pero la presión viene dada por las fórmulas anteriores en lugar de venir dada por la ecuación de estado. Las relaciones generales que obtuvimos en § 63 siguen siendo, entonces, formalmente aplicables. En particular, el número de onda y la frecuencia siguen estando relacionados por $k = \omega/c$, en donde $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)}$, y la derivada $\partial p/\partial \rho$ viene ahora dada por (78.3); sin embargo, la magnitud c deja ya de designar la velocidad del sonido al ser compleja. Así pues, obtenemos

$$k = \omega\sqrt{[(1 - i\omega\tau)/(c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau)]}. \tag{78.8}$$

El «número de onda» dado por esta fórmula es complejo. El significado de este hecho se ve fácilmente. En una onda plana, todas las magnitudes dependen de la coordenada x (estando el eje x en la dirección de propagación) a través de un factor e_{ikx}. Escribiendo k en la forma $k = k_1 + ik_2$, con k_1, k_2 reales, tenemos $e^{ikx} = e^{ik_1x}\, e^{-k_2x}$, es decir, además del factor periódico e^{ik_1x}, tenemos un factor de amortiguamiento e^{-k_2x} (como es natural, k_2 debe ser positivo). Así pues, la naturaleza compleja del número de onda expresa formalmente el hecho de que la onda está amortiguada, es decir, que existe absorción de sonido. La parte real del número de onda complejo da la variación en fase de la onda con la distancia, y la parte imaginaria es el coeficiente de absorción.

No es difícil separar las partes real e imaginaria de (78.8). En el caso general de ω arbitrario las expresiones para k_1 y k_2 son bastante complicadas y no las escribiremos ahora. Es importante el que k_1 sea una función de la frecuencia (como lo es k_2). Si se puede presentar una reacción química

en el fluido, la propagación del sonido a frecuencias suficientemente altas viene acompañada por la dispersión.

En el caso límite de bajas frecuencias ($\omega\tau \ll 1$), la fórmula (78.8) da hasta una primera aproximación $k = \omega/c_0$, lo que corresponde a la propagación del sonido con velocidad c_0. Esto es como debería ser: la condición $\omega\tau \ll 1$ significa que el período $1/\omega$ de la onda sonora es grande en comparación con el tiempo de relajación, es decir, el establecimiento de equilibrio químico sigue a las variaciones de densidad de la onda sonora y la velocidad del sonido está determinada por el valor de equilibrio de la derivada $\partial p/\partial\rho$. En segunda aproximación tenemos

$$k = \frac{\omega}{c_0} + \frac{i\omega^2\tau}{2c_0^3}(c_\infty^2 - c_0^2), \tag{78.9}$$

es decir, se produce un amortiguamiento con un coeficiente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Utilizando (78.7) podemos escribir la parte imaginaria de k en la forma $k_2 = \omega^2\zeta_0/2\rho c_0^3$; esto concuerda con la parte dependiente de ζ del coeficiente de absorción γ que viene dado por (77.6), el cual se obtuvo sin tener en cuenta la dispersión.

En el caso límite opuesto de frecuencias elevadas ($\omega\tau \gg 1$), tenemos en primera aproximación $k = \omega/c_\infty$, es decir, la propagación del sonido con velocidad c_∞ —que es de nuevo un resultado natural, puesto que para $\omega\tau \gg 1$ podemos suponer que no se produce ninguna reacción durante un solo período y, por tanto, la velocidad del sonido debe estar determinada por la derivada $(\partial p/\partial\rho)_\xi$ supuesta a concentración constante. La segunda aproximación da

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i\frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}. \tag{78.10}$$

El coeficiente de amortiguamiento es independiente de la frecuencia. Cuando pasamos de $\omega \ll 1/\tau$ a $\omega \gg 1/\tau$, este coeficiente aumenta monótonamente hacia el valor constante dado por la forma (78.10). Debe señalarse que la magnitud k_2/k_1, que representa la absorción verificada en el recorrido de una longitud de onda, es pequeña en ambos casos límites ($k_2/k_1 \ll 1$); tiene un máximo a cierta frecuencia intermedia, a saber, $\omega = \sqrt{(c_0/c_\infty)}/\tau$.

Se ve de (78.7), por ejemplo, que

$$c_\infty > c_0, \tag{78.11}$$

puesto que debemos tener $\zeta > 0$. Puede obtenerse el mismo resultado mediante razonamientos sencillos basados en el principio de Le Chatelier. Supongamos que el volumen del sistema se reduce y que la densidad aumenta a través de un agente externo. El sistema, por tanto, se sale del equilibrio y de acuerdo con el principio de Le Chatelier deben empezar aquellos procesos que tienden a reducir la presión. Esto significa que $\partial p/\partial\rho$ deberá dis-

minuir y cuando el sistema vuelva al equilibrio, el valor de $\partial p/\partial \rho = c^2$ será menor que en el estado de no equilibrio.

Al deducir todas las formas anteriores hemos supuesto que existe únicamente un solo proceso de relajación interno lento. Son también posibles casos en los que se producen simultáneamente diferentes procesos de este tipo. Pueden generalizarse entonces todas las fórmulas para cubrir dichos casos. En lugar de una sola magnitud ξ, tendremos ahora varias magnitudes $\xi_1, \xi_2, \ldots$, que caracterizan el estado del sistema y una serie correspondiente del tiempo de relajación $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Escogeremos las magnitudes ξ_n de tal modo que cada una de las derivadas $\dot{\xi}_n$ dependa únicamente del valor correspondiente ξ_n, es decir, de modo que

$$\dot{\xi}_n = -(\xi_n - \xi_{n0})/\tau_n. \tag{78.12}$$

Cálculos totalmente semejantes a los anteriores dan entonces

$$c^2 = c_\infty{}^2 + \sum_n a_n/(1 - i\omega\tau_n), \tag{78.13}$$

en donde $c_\infty{}^2 = (\partial p/\partial \rho)_\xi$, y las constantes a_n son

$$a_n = (\partial p/\partial \xi_n)(\partial \xi_n/\partial \rho)_{eq}. \tag{78.14}$$

Si existe únicamente una magnitud ξ, la fórmula (78.13) se transforma en (78.3), como debería ocurrir.

CAPÍTULO IX

ONDAS DE CHOQUE

§ 79. Propagación de las perturbaciones en un gas móvil

Cuando la velocidad de un fluido en movimiento resulta comparable con la del sonido o la supera, resultan de importancia fundamental algunos efectos debidos a la compresibilidad del fluido. Dichos movimientos se encuentran en la práctica cuando nos ocupamos de los gases. Por tanto, la dinámica del flujo de alta velocidad se denomina normalmente *dinámica de gases.*

Ante todo debe señalarse que en la dinámica de gases los números de Reynolds que intervienen son casi siempre muy grandes. Ya que la viscosidad cinemática de un gas es, como sabemos, a partir de la teoría cinética de los gases, del orden del recorrido libre medio de las moléculas multiplicado por la velocidad media de su movimiento térmico; y esta última es del mismo orden que la velocidad del sonido, de modo que $\nu \sim cl$. Si la velocidad característica en un problema de dinámica de gases es también del orden de c, entonces el número de Reynolds $R \sim Lc/\nu \sim L/l$, es decir, está determinado por el cociente de la dimensión L al recorrido libre medio l, y como sabemos es muy grande.† Como siempre ocurre cuando R es muy grande, la viscosidad tiene un efecto importante en el movimiento del gas sólo en una región muy pequeña, y en lo que sigue consideraremos el gas como un fluido ideal (excepto donde se especifique lo contrario).

El flujo de un gas es totalmente diferente en cuanto a su naturaleza, según sea *subsónico* o *supersónico*, es decir, cuando la velocidad sea menor o mayor que la del sonido. Una de las características distintivas más importantes del flujo supersónico es el hecho de que puede producirse en él lo que se denominan *ondas de choque*, cuyas propiedades examinaremos con detalle en las secciones siguientes. Ahora consideraremos otra propiedad característica del flujo supersónico relacionado con el modo de propagación de pequeñas perturbaciones en el gas.

† No consideraremos el problema del movimiento de cuerpos en gases muy rarificados, en donde el recorrido libre medio de las moléculas es comparable con la dimensión del cuerpo. Este problema no corresponde, en esencia, a la dinámica de fluidos y debe analizarse mediante la teoría cinética de los gases.

Si un gas en movimiento estacionario recibe una ligera perturbación en un punto cualquiera, el efecto de la perturbación se propaga en consecuencia a través del gas con la velocidad del sonido (respecto al propio gas). La velocidad de propagación de la perturbación respecto a un sistema de coordenadas fijo está compuesta de dos partes: en primer lugar, la perturbación es «transportada a lo largo de» por el flujo gaseoso con velocidad **v**, y en segundo lugar, se propaga respecto al gas con velocidad c en una dirección cualquiera **n**. Consideremos para mayor sencillez un flujo uniforme de gas con velocidad constante **v**, sometido a una pequeña perturbación en un punto fijo determinado O (fijo en el espacio). La velocidad $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$, con la cual se propaga la perturbación desde O (respecto al sistema fijo de coordenadas), tiene valores diferentes para las distintas direcciones del vector unidad **n**. Obtenemos todos sus valores colocando un extremo del vector **v** en el punto O y dibujando una esfera de radio c centrada en su otro extremo. Los vectores que proceden de O y terminan en puntos de la esfera dan los valores posibles y las direcciones de la velocidad de propagación de la perturbación. Supongamos primero que $v < c$. Entonces el vector $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ puede tener cualquier dirección en el espacio (figura 40a). Es decir, una perturbación que parte de un punto cualquiera de un flujo subsónico llegará, finalmente, a todos los puntos del gas. Por otra parte, si $v > c$, la dirección del vector $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ estará incluida, como se ve en la figura 40b, sólo dentro de un cono con su vértice en O que toca a la esfera con su centro en el otro extremo del vector **v**. Si la abertura del cono es 2α, entonces, como se ve en la figura,

$$\operatorname{sen} \alpha = c/v. \tag{79.1}$$

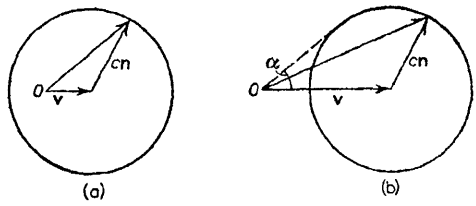

FIG. 40

Así pues, una perturbación que parte de un punto cualquiera de un flujo supersónico se propaga sólo aguas abajo dentro de un cono cuya apertura es tanto más pequeña cuanto menor sea el cociente c/v. Una perturbación que parte de O no influye sobre el flujo que está fuera de este cono.

El ángulo α determinado por la ecuación (79.1) se denomina *ángulo de Mach*. El propio cociente v/c que se presenta con mucha frecuencia en la dinámica de los gases es el *número de Mach*, M:

$$\mathrm{M} = v/c. \tag{79.2}$$

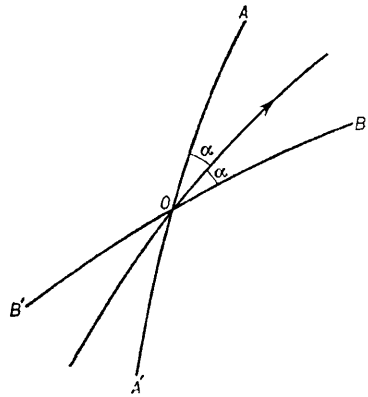

FIG. 41

La superficie que limita la región alcanzada por una perturbación que parte de un punto determinado se denomina *superficie de Mach* o *superficie característica.*

En el caso general de un flujo estacionario arbitrario, la superficie de Mach no es un cono que pasa por todo el volumen. Sin embargo, puede afirmarse que, como antes, esta superficie corta a la línea de corriente a través de un punto cualquiera sobre la misma, formando el ángulo de Mach. El valor del ángulo de Mach varía de un punto a otro con las velocidades v y c. Debe resaltarse ahora, incidentalmente, que, en el caso de flujo con velocidades altas, la velocidad del sonido es diferente en los distintos puntos: varía con las magnitudes termodinámicas (presión, densidad, etc.), de las cuales es una función.† La velocidad del sonido, como una función de las coordenadas, se denomina a veces *velocidad local del sonido.*

Las propiedades de flujo supersónico descritas anteriormente dan un carácter muy diferente a éste, del que se obtiene en el flujo subsónico. Si un flujo de gas subsónico se encuentra con cualquier obstáculo (por ejemplo, si el flujo rodea a un cuerpo), la presencia de este obstáculo influye en el flujo en todo el espacio, tanto aguas arriba como aguas abajo; el efecto del obstáculo es nulo sólo asintóticamente a distancia infinita del mismo. Sin embargo, un flujo supersónico incide «ciegamente» sobre el obstáculo; el efecto del mismo se extiende sólo aguas abajo,‡ y en todo el resto del espacio aguas arriba el gas fluye como si no existiese obstáculo.

En el caso del flujo plano estacionario de un gas, las superficies características pueden sustituirse por *líneas características* (o simplemente *características*) en el plano del flujo. A través de un punto cualquiera O de este plano pasan dos características (AA' y BB' en la figura 41) que cortan a la

† En el estudio de las ondas sonoras dado en el capítulo VIII, la velocidad del sonido podía considerarse como constante.

‡ Para evitar malas interpretaciones, debemos mencionar que, si se forma una onda de choque delante del obstáculo, esta región aumenta un poco (ver § 114).

línea de corriente a través de este punto, formando el ángulo de Mach. Las ramas aguas abajo OA y OB de las características puede decirse que *abandonan* el punto O; limitan la región AOB del flujo en donde las perturbaciones que parten de O pueden tener influencia. Las ramas $B'O$ y $A'O$ puede decirse que *alcanzan* el punto O; la región $A'OB'$ entre ellas es aquélla que puede afectar al flujo en O.

El concepto de características (superficies en el caso tridimensional) tienen también un aspecto ligeramente diferente. Son rayos a lo largo de los cuales se «propagan» perturbaciones que satisfacen las condiciones de la acústica geométrica. Por ejemplo, si un flujo de gas supersónico estacionario se encuentra con un obstáculo más bien pequeño, entonces aparecerá una perturbación estacionaria del flujo gaseoso a lo largo de las características que abandonan o salen de este obstáculo. Se obtuvo el mismo resultado en § 67 a partir de un estudio de la acústica geométrica de medios móviles.

Cuando hablamos de una perturbación del estado del gas, entendemos una variación ligera de cualquiera de las magnitudes que caracterizan su estado: la velocidad, la presión, la densidad, etc. Debe hacerse la siguiente aclaración respecto a este punto. Las perturbaciones de los valores de la entropía del gas (a presión constante) y de su vorticidad no se propagan con la velocidad del sonido. Estas perturbaciones, una vez que han surgido, no se mueven respecto al gas; se mueven con el gas a la velocidad apropiada de cada punto respecto a un sistema fijo de coordenadas. En el caso de la entropía esto es una consecuencia inmediata de la ley de conservación (en un fluido ideal),

$$ds/dt \equiv \partial s/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s = 0,$$

que muestra que la entropía de un elemento de volumen determinado cualquiera en el gas permanece constante cuando el elemento se mueve, es decir, cada valor de s se mueve con el punto al cual pertenece. Se deduce el mismo resultado para la vorticidad a partir de la conservación de la circulación.

Podemos decir así que, en el caso de perturbaciones de entropía y de vorticidad, las características son las líneas de corriente. Como es natural, esto no influye en la validez general de los enunciados hechos anteriormente sobre las regiones de influencia, puesto que se basaron únicamente en la existencia de una velocidad de propagación máxima (la del sonido) de las perturbaciones respecto al propio gas.

§ 80. Flujo estacionario de un gas

Podemos obtener inmediatamente, a partir de la ecuación de Bernoulli, un cierto número de resultados generales respecto al flujo estacionario adiabático de un gas. La ecuación en el caso del flujo estacionario es $w + v^2/2 = $ $=$ constante a lo largo de cada línea de corriente; si tenemos un flujo poten-

cial, entonces la constante es la misma para todas las líneas de corriente, es decir, en todos los puntos del fluido. Si existe un punto sobre una determinada línea de corriente, en el cual es cero la velocidad del gas, entonces podemos escribir la ecuación de Bernoulli como

$$w+\tfrac{1}{2}v^2 = w_0, \tag{80.1}$$

en donde w_0 es el valor de la entalpía en el punto en el cual $v = 0$.

La ecuación de conservación de la entropía en el caso de flujo estacionario es $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, s = v\partial s/\partial l = 0$, es decir, s es constante a lo largo de cada línea de corriente. Podemos escribir esta expresión en una forma análoga a (80.1):

$$s = s_0. \tag{80.2}$$

Vemos a partir de la ecuación (80.1) que la velocidad v es mayor en los puntos en donde la entalpía w es más pequeña. Se encuentra el valor máximo de la velocidad (sobre la línea de corriente considerada) en el punto en donde w tiene su valor mínimo. Sin embargo, en el caso de entropía constante tenemos $\mathrm{d}w = \mathrm{d}p/\rho$; puesto que $\rho > 0$, los diferenciales $\mathrm{d}w$ y $\mathrm{d}p$ tienen signos iguales y, por consiguiente, w y p varían en el mismo sentido. En resumen, se puede decir que la velocidad aumenta a lo largo de una línea de corriente cuando la presión disminuye y viceversa.

Los valores más pequeños posibles de la presión y de la entalpía (en el flujo adiabático) se obtienen cuando la temperatura absoluta $T = 0$. La presión correspondiente es $p = 0$ y puede tomarse arbitrariamente el valor de w para $T = 0$ como el cero de energía. Entonces $w = 0$ para $T = 0$. Podemos ahora deducir, a partir de (80.1), que el valor mayor posible de la velocidad (para valores determinados de las magnitudes termodinámicas en los puntos en que $v = 0$) es

$$v_{\max} = \sqrt{(2w_0)}. \tag{80.3}$$

Puede obtenerse esta velocidad cuando un gas fluye de modo estacionario saliendo de un recinto a otro en el que está hecho el vacío.†

Consideremos ahora como varía la densidad de flujo másico $j = \rho v$ a lo largo de una línea de corriente. A partir de la ecuación de Euler $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\,\mathbf{grad}\, p$, vemos que la relación $v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}p/\rho$ entre las diferenciales $\mathrm{d}v$ y $\mathrm{d}p$ es válida a lo largo de una línea de corriente. Haciendo $\mathrm{d}p = c^2\mathrm{d}\rho$, tenemos

$$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}v = -\rho v/c^2 \tag{80.4}$$

y, sustituyendo en $\mathrm{d}(\rho v) = \rho\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}\rho$, resulta

$$\mathrm{d}(\rho v)/\mathrm{d}v = \rho(1-v^2/c^2). \tag{80.5}$$

† Naturalmente, cuando se produce una abrupta disminución de temperatura, el gas debe condensar y formar una «niebla» de dos fases. Sin embargo, esto no influye esencialmente sobre el resultado obtenido.

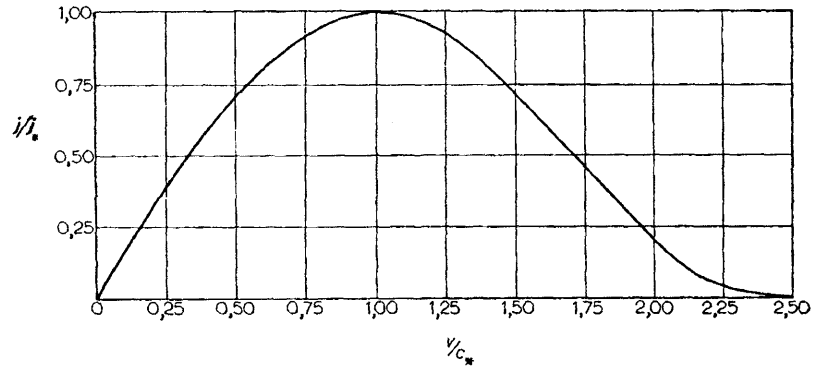

FIG. 42

A partir de esto vemos que, cuando la velocidad aumenta a lo largo de una línea de corriente, la densidad de flujo másico crece en tanto que el flujo permanezca subsónico. Sin embargo, en el intervalo supersónico la densidad de flujo másico disminuye al aumentar la velocidad y se anula al mismo tiempo que ρ cuando $v = v_{\max}$ (figura 42). Esta importante diferencia entre el flujo estacionario subsónico y el supersónico puede interpretarse simplemente del modo siguiente. En un flujo subsónico las líneas de corriente se aproximan en el sentido de la velocidad creciente. Sin embargo, en el flujo supersónico divergen en el mismo sentido.

El flujo j tiene su valor máximo j_* en el punto en que la velocidad del gas es igual a la velocidad local del sonido:

$$j_* = \rho_* c_*, \tag{80.6}$$

en donde el sufijo asterisco indica los valores correspondientes a este punto. La velocidad $v_* = c_*$ se denomina *velocidad crítica*. En el caso general de un gas arbitrario pueden expresarse los valores críticos de las magnitudes en función de sus valores en el punto $v = 0$, resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$s_* = s_0, \qquad w_* + \tfrac{1}{2}c_*^2 = w_0. \tag{80.7}$$

Es evidente que, siempre que $M = v/c < 1$, tenemos también $v/c_* < 1$, y si $M > 1$, entonces $v/c_* > 1$. De aquí que el cociente $M_* = v/c_*$ sirve en este caso como un criterio análogo a M, pero es aún más conveniente, puesto que c_* es una constante a diferencia de c que varía a lo largo de la corriente.

En aplicaciones de las ecuaciones generales de la dinámica de los gases, el caso del gas perfecto es de importancia particular. Para un gas perfecto conocemos todas las relaciones existentes entre las diversas magnitudes termodinámicas, las cuales son muy sencillas. Esto hace posible dar una

solución completa de las ecuaciones de la dinámica de los gases en muchos casos.

Daremos a continuación para referencia la relación existente entre las diversas magnitudes termodinámicas en el caso de un gas perfecto, puesto que se necesitarán con frecuencia en lo que sigue. Admitiremos siempre (a no ser que se advierta otra cosa) que el calor específico de un gas perfecto es independiente de la temperatura.

La ecuación de estado para un gas perfecto es

$$pV = p/\rho = RT/\mu, \tag{80.8}$$

en donde $R = 8{,}314 \times 10^7$ erg/grado es la constante de los gases y μ el peso molecular del gas. La velocidad del sonido en un gas perfecto es, como se vio en § 63,

$$c^2 = \gamma RT/\mu = \gamma p/\rho, \tag{80.9}$$

en donde hemos introducido el cociente de los calores específicos constante en este caso $\gamma = c_p/c_v$, que siempre es superior a la unidad; en el caso de gases monoatómicos $\gamma = 5/3$, y son diatómicos $\gamma = 7/5$ a las temperaturas ordinarias.

La energía interna de un gas perfecto, independientemente de una constante aditiva que carece de importancia, es

$$\epsilon = c_v T = pV/(\gamma - 1) = c^2/\gamma(\gamma - 1). \tag{80.10}$$

Para la entalpía tenemos las fórmulas análogas

$$w = c_p T = \gamma pV/(\gamma - 1) = c^2/(\gamma - 1). \tag{80.11}$$

Aquí hemos utilizado la relación bien conocida $c_p - c_v = R/\mu$. Finalmente, la entropía del gas es

$$s = c_v \log(p/\rho^\gamma) = c_p \log(p^{1/\gamma}/\rho). \tag{80.12}$$

Investiguemos ahora el flujo estacionario aplicando las relaciones generales previamente obtenidas al caso de un gas perfecto. Sustituyendo (80.11) en (80.3), encontramos que la velocidad máxima del flujo estacionario es

$$v_{\max} = c_0\sqrt{[2/(\gamma - 1)]}. \tag{80.13}$$

En el caso de la velocidad crítica obtenemos a partir de la segunda ecuación (80.7)

$$\frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \tfrac{1}{2}c_*^2 = w_0 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1},$$

de aquí†

$$c_* = c_0\sqrt{[2/(\gamma + 1)]}. \tag{80.14}$$

La ecuación de Bernoulli (80.1), después de la sustitución de la expresión (80.11) para la entalpía, da la relación existente entre la temperatura

† La figura 42 muestra el cociente $j/j*$ en el caso del aire ($\gamma = 1{,}4$, $v_{\max} = 2{,}45c*$).

y la velocidad en un punto cualquiera situado sobre la línea de corriente; pueden obtenerse de modo semejante relaciones para la presión y la densidad directamente mediante la ecuación adiabática de Poisson:

$$\rho = \rho_0(T/T_0)^{1/(\gamma-1)}, \qquad p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma. \tag{80.15}$$

Así se obtienen los resultados importantes

$$\left.\begin{aligned} T &= T_0\left[1-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right] = T_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right), \\ \rho &= \rho_0\left[1-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{1/(\gamma-1)} = \rho_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \\ p &= p_0\left[1-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} = p_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{80.16}$$

A veces es conveniente utilizar estas relaciones en una forma que dé la velocidad en función de otras magnitudes:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\right]. \tag{80.17}$$

También podemos dar la relación existente entre la velocidad del sonido y la velocidad v:

$$c^2 = c_0^2-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)v^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma+1)c_*^2-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)v^2. \tag{80.18}$$

De aquí se ve que los números M y M_* están relacionados por

$$M_*^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M^2}; \tag{80.19}$$

cuando M varía desde 0 hasta ∞, M_*^2 varía desde 0 hasta $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Finalmente, podemos dar expresiones para la temperatura, presión y densidad críticas: se obtienen haciendo $v = c_*$ en las fórmulas (80.16):‡

$$\left.\begin{aligned} T_* &= 2T_0/(\gamma+1), \\ p_* &= p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho_* &= \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{80.20}$$

En conclusión, debe resaltarse que los resultados deducidos anteriormente son válidos únicamente para el flujo en el que no se producen ondas de

‡ Para el aire, por ejemplo, ($\gamma = 1{,}4$)

$$c_* = 0{,}913c_0, \quad p_* = 0{,}528p_0, \quad \rho_* = 0{,}634\rho_0, \quad T_* = 0{,}833T_0.$$

choque. Cuando están presentes las ondas de choque, ya no es válida la ecuación (80.2); la entropía del gas aumenta cuando una línea de corriente pasa a través de una onda de choque. Sin embargo, veremos que la ecuación de Bernoulli (80.1) permanece válida aunque existan ondas de choque, puesto que $w + v^2/2$ es una magnitud que se conserva a través de una superficie de discontinuidad (§ 82); por ejemplo, la fórmula (80.14) sigue siendo válida en este caso.

PROBLEMA

Expresar la temperatura, presión y densidad a lo largo de una línea de corriente en función del número de Mach.

Solución. Utilizando las fórmulas obtenidas anteriormente se tiene

$$T_0/T = 1+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2, \qquad p_0/p = [1+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2]^{\gamma/(\gamma-1)},$$
$$\rho_0/\rho = [1+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2]^{1/(\gamma-1)}.$$

§ 81. Superficies de discontinuidad

En los capítulos anteriores hemos considerado únicamente aquellos flujos en los que todas las magnitudes (velocidad, presión, densidad, etc.), varían de modo continuo. Sin embargo, también es posible la existencia de flujos en los que se producen discontinuidades en la distribución de estas magnitudes.

Se produce una discontinuidad en un flujo gaseoso en una o más superficies; las magnitudes consideradas varían discontinuamente cuando cruzamos dichas superficies que se denominan *superficies de discontinuidad.* En un flujo gaseoso no estacionario las superficies de discontinuidad no permanecen fijas en general; debe resaltarse aquí, sin embargo, que la variación del movimiento respecto al tiempo de estas superficies no guarda ninguna relación con la velocidad del propio flujo gaseoso. Las partículas del gas en su movimiento pueden cruzar una superficie de discontinuidad.

En la superficie de discontinuidad deben satisfacerse ciertas condiciones límites. Para formularlas consideremos un elemento de la superficie y utilicemos un sistema de coordenadas fijo a dicho elemento, situando el eje x a lo largo de la normal al mismo.†

En primer lugar, el flujo másico debe ser continuo: la masa de gas que llega a una cara debe ser igual a la masa que sale por la otra. El flujo másico a través del elemento de superficie considerado es ρv_x por unidad de área. De aquí que se cumplirá $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$, en donde los sufijos 1 y 2 se refieren a las dos caras de la superficie de discontinuidad.

† Si el flujo no es estacionario, consideraremos un elemento de la superficie durante un breve intervalo de tiempo.

La diferencia entre los valores de una magnitud cualquiera en ambas caras de la superficie la designaremos encerrándola entre corchetes; por ejemplo, $[\rho v_x] \equiv \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x}$, y la condición que acabamos de deducir puede escribirse

$$[\rho v_x] = 0. \tag{81.1}$$

A continuación, señalemos que el flujo de energía debe ser también continuo. El flujo de energía viene dado por (6.3). Por tanto, tenemos la condición

$$[\rho v_x(\tfrac{1}{2}v^2 + w)] = 0. \tag{81.2}$$

Finalmente, el flujo del impulso debe ser continuo, es decir, las fuerzas ejercidas entre sí por los gases situados en las dos caras de la superficie de discontinuidad deben ser iguales. El flujo del impulso por unidad de área es (ver § 7) $p n_i + \rho v_i v_k n_k$. El vector normal **n** está dirigido a lo largo del eje x. La continuidad de la componente x del flujo del impulso viene dada, por tanto, por la condición

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \tag{81.3}$$

mientras la de las componentes y y z da

$$[\rho v_x v_y] = 0, \qquad [\rho v_x v_z] = 0. \tag{81.4}$$

Las ecuaciones (81.1)-(81.4) forman un sistema completo de condiciones límites en la superficie de discontinuidad. A partir de ellas podemos inmediatamente deducir la posibilidad de dos tipos de superficie de discontinuidad.

En el primero de ellos no existe flujo másico a través de la superficie. Esto significa que $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$. Puesto que ρ_1 y ρ_2 no son cero, se deduce que $v_{1x} = v_{2x} = 0$. Las condiciones (81.2) y (81.4) se satisfacen entonces y la condición (81.3) da $p_1 = p_2$. Así pues, la componente de velocidad normal y la presión del gas son continuas en la superficie de discontinuidad:

$$v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad [p] = 0, \tag{81.5}$$

mientras que las velocidades tangenciales v_y, v_z y la densidad (lo mismo que las demás magnitudes termodinámicas, excepto la presión) pueden ser discontinuas en una cantidad cualquiera. Denominaremos a esto *discontinuidad tangencial.*

En el segundo tipo, el flujo másico no es cero y, por tanto, v_{1x} y v_{2x} tampoco son nulas. Tenemos entonces a partir de (81.1) y (81.4)

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \tag{81.6}$$

es decir, la velocidad tangencial es continua en la superficie de discontinuidad. Sin embargo, la presión, la densidad (y las demás magnitudes termodinámicas) y la velocidad normal son discontinuas, estando relacionadas sus discontinuidades por (81.1)-(81.3). En la condición (81.2) podemos eliminar

ρv_x por (81.1) y sustituir v^2 por ${v_x}^2$, puesto que v_y y v_z son continuas. Así pues, en este caso deben cumplirse las siguientes condiciones en la superficie de discontinuidad

$$\left.\begin{aligned} [\rho v_x] &= 0, \\ [\tfrac{1}{2}{v_x}^2 + w] &= 0, \\ [p + \rho {v_x}^2] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (81.7)$$

Una discontinuidad de este tipo se denomina *onda de choque* o simplemente un *choque*. Si volvemos ahora al sistema de coordenadas fijo debemos sustituir en todos los puntos v_x por la diferencia entre la componente de la velocidad del gas v_n normal a la superficie de discontinuidad y la velocidad u de la propia superficie que se define como normal a la superficie:

$$v_x = v_n - u. \qquad (81.8)$$

Las velocidades v y u se toman en el sistema fijo. La velocidad v_x es la velocidad del gas respecto a la superficie de discontinuidad; podemos decir también que $-v_x = u - v_n$ es la velocidad de propagación de la superficie respecto al gas. Debe señalarse que, si v_x es discontinua, esta velocidad tiene valores distintos respecto al gas en las dos caras de la superficie.

Ya hemos estudiado (en § 30) discontinuidades tangenciales, en las cuales la componente de velocidad tangencial es discontinua y vimos que en un fluido incompresible dichas discontinuidades son absolutamente inestables y deben dar como resultado una región turbulenta. Un análisis semejante en el caso de un fluido compresible muestra que se produce la misma inestabilidad para velocidades cualesquiera.

Un caso particular «degenerado» de discontinuidad tangencial es aquél en el que la velocidad es continua, pero no la densidad (y por lo tanto tampoco las demás magnitudes termodinámicas, excepto la presión). Las notas anteriores sobre la inestabilidad no se relacionan con discontinuidades de esta clase.

§ 82. Choque adiabático

Investiguemos ahora las ondas de choque con detalle. Hemos visto que, en este tipo de discontinuidad, la componente tangencial de la velocidad del gas es continua. Por tanto, podemos tomar un sistema coordenado en el cual el elemento superficial considerado está en reposo y la componente tangencial de la velocidad del gas sea cero en ambas caras.† Entonces podemos

† Este sistema coordenado se utiliza en todos los §§ 82-85, 87, 88.

Una onda de choque en reposo constituye una *discontinuidad de compresión*. Si el choque es perpendicular a la dirección del flujo, tenemos un *choque normal*, en otro caso un *choque oblicuo*.

escribir la componente normal v_x como v simplemente y las condiciones (81.7) toman la forma

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \tag{82.1}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \tag{82.2}$$

$$w_1 + \tfrac{1}{2} v_1^2 = w_2 + \tfrac{1}{2} v_2^2, \tag{82.3}$$

donde j designa la densidad de flujo másico en la superficie de discontinuidad. En lo que sigue tomaremos siempre j como positivo, con el gas pasando del lado 1 al lado 2. Es decir, denominaremos gas 1 a aquél dentro del cual se mueve la onda de choque y gas 2 al que permanece detrás del choque. Denominaremos la cara de la onda de choque que mira hacia el gas 1 el *frente* de la onda de choque y hacia el gas 2 la *parte posterior*.

Deduciremos una serie de relaciones que resultan de las condiciones anteriores. Utilizando los volúmenes específicos $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$, obtenemos a partir de (82.1)

$$v_1 = jV_1, \qquad v_2 = jV_2 \tag{82.4}$$

y, sustituyendo en (82.2),

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \tag{82.5}$$

o sea,

$$j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2). \tag{82.6}$$

Esta fórmula, junto con (82.4), relaciona la variación de propagación respecto al tiempo de una onda de choque con las presiones y densidades del gas en ambas caras de la superficie.

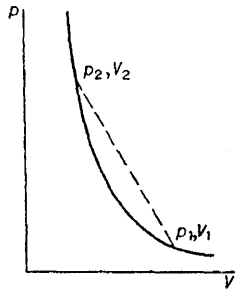

FIG. 43

Puesto que j^2 es positivo, vemos que o bien $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ o $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$; veremos a continuación que sólo puede realmente presentarse el primer caso.

Podemos señalar la siguiente fórmula útil para la diferencia de velocidades $v_1 - v_2$. Sustituyendo (82.6) en $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, obtenemos†

$$v_1 - v_2 = \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)]}. \tag{82.7}$$

A continuación, escribamos (82.3) en la forma

$$w_1 + \tfrac{1}{2}j^2V_1^2 = w_2 + \tfrac{1}{2}j^2V_2^2 \tag{82.8}$$

y, sustituyendo j^2 de (82.6), obtenemos

$$w_1 - w_2 + \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \tag{82.9}$$

Si sustituimos la entalpía w por $\epsilon + pV$, en donde ϵ es la energía interna, podemos escribir esta relación como

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \tag{82.10}$$

Estas relaciones son válidas entre las magnitudes termodinámicas en ambas caras de la superficie de discontinuidad.

Para unos valores dados de p_1, V_1, la ecuación (82.9) o la (82.10) da la relación entre p_2 y V_2. Esta relación se denomina *adiabática del choque* o *adiabática de Hugoniot* (W. J. M. RANKINE, 1870; H. HUGONIOT, 1889). Se representa gráficamente en el plano pV (figura 43) por una curva que pasa por el punto dado (p_1, V_1) [para $p_1 = p_2$, $V_1 = V_2$ tenemos también $\epsilon_1 = \epsilon_2$, de modo que satisface idénticamente la ecuación (82.10)]. Debe señalarse que la adiabática del choque no puede cortar la línea vertical $V = V_1$, excepto en (p_1, V_1). Efectivamente, la existencia de otra intersección significaría que presiones diferentes que satisfagan a (82.10) corresponderían al mismo volumen. Sin embargo, para $V_1 = V_2$ tenemos a partir de (82.10) también que $\epsilon_1 = \epsilon_2$, y cuando los volúmenes y la energía son las mismas, las presiones

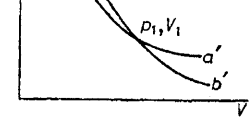

FIG. 44

† Aquí escribimos la raíz cuadrada positiva, puesto que debemos tener $v_1 - v_2 > 0$, como veremos posteriormente (§ 84).

deben ser iguales. Así pues, la línea $V = V_1$ divide a la adiabática del choque en dos partes, cada una de las cuales cae totalmente a un lado de la línea. Análogamente, la adiabática del choque corta o se encuentra con la línea horizontal $p = p_1$ únicamente en el punto (p_1, V_1).

Sea aa' (figura 44) la adiabática del choque que pasa a través del punto (p_1, V_1) como un estado del gas 1. Tomemos un punto cualquiera (p_2, V_2) sobre él y dibujemos a través de este punto otra adiabática bb', para la cual (p_2, V_2) es un estado del gas 1. Es evidente que el par de valores (p_1, V_1) satisface también la ecuación de esta adiabática. Las adiabáticas aa' y bb' se cortan, por tanto, en dos puntos (p_1, V_1) y (p_2, V_2). Debe resaltarse que las adiabáticas no son idénticas como ocurriría en el caso de adiabáticas de Poisson a través de un punto determinado. Esto es una consecuencia del hecho de que la ecuación de la adiabática del choque no puede escribirse en la forma $f(p, V) =$ constante, siendo f una determinada función, mientras que la adiabática de Poisson, por ejemplo, puede escribirse $s(p, V) =$ constante. La adiabática de Poisson para un gas determinado forma una familia de curvas de un solo parámetro, pero la adiabática del choque está determinada por dos parámetros, los valores iniciales p_1 y V_1. Esto tiene también la consecuencia importante siguiente: si dos (o más) ondas de choque sucesivas hacen pasar un gas del estado 1 al estado 2 y luego de éste al estado 3, la transición del estado 1 al estado 3 no puede, en general, verse influida por el paso de una onda de choque cualquiera.

En el caso de un estado termodinámico inicial determinado del gas (es decir, para un valor de p_1 y V_1), se define la onda de choque por un solo parámetro; por ejemplo, si se da la presión p_2 detrás del choque, entonces V_2 queda determinada por la adiabática de Hugoniot, y la densidad del flujo j y las velocidades v_1 y v_2 vienen dadas entonces por las fórmulas (82.4) y (82.6). Sin embargo, debe mencionarse que estamos considerando aquí la onda de choque en un sistema coordenado en el que el gas se está moviendo normalmente a la superficie. Si la onda de choque puede estar situada oblicuamente respecto a la dirección del flujo, se necesita otro parámetro; por ejemplo, el valor de la componente tangencial de la velocidad respecto a la superficie.

Puede mencionarse la siguiente interpretación gráfica conveniente de la fórmula (82.6). Si el punto (p_1, V_1) sobre la adiabática del choque (figura 43) se une por una cuerda a otro punto cualquiera (p_2, V_2) sobre la misma, entonces $(p_2 - p_1)/(V_2 - V_1) = -j^2$ es exactamente la pendiente de esta cuerda respecto al eje de abscisas. Así pues, j y, por tanto, la velocidad de la onda de choque está determinada en cada punto de la adiabática del choque por la pendiente de la cuerda que une este punto al punto (p_1, V_1).

Como las demás magnitudes termodinámicas, la entropía es discontinua en una onda de choque. Por el principio de aumento de entropía, la entropía

de un gas puede aumentar únicamente durante su movimiento. De aquí que la entropía s_2 del gas que ha pasado a través de la onda de choque deba superar a su entropía inicial s_1:

$$s_2 > s_1. \tag{82.11}$$

Veremos a continuación que esta condición plantea unas restricciones muy importantes sobre el modo de variación de todas las magnitudes que intervienen en una onda de choque.

Debe resaltarse también el hecho siguiente. La presencia de ondas de choque da como resultado un aumento de entropía en aquellos flujos que pueden considerarse como movimientos de un fluido ideal en todo el espacio, siendo nulas la viscosidad y la conductividad térmica. El aumento de entropía significa que el movimiento es irreversible, es decir, se disipa energía. Así pues, las discontinuidades son un medio mediante el cual puede disiparse la energía del movimiento de un fluido ideal. Se deduce que la paradoja de d'Alembert (§ 11) no surge cuando se mueven los cuerpos en un fluido ideal, de tal modo que producen ondas de choque. En dichos casos existe una fuerza de arrastre.

El verdadero mecanismo mediante el cual aumenta la entropía en las ondas de choque se basa, como es natural, en procesos disipativos que se producen en las capas muy delgadas, que son las ondas de choque reales (ver § 87). Sin embargo, debe señalarse que la cantidad de esta disipación está totalmente determinada por las leyes de conservación de masa, energía e impulso cuando se aplican a ambas caras de dichas capas; la anchura de las capas es precisamente la necesaria para dar el aumento de entropía requerido por estas leyes de conservación.

El aumento de entropía en una onda de choque tiene otro efecto importante sobre el movimiento: aunque tuviésemos un flujo potencial delante del choque, el flujo detrás del mismo es, en general, rotacional. Volveremos a este tema en § 106.

§ 83. Ondas de choque débiles

Consideremos una onda de choque en la cual la discontinuidad de todas las magnitudes sea pequeña; la denominaremos *onda de choque débil.* Transformemos la relación (82.9) desarrollando en potencias de las diferencias pequeñas $s_2 - s_1$ y $p_2 - p_1$. Veremos que los términos de primero y segundo orden en $p_2 - p_1$ se anulan entonces; por tanto, podemos llevar a cabo el desarrollo respecto a $p_2 - p_1$ hasta el tercer orden. En el desarrollo respecto a $s_2 - s_1$ únicamente es necesario retener los términos de primer orden. Tenemos así

$$w_2 - w_1 = (\partial w/\partial s_1)_p(s_2 - s_1) + (\partial w/\partial p_1)_s(p_2 - p_1) + \\ + \tfrac{1}{2}(\partial^2 w/\partial p_1^2)_s(p_2 - p_1)^2 + \tfrac{1}{6}(\partial^3 w/\partial p_1^3)_s(p_2 - p_1)^3.$$

Mediante la identidad termodinámica $dw = T\,ds + V\,dp$, tenemos para las derivadas

$$(\partial w/\partial s)_p = T, \qquad (\partial w/\partial p)_s = V.$$

De aquí que

$$w_2 - w_1 = T_1(s_2 - s_1) + V_1(p_2 - p_1) + \\ + \tfrac{1}{2}(\partial V/\partial p_1)_s(p_2 - p_1)^2 + \tfrac{1}{6}(\partial^2 V/\partial p_1^2)_s(p_2 - p_1)^3.$$

El volumen V_2 necesita desarrollarse únicamente respecto a $p_2 - p_1$, puesto que el segundo término de la ecuación (82.9) ya contiene la pequeña diferencia $p_2 - p_1$, y un desarrollo respecto a $s_2 - s_1$ daría un término de la forma $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, que carece de interés. Así pues,

$$V_2 - V_1 = (\partial V/\partial p_1)_s(p_2 - p_1) + \tfrac{1}{2}(\partial^2 V/\partial p_1^2)_s(p_2 - p_1)^2.$$

Sustituyendo este desarrollo en (82.9), obtenemos

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \tag{83.1}$$

Así pues, la discontinuidad de la entropía en una onda de choque débil es del tercer orden de magnitud respecto a la discontinuidad de la presión.

En todos los casos que hemos analizado, la compresibilidad $-(\partial V/\partial p)_s$ disminuye al aumentar la presión, es decir, la segunda derivada

$$(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0. \tag{83.2}$$

Sin embargo, debe resaltarse que esto no es una relación termodinámica y no puede deducirse mediante razonamientos termodinámicos. Por consiguiente, es posible, en principio, que pueda ser negativa la derivada. En lo que sigue veremos en varias ocasiones que es muy importante en la dinámica de gases el signo de la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Supondremos en el futuro que es positiva.†

Dibujemos a través del punto 1 (p_1, V_1) en el plano pV dos curvas, la correspondiente a la adiabática del choque y la adiabática de Poisson. La ecuación de esta última es $s_2 - s_1 = 0$. Comparándola con la ecuación (83.1) de la adiabática del choque cerca del punto 1, vemos que las dos curvas tienen contacto de segundo orden en este punto, siendo iguales tanto las derivadas de primero como de segundo orden. Con objeto de decidir la posición relativa de ambas curvas cerca del punto 1, utilizaremos el hecho de que, de acuerdo con (83.1) y (83.2), debemos tener $s_2 > s_1$ sobre la adiabática del choque para $p_2 > p_1$, mientras que sobre la adiabática de Poisson $s_2 = s_1$. La abscisa de un punto sobre la adiabática del choque debe, por tanto, superar la correspondiente a un punto situado sobre la adiabática de Poisson

† En el caso de un gas perfecto $(\partial^2 V/\partial p^2)_s = (\gamma + 1)V/\gamma^2 p^2$. Esta expresión puede obtenerse de modo más simple derivando la ecuación de Poisson $pV^\gamma = \text{constante}$.

que tenga la misma ordenada p_2. Esto se deduce del hecho de que por la bien conocida fórmula termodinámica $(\partial V/\partial s)_p = (T/c_p)(\partial V/\partial T)_p$, la entropía aumenta con el volumen a presión constante para todas las sustancias que se dilatan al calentarse, es decir, que tienen $(\partial V/\partial T)_p$ positiva. Análogamente, podemos deducir que en el caso de que $p_2 < p_1$, la abscisa de un punto situado sobre la adiabática de Poisson supera a aquélla que está sobre el punto correspondiente de la adiabática del choque. Así pues, cerca del punto de contacto, las dos curvas tienen unas posiciones relativas indicadas en la figura 45 (HH' es la adiabática del choque y PP' la adiabática de Poisson),† siendo ambas curvas cóncavas hacia arriba, según (83.2).

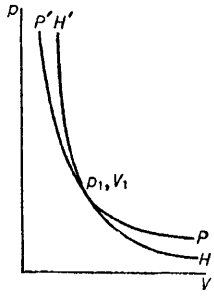

FIG. 45

En el caso en que $p_2 - p_1$ y $V_2 - V_1$ sean pequeños, puede escribirse la fórmula (82.6) en primera aproximación, como $j^2 = -(\partial p/\partial V)_s$ (tomamos la derivada para entropía constante, puesto que coinciden en el punto 1 las tangentes a ambas adiabáticas). En la misma aproximación, las velocidades v_1 y v_2 son iguales:

$$v_1 = v_2 = v = jV = \sqrt{[-V^2(\partial p/\partial V)_s]} = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}.$$

Que coincide exactamente con la velocidad del sonido c. Así pues, la velocidad de propagación de las ondas de choque débiles es la velocidad del sonido en primera aproximación:

$$v = c. \tag{83.3}$$

A partir de las propiedades de la adiabática correspondiente al choque cerca del punto 1 deducidas anteriormente podemos obtener un cierto número de consecuencias importantes. Puesto que tenemos que $s_2 > s_1$ en una onda de choque, se deduce que $p_2 > p_1$, es decir, el punto 2 (p_2, V_2) debe estar por encima del punto 1. Además, puesto que la cuerda 12 tiene una pendiente mayor que la tangente a la adiabática en el punto 1 (figura 43), y la pendiente de la tangente es igual a la derivada $(\partial p/\partial V_1)_{s_1}$, tenemos

† Si $(\partial V/\partial T)_p$ es negativa, se invierte la posición relativa.

$j^2 > -(\partial p/\partial V_1)_{s_1}$. Multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por V_1^2, resulta

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2(\partial p/\partial V_1)_{s_1} = (\partial p/\partial \rho_1)_{s_1} = c_1^2,$$

siendo c_1 la velocidad del sonido correspondiente al punto 1. Así pues, $v_1 > c_1$. Finalmente, a partir del hecho de que la cuerda 12 tiene una pendiente menor que la tangente en el punto 2, se deduce de modo semejante que $v_2 < c_2$.†

§ 84. Sentido de variación de las magnitudes en una onda de choque

Los resultados del § 83 muestran que, si se supone que la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva, puede demostrarse de modo muy sencillo que en el caso de ondas de choque débiles la condición de entropía creciente ($s_2 > s_1$) significa necesariamente que

$$p_2 > p_1, \tag{84.1}$$

$$v_1 > c_1, \qquad v_2 < c_2. \tag{84.2}$$

A partir de la nota hecha respecto a (82.6), se deduce que si $p_2 > p_1$, entonces

$$V_1 > V_2, \tag{84.3}$$

y puesto que $v_1/V_1 = v_2/V_2 = j$, también

$$v_1 > v_2. \tag{84.4}$$

Ahora demostraremos que todas estas desigualdades realmente son válidas en el caso de ondas de choque de cualquier intensidad [manteniendo la hipótesis de que $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva]. Por tanto, obtenemos la conclusión en particular de que cuando el gas pasa a través de una onda de choque se comprime, aumentando la presión y la densidad (E. JOUGUET, 1904; G. ZEMPLEN, 1905).‡ Esto significa gráficamente que únicamente la rama superior de la adiabática del choque (por encima del punto 1) tiene un significado real; las ondas de choque que corresponden a puntos sobre la rama inferior no pueden existir. Podemos mencionar también el resultado importante siguiente que puede deducirse a partir de las desigualdades (84.2). Puesto que una onda de choque se mueve respecto al gas que está delante de él con una velocidad $v_1 > c_1$, es evidente que no puede penetrar dentro del

† Del mismo modo puede demostrarse fácilmente que, cuando la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es negativa, la condición $s_2 > s_1$ para las ondas de choque implica que $p_2 < p_1$, mientras que las velocidades de nuevo satisfacen $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

‡ Si pasamos a un sistema coordenado en el que el gas 1 (delante de la onda de choque) está en reposo y la onda de choque está moviéndose, entonces la desigualdad $v_1 > v_2$ significa que el gas detrás de la onda de choque se mueve (con velocidad $v_1 - v_2$) en el mismo sentido que la propia onda.

gas ninguna perturbación que se origine en la onda de choque. En otras palabras, la presencia del chogue no tiene ninguna influencia sobre el estado del gas que está delante de él.

Demostraremos ahora estas afirmaciones empezando con un cálculo preliminar. Derivemos la relación (82.5) y (82.8) respecto a las magnitudes que pertenecen al gas 2 suponiendo que el estado del gas 1 resulta invariable. Esto significa que p_1, V_1 y w_1 se consideran como constantes, mientras que se derivan o diferencian p_2, V_2, w_2 y también j (que depende de p_2 y V_2). A partir de (82.5) obtenemos

$$V_1 \mathrm{d}(j^2) = \mathrm{d}p_2 + j^2\,\mathrm{d}V_2 + V_2 \mathrm{d}(j^2),$$

o sea,

$$\mathrm{d}p_2 + j^2\,\mathrm{d}V_2 = (V_1 - V_2)\mathrm{d}(j^2), \tag{84.5}$$

y a partir de (82.8)

$$\mathrm{d}w_2 + j^2 V_2\,\mathrm{d}V_2 = \tfrac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2)\mathrm{d}(j^2),$$

o sea, desarrollando la diferencial $\mathrm{d}w_2$,

$$T_2 \mathrm{d}s_2 + V_2 \mathrm{d}p_2 + j^2 V_2 \mathrm{d}V_2 = \tfrac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2)\mathrm{d}(j^2).$$

Sustituyendo esta ecuación en (84.5), obtenemos

$$T_2 \mathrm{d}s_2 = \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2)^2 \mathrm{d}(j^2). \tag{84.6}$$

De aquí vemos que

$$\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}s_2 > 0, \tag{84.7}$$

es decir, j^2 aumenta con s_2.

Veremos ahora que no puede existir ningún punto sobre la adiabática del choque en el que toque a una línea cualquiera dibujada desde el punto 1 (tal como el punto O que se dibuja en la figura 46). En dicho punto la pendiente de la cuerda trazada desde el punto 1 es un mínimo y j^2 tiene un

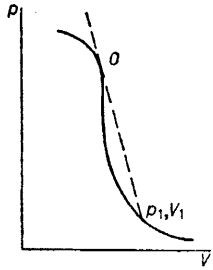

FIG. 46

máximo en correspondencia a éste, de modo que $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0$. Vemos a partir de (84.6) que en este caso tenemos también $\mathrm{d}s_2/\mathrm{d}p_2 = 0$. A continuación, sustituyendo en (84.5) la diferencial $\mathrm{d}V_2$ en la forma $\mathrm{d}V_2 = (\partial V_2/\partial p_2)_{s_2}\,\mathrm{d}p^2 + (\partial V_2/\partial s_2)_{p_2}\,\mathrm{d}s_2$ y $\mathrm{d}s_2$ en la forma dada por (84.6) y dividiendo por $\mathrm{d}p_2$, obtenemos

$$1+j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = (V_1-V_2)\left\{1-\frac{j^2(V_1-V_2)}{T_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2}\right\}\frac{\mathrm{d}(j^2)}{\mathrm{d}p_2}.$$

De aquí se deduce que para $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0$, debemos tener

$$1+j^2(\partial V_2/\partial p_2)_{s_2} = 1-v_2^2/c_2^2 = 0,$$

es decir, $v_2 = c_2$; inversamente, si $v_2 = c_2$, se deduce que $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0$.†

Así pues, de las tres ecuaciones

$$\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0, \qquad \mathrm{d}s_2/\mathrm{d}p_2 = 0, \qquad v_2 = c_2, \tag{84.8}$$

cada una de ellas implica las otras dos y las tres deben ser válidas en el punto O (figura 46). Finalmente, tenemos para la derivada de $j^2(\partial V_2/\partial p_2)_{s_2} = -v_2^2/c_2^2$ en el punto O

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_2}\left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right) = -j^2\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de que $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva, deberemos, por tanto, tener en O

$$\mathrm{d}(v_2/c_2)/\mathrm{d}p_2 < 0. \tag{84.9}$$

Es fácil ahora demostrar que no puede existir dicho punto en la adiabática del choque. En los puntos que estén exactamente por encima del punto 1, $v_2/c_2 < 1$ (ver el final de § 83). Por tanto, la ecuación $v_2/c_2 = 1$ puede satisfacerse únicamente mediante un aumento de v_2/c_2; es decir, en O debe cumplirse necesariamente que $\mathrm{d}(v_2/c_2)/\mathrm{d}p_2 > 0$, mientras que por (84.9) es cierto lo inverso. De un modo totalmente semejante podemos demostrar que tampoco puede resultar igual a la unidad el cociente v_2/c_2 en la parte de la adiabática del choque por debajo del punto 1.

A partir de la imposibilidad de la existencia de un punto tal como el O, como acabamos de demostrar, podemos deducir de una vez a partir del gráfico de la adiabática del choque que la pendiente de la cuerda que va desde el punto 1 (p_1, V_1) hasta el punto 2 (p_2, V_2) disminuye cuando nos movemos hacia arriba por la curva y, en correspondencia, aumenta j^2. A partir de la propiedad de la adiabática del choque y la desigualdad (84.7) se deduce inmediatamente que la condición necesaria $s_2 > s_1$ implica que también $p_2 > p_1$.

† La expresión entre corchetes puede anularse sólo por casualidad y, por tanto, esta posibilidad es muy rara.

También es fácil ver que en la parte superior de la adiabática del choque son válidas las desigualdades $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. La primera se deduce del hecho de que es válida cerca del punto 1 y el cociente v_2/c_2 nunca puede ser igual a la unidad. La segunda desigualdad se obtiene a partir del hecho de que toda cuerda procedente del punto 1 que vaya al punto 2 por encima de él tiene una pendiente superior que la tangente a la adiabática en el punto 1, puesto que la curva no puede comportarse como se ve en la figura 46.

La condición $s_2 > s_1$ y las tres desigualdades (84.1), (84.2) se satisfacen, por tanto, en la parte superior de la adiabática del choque. Sin embargo, en la parte inferior no son válidas ninguna de estas condiciones. En consecuencia, son equivalentes y si una de ellas se ve satisfecha, también lo son las demás.

En el estudio anterior hemos supuesto en todas partes que la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva. Si esta derivada pudiese variar de signo, dejaría de ser posible deducir de la necesidad de $s_2 > s_1$ cualquier conclusión general respecto a las desigualdades de las demás magnitudes. Sin embargo, es importante que las desigualdades (84.2) para las velocidades puedan obtenerse por razonamientos muy distintos, lo que demuestra que las ondas de choque en las que no son válidas dichas desigualdades no pueden existir, aunque su existencia no pudiese ser negada mediante los razonamientos puramente termodinámicos dados anteriormente.

La razón es que todavía hemos de estudiar el tema de la estabilidad de las ondas de choque. Supongamos que una onda de choque en reposo se somete a un desplazamiento infinitesimal en una dirección, por ejemplo, perpendicular a su plano. Puede demostrarse que el resultado de dicho desplazamiento es que la onda de choque se ve continuamente acelerada en una dirección determinada y es evidente que esto demuestra la inestabilidad absoluta de dicha onda y la imposibilidad de su existencia. El desplazamiento de la onda de choque viene acompañado por perturbaciones infinitesimales en la presión, velocidad, etc., del gas en ambas caras de la superficie de discontinuidad. Estas perturbaciones cerca del choque se propagan entonces alejándose del mismo con la velocidad del sonido (respecto al gas); sin embargo, esto no se aplica en la perturbación de la entropía, que se transmite únicamente con el propio gas. Así pues, una perturbación arbitraria del tipo en cuestión puede considerarse como formada por perturbaciones sonoras propagadas en los gases 1 y 2 en ambas caras de la onda de choque y una perturbación de la entropía; la última, que se mueve con el gas, se presenta evidentemente únicamente en el gas 2 detrás del choque. En cada una de las perturbaciones del sonido las variaciones de las diversas magnitudes están relacionadas por ciertas fórmulas que se deducen de las ecuaciones del movimiento (como en una onda sonora cualquiera, § 63), y, por tanto, una perturbación cualquiera de ellas se especifica con un solo parámetro.

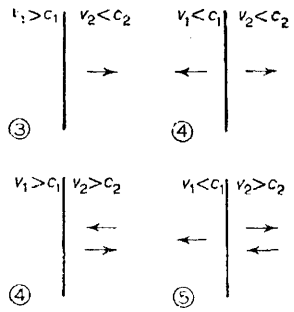

FIG. 47

Calculemos ahora el número de perturbaciones sonoras posibles. Este número depende de los valores relativos de las velocidades del gas v_1, v_2, y de las velocidades del sonido c_1, c_2. Tomemos la dirección de movimiento del gas (desde 1 hasta 2) como el sentido positivo del eje x. La velocidad de propagación de la perturbación en el gas 1 respecto a la onda de choque estacionaria es $u_1 = v_1 \pm c_1$, y en el gas 2 es $u_2 = v_2 \pm c_2$. Puesto que estas perturbaciones deben propagarse alejándose de la onda de choque, se deduce que $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

Supongamos que $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Entonces, es evidente que ambos valores $u_1 = v_1 \pm c_1$ son positivos, mientras que únicamente el valor $v_2 + c_2$ de la pareja de valores correspondientes a u_2 es positivo. Esto significa que las perturbaciones sonoras en las que estamos interesados no pueden existir en el gas 1, mientras que en el gas 2 puede únicamente existir una que se propaga respecto al gas con velocidad c_2. El cálculo en otros casos es análogo a éste.

El resultado se indica en la figura 47, en donde cada flecha corresponde a una perturbación sonora que se propaga respecto al gas en la dirección indicada por la flecha. Cada perturbación sonora se define, como se dijo anteriormente, por un solo parámetro. Además, en los cuatro casos existen otros dos parámetros, uno que determina la perturbación de la entropía que se propaga en el gas 2 y la otra que determina el desplazamiento de la onda de choque. Para cada uno de los cuatro casos de la figura 47, el número encerrado dentro de un circulito indica el número total de parámetros así obtenidos, que definen una perturbación arbitraria que se origina debido al desplazamiento de la onda de choque.

El número de condiciones límites que deben satisfacerse por una perturbación en la superficie de discontinuidad es tres (la continuidad de los flujos de masa, de energía y de impulso). La solución del problema de estabilidad se efectúa prescribiendo el desplazamiento de la onda de choque (y, por lo tanto, las perturbaciones de todas las demás magnitudes) en una forma pro-

porcional a $e^{\Omega t}$, y determinando los valores posibles de Ω mediante las condiciones límites; la existencia de valores positivos reales de Ω indica inestabilidad absoluta. En todos los casos indicados en la figura 47, excepto el primero, el número de parámetros disponibles supera al número de ecuaciones dadas por las condiciones límites en la discontinuidad. Por tanto, en estos casos las condiciones límites admiten cualquier valor de Ω (y, por lo tanto, cualquier valor positivo) y la onda de choque es absolutamente inestable. En el único caso $v_1 > c_2$, $v_2 < c_2$; sin embargo, el número de parámetros es exactamente igual al número de ecuaciones y, por tanto, éstas nos dan un valor definido de Ω. Es evidente, sin que sea necesario escribir las ecuaciones, que este valor debe ser $\Omega = 0$, puesto que el problema no contiene ningún parámetro de las dimensiones s^{-1} que podría determinar un valor de Ω distinto de cero pero no arbitrario. Por tanto, no existe ninguna inestabilidad en este caso.

Así pues, vemos que las desigualdades (84.2) para la velocidad de la onda de choque son necesarias para que exista el choque cualesquiera que sean las propiedades termodinámicas del gas.

Con objeto de decidir la estabilidad de las ondas de choque para las cuales se satisface la condición (84.2), deberíamos investigar también los restantes modos posibles de inestabilidad. Uno de ellos es la inestabilidad respecto a las perturbaciones del tipo considerado en § 30 (caracterizadas por la periodicidad en la dirección paralela a la superficie de discontinuidad y formando «ondulaciones» en esta superficie). No realizaremos ahora los cálculos, sino que simplemente mencionaremos que estas ondas de choque son casi siempre estables respecto a dichas perturbaciones. Pueden producirse inestabilidades sólo para ciertas formas muy especiales de la adiabática del choque que parece que difícilmente pueden ocurrir en la naturaleza; todas ellas exigen que la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ tenga un signo variable.†

También, en principio, una onda de choque puede ser inestable respecto a una rotura en más de una superficie de discontinuidad. Este problema no ha sido investigado adecuadamente aún, pero parece ser que dichas inestabilidades únicamente pueden ocurrir para ciertos casos muy especiales de choque adiabático.

§ 85. Ondas de choque en un gas perfecto

Apliquemos las relaciones generales obtenidas en las secciones anteriores a las ondas de choque de un gas perfecto. La entalpía de un gas perfecto viene dada por la fórmula simple $w = \gamma pV/(\gamma - 1)$. Sustituyendo esta ex-

† Ver S. P. D'YAKOV, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **27**, 288, 1954; V. M. KONTOROVICH, *ibid.*, **33**, 1525, 1957; *Soviet Physics JETP*, **6** (33), 1179, 1958.

presión en (82.9), tenemos después de una transformación simple

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}. \tag{85.1}$$

Utilizando esta fórmula, podemos determinar cualquiera de las magnitudes p_1, V_1, p_2, V_2, a partir de las otras tres. El cociente V_2/V_1 es una función monótonamente decreciente del cociente p_2/p_1 que tiende al límite finito $(\gamma-1)/(\gamma+1)$. La curva que muestra p_2 en función de V_2 para valores dados de p_1, V_1 (la adiabática del choque) está representada en la figura 48. Es una hipérbola equilátera con asíntotas $V_2/V_1 = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, $p_2/p_1 = -(\gamma-1)/(\gamma+1)$. Como sabemos, únicamente la parte superior de la curva, por encima del punto $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 1$, tiene un significado real; está indicada en la figura 48 (para $\gamma = 1{,}4$) mediante una línea continua.

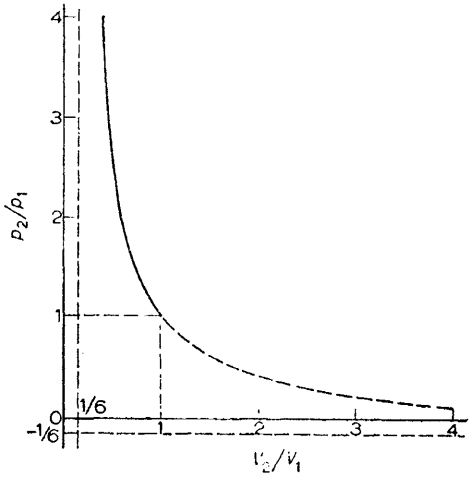

FIG. 48

En el caso del cociente de las temperaturas en ambos lados de la discontinuidad tenemos, a partir de la ecuación de estado para un gas perfecto $T_2/T_1 = p_2V_2/p_1V_1$, que

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}. \tag{85.2}$$

Para la densidad de flujo j obtenemos, a partir de (82.6) y (85.1),

$$j^2 = \{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2\}/2V_1, \tag{85.3}$$

y entonces para las velocidades de propagación de la onda de choque respecto al gas delante y detrás de él

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \tfrac{1}{2}V_1\{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2\}, \\ v_2^2 &= \tfrac{1}{2}V\{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2\}^2/\{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2\}. \end{aligned} \tag{85.4}$$

Podemos deducir resultados límites para ondas de choque muy intensas, en las que p_2 es muy grande en comparación con p_1.† A partir de (85.1) y (85.2) tenemos

$$V_2/V_1 = \rho_1/\rho_2 = (\gamma-1)/(\gamma+1), \quad T_2/T_1 = (\gamma-1)p_2/(\gamma+1)p_1. \tag{85.5}$$

El cociente T_2/T_1 aumenta hasta infinito con p_2/p_1, es decir, la discontinuidad de temperaturas en una onda de choque, como la discontinuidad de presión, puede ser arbitrariamente grande. Sin embargo, el cociente de densidades tiene un límite constante; es decir, para un gas monoatómico el límite es $\rho_2 = 4\rho_1$, y en el caso de un gas diatómico $\rho_2 = 6\rho_1$. Las velocidades de propagación de una onda de choque intensa son

$$v_1 = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)p_2V_1\}}, \qquad v_2 = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)^2p_2V_1/(\gamma+1)\}}. \tag{85.6}$$

Aumentan proporcionalmente a la raíz cuadrada de la presión p_2.

Finalmente, podemos dar algunas fórmulas útiles en las aplicaciones, que expresan los cocientes de las densidades, presiones y temperaturas en una onda de choque en función del número de Mach $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$. Estas fórmulas se deducen fácilmente a partir de los resultados anteriores:

$$\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = (\gamma+1)\mathrm{M}_1^2/\{(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2+2\}, \tag{85.7}$$

$$p_2/p_1 = 2\gamma\mathrm{M}_1^2/(\gamma+1)-(\gamma-1)/(\gamma+1), \tag{85.8}$$

$$T_2/T_1 = \{2\gamma\mathrm{M}_1^2-(\gamma-1)\}\{(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2+2\}/(\gamma+1)^2\mathrm{M}_1. \tag{85.9}$$

El número de Mach M_2 viene dado en función de M_1 por

$$\mathrm{M}_2^2 = \{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2\}/\{2\gamma\mathrm{M}_1^2-(\gamma-1)\}. \tag{85.10}$$

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir la fórmula $v_1v_2 = c_*^2$, siendo c_* la velocidad crítica.

Solución. Puesto que $w + v^2/2$ es continua en una onda de choque, podemos definir una velocidad crítica que es la misma para los gases 1 y 2 por

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \tfrac{1}{2}v_1^2 = \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \tfrac{1}{2}v_2^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2;$$

† Es necesario que no sólo $p_2 \gg p_1$, sino que $p_2 \gg (\gamma+1)p_1/(\gamma-1)$.

ver (80.7). Determinando p_2/ρ_2 y p_1/ρ_1 a partir de estas ecuaciones y sustituyendo en

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

[obtenida combinando (82.1) y (82.2)], tenemos

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}(v_1 - v_2)\left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2}\right) = 0.$$

Puesto que $v_1 \neq v_2$, esto da la relación buscada.

Problema 2. Determinar el valor del cociente p_2/p_1, para temperaturas dadas T_1, T_2 en una discontinuidad de un gas perfecto con un calor específico variable.

Solución. En el caso general de un gas perfecto con calor específico variable, podemos únicamente decir que w (como ϵ) es una función sólo de la temperatura y que p, V y T están relacionadas por la ecuación de estado $pV = RT/\mu$. Resolviendo la ecuación (82.9) para p_2/p_1, obtenemos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT}(w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left\{\left[\frac{\mu(w_2 - w_1)}{RT_1} - \frac{T_2 - T_1}{2T_1}\right]^2 + \frac{T_2}{T_1}\right\}},$$

en donde $w_1 = w(T_1)$, $w_2 = w(T_2)$.

Problema 3. Una onda sonora plana incide normalmente sobre una onda de choque en un gas perfecto. Determinar la intensidad del sonido transmitido por la onda de choque (D. I. BLOKHINTSEV, 1945).†

Solución. Puesto que una onda de choque se propaga con una velocidad supersónica respecto al gas que está delante de ella, no puede reflejarse en ella ninguna onda sonora. En el gas 2, detrás de la discontinuidad, se propaga una onda sonora transmitida isoentrópica ordinaria y también una perturbación de la entropía (a presión constante) que se propaga con el propio gas móvil.

Consideremos el proceso en un sistema coordenado en el que está en reposo la onda de choque y en el que el gas se mueve a través de la misma en el sentido positivo del eje x, propagándose también en este sentido la onda sonora incidente. Las perturbaciones en ambas caras de la discontinuidad están relacionadas por las condiciones obtenidas, haciendo variar las condiciones límites (82.1)-(82.3). Como resultado de la perturbación sonora, la onda de choque también empieza a oscilar; designando su velocidad oscilante por δu, debemos escribir la variación de las velocidades v_1, v_2 en las condiciones límites, como $\delta v_1 - \delta u$, $\delta v_2 - \delta u$. Así pues,‡

$$v_1 \delta\rho_1 + \rho_1(\delta v_1 - \delta u) = v_2 \delta\rho_2 + \rho_2(\delta v_2 - \delta u),$$

$$\delta p_1 + v_1^2 \delta\rho_1 + 2\rho_1 v_1(\delta v_1 - \delta u) = \delta p_2 + v_2^2 \delta\rho_2 + 2\rho_2 v_2(\delta v_2 - \delta u),$$

$$\delta w_1 + v_1(\delta v_1 - \delta u) = \delta w_2 + v_2(\delta v_2 - \delta u).$$

En la onda sonora incidente tenemos

$$\delta s_1 = 0, \qquad \delta v_1 = (c_1/\rho_1)\delta\rho_1 = \delta p_1/c_1\rho_1, \qquad \delta w_1 = \delta p_1/\rho_1.$$

† La solución al problema más general de la incidencia oblicua del sonido sobre una onda de choque en un medio arbitrario ha sido dada por V. M. KONTOROVICH, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **33**, 1527, 1957; *Soviet Physics JETP*, **6** (33), 1180, 1958.

‡ Designemos aquí las partes variables de las magnitudes por una δ en lugar de la prima usual.

La perturbación en el medio 2 está compuesta de la onda sonora y de la «onda de entropía», que designaremos por una y dos primas, respectivamente:

$$\delta s_2' = 0, \qquad \delta v_2' = (c_2/\rho_2)\delta\rho_2' = \delta p_2'/c_2\rho_2, \qquad \delta w_2 = \delta p_2'/\rho_2,$$

$$\delta p_2'' = 0, \quad \delta v_2'' = 0, \quad \delta w_2'' = T_2\delta s_2'' = -c_2^2\delta\rho_2''/\rho_2(\gamma-1)$$

[en el caso de un gas perfecto $(\partial s/\partial\rho)_p = -c_p/\rho$].

Estas relaciones nos permiten expresar todas las magnitudes de las ondas transmitidas en función de las magnitudes correspondientes en la onda incidente. El cociente de presiones de las ondas sonoras resulta ser

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} = \frac{M_1+1}{M_2+1}\left\{\frac{2(\gamma-1)M_1M_2^2(M_1^2-1)-(M_1+1)[(\gamma-1)M_1^2+2]}{2(\gamma-1)M_2^2(M_1^2-1)-(M_2+1)[(\gamma-1)M_1^2+2]}\right\}.$$

En el caso de una onda de choque débil ($p_2 - p_1 \ll p_1$) tenemos

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx 1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2-p_1}{p_1},$$

y en el caso límite opuesto de una onda de choque intensa

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx \frac{1}{\gamma+\sqrt{[2\gamma(\gamma-1)]}}\frac{p_2}{p_1}.$$

En ambos casos la amplitud de la presión en la onda transmitida es mayor que la correspondiente en la onda incidente.

§ 86. Ondas de choque oblicuas

Consideremos una onda de choque estacionaria y abandonemos el sistema de coordenadas utilizado hasta aquí, en el cual la velocidad del gas era perpendicular al elemento de superficie del choque considerado. Las líneas de corriente pueden cortar a la superficie de dicha onda de choque en un ángulo cualquiera† y al hacer esto se ven «refractadas»: la componente tangencial de la velocidad del gas no varía mientras que la componente normal, de acuerdo con (84.4), disminuye, $v_{1t} = v_{2t}$, $v_{1n} > v_{2n}$. Por tanto, resulta claro que las líneas de corriente «se aproximan» a la onda de choque cuando pasan a través de la misma (ver figura 49). Así pues, las líneas de corriente se ven siempre refractadas en una dirección definida al pasar a través de una onda de choque.

El movimiento detrás de una onda de choque puede ser subsónico o supersónico (únicamente la componente de velocidad normal necesita ser menor que la velocidad del sonido c_2); el movimiento delante de ella es necesariamente supersónico. Si el flujo del gas en ambas caras es supersónico, todas las perturbaciones deben propagarse a lo largo de la superficie

† La única restricción es que la componente de velocidad normal v_{1n} supere a c_1.

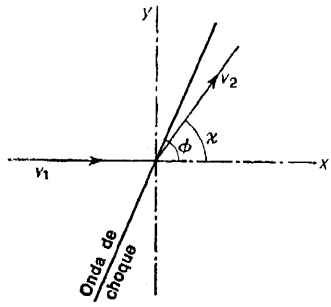

FIG. 49

en la dirección de la componente tangencial de la velocidad del gas. En este sentido podemos hablar de la «dirección» de una onda de choque y distinguir las ondas de choque que salen o llegan a un punto cualquiera (como en el caso de las características, el movimiento cercano es siempre supersónico; ver § 79). Si el movimiento dentro del choque es subsónico no tiene estrictamente ningún significado hablar de su «dirección», puesto que las perturbaciones pueden propagarse en todas las direcciones en su superficie.

Deduciremos una relación existente entre las dos componentes de la velocidad del gas después de que ha pasado a través de una onda de choque oblicua, suponiendo que tenemos un gas perfecto. Tomemos la dirección de la velocidad del gas $\mathbf{v}_1$ delante de la onda de choque como eje x; sea ϕ el ángulo entre la onda de choque y el eje x (figura 49). La continuidad de la componente de velocidad tangencial al choque significa que $v_1 \cos\phi = v_{2x}\cos\phi + v_{2y}\operatorname{sen}\phi$, o sea,

$$\operatorname{tg}\phi = (v_1 - v_{2x})/v_{2y}. \tag{86.1}$$

A continuación, utilicemos la fórmula (85.7), en la cual v_1 y v_2 designan las componentes de velocidad normal al plano de la onda de choque y que ahora deben ser sustituidas por $v_1 \operatorname{sen}\phi$ y $v_{2x}\operatorname{sen}\phi - v_{2y}\cos\phi$, de modo que

$$\frac{v_{2x}\operatorname{sen}\phi - v_{2y}\cos\phi}{v_1 \operatorname{sen}\phi} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma+1)v_1^2\operatorname{sen}^2\phi}. \tag{86.2}$$

Entre ambas relaciones podemos eliminar el ángulo ϕ. Después de algunas transformaciones simples obtenemos la siguiente fórmula, que determina la relación existente entre v_{2x} y v_{2y} (para valores dados de v_1 y c_1):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{2(v_1 - c_1^2/v_1)/(\gamma+1) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + 2c_1^2/(\gamma+1)v_1}. \tag{86.3}$$

Esta fórmula puede escribirse de modo más inteligible introduciendo la velocidad crítica. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli y la definición de

velocidad crítica, tenemos $w_1 + v_1^2/2 = v_1^2/2 + c_1^2/(\gamma - 1) = (\gamma + 1)c_*^2/2(\gamma - 1)$ (ver § 85, problema 1), y de aquí

$$c_*^2 = [(\gamma - 1)v_1^2 + 2c_1^2]/(\gamma + 1). \tag{86.4}$$

Utilizando esta expresión en (86.3), obtenemos

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{2v_1^2/(\gamma + 1) - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \tag{86.5}$$

La ecuación (86.5) se denomina ecuación de la *polar del choque*. La figura 50 muestra un gráfico de la función $v_{2y}(v_{2x})$; es una curva cúbica denominada estrofoide. Corta el eje de abscisas en los puntos P y Q, correspondientes a $v_{2x} = c_*^2/v_1$ y $v_{2x} = v_1$.† Una recta (OB en la figura 50) dibujada desde el origen formando un ángulo χ con el eje de abscisas da la velocidad del gas detrás de una discontinuidad que hace desviar la corriente en un ángulo χ por la longitud del segmento comprendido entre O y el punto en la que la recta corta a la polar del choque. Existen dos de estas intersecciones (A, B), es decir, dos ondas de choque diferentes que corresponden a un valor χ dado. La dirección de la onda de choque también puede determinarse inmediatamente a partir de la polar de choque: viene dada por la dirección de la perpendicular trazada desde el origen hasta la línea QB o QA (la figura 50 muestra el ángulo en el caso de un choque correspondiente al punto B). Al disminuir χ, el punto A tiende a P, correspondiendo al caso de un choque normal ($\phi = \pi/2$) con $v_2 = c_*^2/v_1$. El punto B tiende a Q; la intensidad del choque (discontinuidad de velocidad) tiende a cero y el ángulo ϕ tiende, como debería ser, al ángulo de Mach $\alpha = \arcsen(c_1/v_1)$; la tangente a la polar del choque en Q forma un ángulo $\pi/2 + \alpha$ con el eje de abscisas.

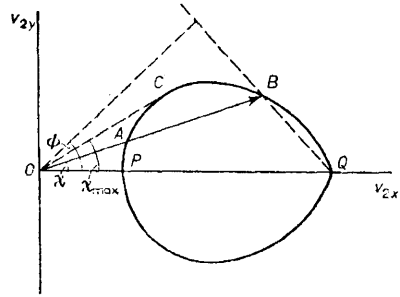

FIG. 50

† La estrofoide realmente continúa en dos ramas desde el punto $v_{2x} = v_1$ (que es un punto doble) hasta v_{2y} infinito; éstas no se han indicado en la figura 50. Tienen una asíntota común

$$v_{2x} = c_*^2/v_1 + 2v_1/(\gamma + 1).$$

Los puntos sobre estas ramas carecen de significado físico; darían para v_{2x} y v_{2y} valores tales que $v_{2n}/v_{1n} > 1$, lo cual es imposible.

A partir de la polar del choque podemos deducir inmediatamente el resultado importante de que el ángulo de desviación χ de la corriente en la onda de choque no puede superar a un valor máximo determinado χ_{max}, que corresponde a la tangente trazada desde O hasta la curva. Como es natural, esta magnitud es función del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$, pero no daremos ahora su expresión porque resulta muy complicada. Para $M_1 = 1$, $\chi_{max} = 0$; cuando M_1 aumenta, χ_{max} aumenta monótonamente y tiende hasta un límite finito cuando $M_1 \to \infty$. Es fácil de estudiar los dos casos límites. Si la velocidad v_1 es próxima a c_*, entonces v_2 también lo será y el ángulo χ es pequeño; la ecuación (86.5) de la polar del choque puede escribirse entonces en la forma aproximada.†

$$\chi^2 = (\gamma+1)(v_1-v_2)^2(v_1+v_2-2c_*)/2c_*{}^3, \tag{86.6}$$

en donde hemos puesto $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_*\chi$, en vista del valor tan pequeño de χ. De aquí que se encuentra fácilmente‡

$$\chi_{max} = \frac{4\sqrt{(\gamma+1)}}{3\sqrt{3}}\left(\frac{v_1}{c_*}-1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}(\gamma+1)}(M_1-1)^{\frac{3}{2}}. \tag{86.7}$$

En el caso límite opuesto $M_1 = \infty$ (es decir, $M_{1*} = \sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}$), la polar de choque degenera en una circunferencia que corta al eje de abscisas en los puntos $c_*\sqrt{[(\gamma-1)/(\gamma+1)]}$ y $c_*\sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}$. Es fácil ver que se tienen entonces

$$\chi_{max} = \operatorname{arcsen}(1/\gamma); \tag{86.8}$$

en el caso del aire vale 45,6°. La figura 51 muestra un gráfico de χ_{max} en función de M_1 en el caso del aire; la curva superior es un gráfico semejante para el flujo que pasa a un cono (ver § 105).

La circunferencia $v_2 = c_*$ corta el eje de abscisas entre los puntos P y Q (figura 50), y, por tanto, divide a la polar del choque en dos partes que corresponden a las velocidades subsónica y supersónica del gas detrás de la discontinuidad. El punto en donde esta circunferencia corta a la polar cae a la derecha, pero muy próximo, del punto C; el segmento completo PC corresponde, por tanto, a transiciones a velocidades subsónicas, mientras que CQ (excepto en el caso de segmentos muy pequeños próximos a C) corresponde a transiciones a velocidades supersónicas.

Para valores dados de M_1 y ϕ, la variación de presión en la onda de choque viene dada por

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1{}^2\operatorname{sen}^2\phi-(\gamma-1)}{(\gamma+1)}; \tag{86.9}$$

† Se ve fácilmente que la ecuación (88.6) también es válida para un gas cualquiera (no perfecto), con tal que $(\gamma+1)$ se sustituya por $2\alpha_*$ (95.2).

‡ Puede señalarse que esta dependencia de χ_{max} con $M_1 - 1$ está de acuerdo con la ley general de semejanza (118.7) para el flujo transónico.

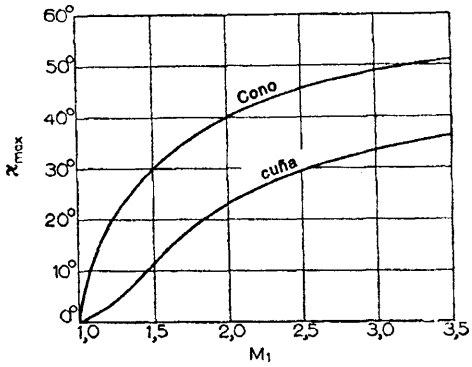

FIG. 51

esta es la fórmula (85.8) sustituyendo M_1 por M_1 sen ϕ. Este cociente aumenta monótonamente cuando crece ϕ, desde su valor menor arcsen $(1/M_1)$ (cuando $p_2/p_1 = 1$) a $\pi/2$, es decir, cuando nos movemos a lo largo de la polar del choque desde Q hasta P.

Las dos ondas de choque determinadas por la polar de choque para un ángulo de desviación dado χ suele decirse que pertenecen a las familias *débil* y *fuerte*. Una onda de choque de la familia fuerte (segmento PC de la polar) es intensa (el cociente p_2/p_1 es grande), forma un ángulo ϕ grande con la dirección de la velocidad $\mathbf{v}_1$ y convierte el flujo de supersónico en subsónico. Una onda de choque de la familia débil (segmento QC) es débil, está inclinada formando un ángulo más pequeño respecto a la corriente y casi siempre mantiene el flujo supersónico.

PROBLEMAS

Problema 1. Deducir la fórmula que da el ángulo de desviación χ de la velocidad en una onda de choque oblicua (en un gas perfecto) en función de $M_1 = v_1/c_1$ y del ángulo ϕ entre la onda de choque y la dirección de la velocidad $\mathbf{v}_1$ (figura 49):

$$\cot\chi = \operatorname{tg}\phi\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2(M_1^2\operatorname{sen}^2\phi-1)} - 1\right].$$

Problema 2. Deducir la fórmula que da el número $M_2 = v_2/c_2$ en función de M_1 y ϕ:

$$M_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2\operatorname{sen}^2\phi-(\gamma-1)} + \frac{2M_1^2\cos^2\phi}{2+(\gamma-1)M_1^2\operatorname{sen}^2\phi}.$$

§ 87. Espesor de las ondas de choque

Hasta ahora hemos considerado las ondas de choque como superficies geométricas de espesor nulo. Consideraremos ahora la estructura de las superficies de discontinuidad reales y veremos que las ondas de choque con discontinuidades pequeñas son, en realidad, capas de transición de espesor finito, disminuyendo dicho espesor cuando aumenta el valor de las discontinuidades. Si las discontinuidades no son pequeñas, las variaciones se producen tan rápidamente que carece de significado el concepto de espesor.

Para determinar la estructura y espesor de la capa de transición, debemos tener en cuenta la viscosidad y la conductividad térmica del gas que hasta ahora hemos despreciado.

Las relaciones (82.1)-(82.3) para una onda de choque se obtuvieron a partir de la constancia de los flujos de masa, impulso y energía. Si consideramos una superficie de discontinuidad como una capa de espesor finito, estas condiciones deben escribirse no como la igualdad de las magnitudes relativas en ambas caras de la discontinuidad, sino como una constancia a través del espesor de la capa. La primera condición, (82.1), no varía:

$$\rho v \equiv j = \text{constante}. \tag{87.1}$$

En las otras dos condiciones deben tenerse en cuenta flujos adicionales de impulso y energía debidos al rozamiento interno y a la conducción térmica.

La densidad del flujo de impulso (en la dirección x) debido al rozamiento interno viene dada por la componente $-\sigma'_{xx}$ del tensor de tensiones de la viscosidad; de acuerdo con la expresión general (15.3) para este tensor, tenemos $\sigma'_{xx} = (4\eta/3 + \zeta)\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$. Entonces, la condición (82.2) se transforma en

$$p + \rho v^2 - (\tfrac{4}{3}\eta + \zeta)\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \text{constante}.$$

Como en § 82, incluiremos el volumen específico V en lugar de la velocidad $v = jV$. Puesto que j = constante, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = j\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$, de modo que

$$p + j^2 V - (\tfrac{4}{3}\eta + \zeta) j\, \mathrm{d}V/\mathrm{d}x = \text{constante}.$$

A distancias grandes de la onda de choque, las magnitudes termodinámicas son constantes, es decir, son independientes de x. En particular, $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x = 0$. Designaremos mediante un sufijo 1 los valores de las magnitudes que están bastante delante de la onda de choque. Entonces, podemos poner la constante igual a $p_1 + j^2 V_1$, obteniéndose así

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - (\tfrac{4}{3}\eta + \zeta) j\, \mathrm{d}V/\mathrm{d}x = 0. \tag{87.2}$$

A continuación, la densidad del flujo de energía debida a la conducción térmica es $-\kappa\, \mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. La originada por el rozamiento interno es $-\sigma'_{xi}v_i$, o sea, puesto que la velocidad está dirigida a lo largo del eje x, $-\sigma'_{xx}v = -(4\eta/3 +$

$+\zeta)v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$. Así pues, la condición (82.3) puede escribirse

$$\rho v(w+\tfrac{1}{2}v^2)-(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x-\kappa\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = \text{constante}.$$

Poniendo de nuevo $v = jV$, se puede obtener la forma final

$$w+\tfrac{1}{2}j^2V^2-j(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)V\,\mathrm{d}V/\mathrm{d}x-(\kappa/j)\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = w_1+\tfrac{1}{2}j^2V_1^2. \qquad (87.3)$$

Hemos considerado ahora ondas de choque en las cuales son pequeñas todas las discontinuidades. Entonces, todas las diferencias $V-V_1$, $p-p_1$, etc., entre los valores en el interior y en el exterior de la capa de transición son también pequeños. En (87.2) vamos a desarrollar $V-V_1$ en potencias de $p-p_1$ y $s-s_1$, tomando como variables independientes la presión y la entropía. Se ve a partir de las relaciones que obtendremos a continuación que $1/\delta$ (siendo δ el espesor de la discontinuidad) es del primer orden en $p-p_1$, y que la diferencia $s-s_1$ es del segundo orden.† De aquí que podamos escribir, despreciando magnitudes del tercer orden,

$$V-V_1 = (\partial V/\partial p)_s(p-p_1)+\tfrac{1}{2}(\partial^2V/\partial p^2)_s(p-p_1)^2+(\partial V/\partial s)_p(s-s_1).$$

Se toman, como es natural, los valores de todos los coeficientes fuera de la capa de transición (para $p = p_1$, $s = s_1$). Sustituyendo este desarrollo en (87.2), obtenemos

$$[1+(\partial V/\partial p)_s j^2](p-p_1)+\tfrac{1}{2}j^2(\partial^2V/\partial p^2)_s(p-p_1)^2+(\partial V/\partial s)_p(s-s_1)j^2 = (\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)j\,\mathrm{d}V/\mathrm{d}x.$$

La derivada $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ puede escribirse

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}.$$

Si derivamos respecto a x se aumenta el orden de los infinitésimos en una unidad, puesto que $1/\delta$ es de primer orden; la derivada $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ es, por tanto, del segundo orden y $\mathrm{d}s/\mathrm{d}x$ del tercero. Por consiguiente, puede omitirse el término en $\mathrm{d}s/\mathrm{d}x$. Así pues, la condición (87.2) se transforma en

$$[1+(\partial V/\partial p)_s j^2](p-p_1)+\tfrac{1}{2}j^2(\partial^2V/\partial p^2)_s(p-p_1)^2+(\partial V/\partial s)_p(s-s_1)j^2 = (\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)(\partial V/\partial p)_s(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)j. \qquad (87.4)$$

A continuación, multipliquemos cada término de (87.2) por $(V+V_1)/2$ y restémolos de la ecuación (87.3). El resultado es

$$(w-w_1)-\tfrac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1)-\tfrac{1}{2}j(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)(V-V_1)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}-\frac{\kappa}{j}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0.$$

† La discontinuidad de la entropía total s_2-s_1 es, como hemos visto en § 83, de tercer orden respecto a la discontinuidad de presión p_2-p_1, mientras que $s-s_1$ es sólo de segundo orden en $p-p_1$. La razón es que, como veremos más adelante, la presión en la capa de transición varía monótonamente desde p_1 hasta p_2, mientras que la entropía no varía monótonamente; tiene un máximo dentro de la capa.

El tercer término, que contiene el producto $(V-V_1)\,\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$, es de tercer orden y puede omitirse:

$$(w-w_1)-\tfrac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1)-(\kappa/j)\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0.$$

Los dos primeros términos coinciden con la expresión que desarrollábamos en potencias de $p-p_1$ y $s-s_1$ al deducir la fórmula (83.1). Los términos de primero y segundo orden en $p-p_1$ de estos desarrollos son nulos y tenemos hasta los términos de segundo orden que la expresión vale exactamente $T(s-s_1)$. La derivada $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ puede escribirse

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

El resultado es

$$T(s-s_1) = \frac{\kappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{87.5}$$

Sustituyendo esta expresión para $s-s_1$ en (87.4), se tiene

$$\tfrac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p-p_1)^2 + \left[1+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right](p-p_1)$$
$$= \left\{-\frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s + (\tfrac{4}{3}\eta+\zeta)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right\}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} j. \tag{87.6}$$

El flujo j es, en primera aproximación, $j = v/V \approx c/V$ [ver (83.3)]. Puede sustituirse esta expresión en el segundo miembro de (87.6), pero no servirá en el primero; entonces, hay que incluir términos adicionales en j^2. Estos términos podrían obtenerse a partir de (87.2), por ejemplo. Sin embargo, es más sencillo razonar del modo siguiente. A distancias grandes de ambas caras de la superficie de discontinuidad, el segundo miembro de (87.6) es cero, puesto que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ es cero. A esta distancia la presión es p_1 o p_2. Esto es, podemos decir que la expresión cuadrática en p en el primer miembro de (87.6) tiene los ceros p_1 y p_2. Por un teorema bien conocido del álgebra puede escribirse, por tanto, como el producto $(p-p_1)(p-p_2)$ multiplicado por el coeficiente de p_2, $j^2(\partial^2 V/\partial p^2)_s/2$.

Así pues, tenemos la siguiente ecuación diferencial para la función $p(x)$:†

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p-p_1)(p-p_2) = -\frac{V^3}{c^3}\left\{(\tfrac{4}{3}\eta+\zeta) + \frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p c^2\rho^2\right\}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

A partir de las fórmulas termodinámicas para las derivadas, $(\partial V/\partial s)_p = -(\partial T/\partial p)_s$; es fácil ver que el coeficiente de $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ en el segundo miem-

† Al considerar una onda de choque débil podemos tomar la viscosidad y la conductividad térmica como constantes.

bro de la ecuación anterior es $2V^2a$, estando a relacionado con el coeficiente de absorción del sonido γ (77.6) por la relación $\gamma = a\omega^2$. Así pues,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{4V^2a}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p-p_1)(p-p_2). \tag{87.7}$$

Integrando tenemos

$$x = -\frac{4V^2a}{(\partial^2 V/\partial p^2)_s}\int \frac{dp}{(p-p_1)(p-p_2)}$$
$$= \frac{4aV^2}{\frac{1}{2}(p_2-p_1)(\partial^2 V/\partial p^2)_s}\,\mathrm{tgh}^{-1}\frac{p-\frac{1}{2}(p_2+p_1)}{\frac{1}{2}(p_2-p_1)} + \text{constante}.$$

Poniendo la constante igual a cero, tenemos

$$p-\tfrac{1}{2}(p_2+p_1) = \tfrac{1}{2}(p_2-p_1)\ \mathrm{tgh}\ (x/\delta), \tag{87.8}$$

en donde

$$\delta = 8aV^2/(p_2-p_1)(\partial^2 V/\partial p^2)_s. \tag{87.9}$$

Esta es la forma en que varía la presión entre los valores p_1 y p_2 que adquiere a distancias grandes a ambos lados de la onda de choque. El punto $x = 0$ corresponde a la media de la presión, $(p_1 + p_2)/2$. Para $x \to \pm\infty$, la presión tiende asintóticamente a p_1 y p_2. Casi toda la variación de p_1 a p_2 se produce en una distancia del orden de δ que puede denominarse *espesor* de la onda de choque. Vemos que este espesor es tanto menor cuanto más intenso o fuerte sea el choque, es decir, cuanto mayor sea la discontinuidad en la presión.

La variación de la entropía a través de la discontinuidad se obtiene a partir de (87.5) y (87.8)

$$s-s_1 = \frac{\kappa}{16caVT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p_2-p_1)^2\frac{1}{\cosh^2(x/\delta)}. \tag{87.10}$$

A partir de esta expresión vemos que la entropía no varía monótonamente, sino que tiene un máximo dentro de la onda de choque en $x = 0$. Para $x = \pm\infty$ esta fórmula da $s = s_1$ en cualquier caso; esto es debido a que la variación de entropía total $s_2 - s_1$ es del tercer orden en $p_2 - p_1$ [ver (83.1)], mientras que $s - s_1$ es del segundo orden.

La fórmula (87.8) es cuantitativamente válida sólo para diferencias $p_2 - p_1$ suficientemente pequeñas. Sin embargo, podemos utilizar cualitativamente (87.9) para determinar el orden de magnitud del espesor en aquellos casos en que la diferencia $p_2 - p_1$ sea del mismo orden de magnitud que los propios p_1 y p_2. La velocidad del sonido en el gas es del mismo orden que la velocidad térmica v de las moléculas. La viscosidad cinemática es, como sabemos, a partir de la teoría cinética de los gases, $\nu \sim lv \sim lc$, siendo l el

recorrido libre medio de las moléculas. De aquí, $a \sim l/c^2$; una estimación del término de conducción térmica nos da el mismo resultado. Finalmente, $(\partial^2 V/\partial p^2)_s \sim V/p^2$, y $pV \sim c^2$. Utilizando estas relaciones en (87.9), obtenemos

$$\delta \sim l. \tag{87.11}$$

Así pues, el espesor de una onda de choque fuerte es del mismo orden de magnitud que el recorrido libre medio de las moléculas del gas.† Sin embargo, en la dinámica macroscópica de los gases, en donde se considera el gas como un medio continuo, debe tomarse el recorrido libre medio como cero. Se deduce entonces que la dinámica de los gases no puede utilizarse aisladamente de modo estricto para investigar la estructura interna de las ondas de choques intensas.

Puede producirse un aumento considerable del espesor de una onda de choque por la presencia dentro del gas de unos procesos de relajación comparativamente lentos (reacciones químicas lentas, transferencia de energía lenta entre diferentes grados de libertad de las moléculas y otros). Este tema ha sido estudiado por YA. B. ZEL'DOVICH (1946).

Sea τ del orden de magnitud del tiempo de relajación. Tanto los estados inicial como el final del gas deben ser estados de equilibrio completo; por tanto, resulta inmediatamente claro que el espesor total de la onda de choque será del orden de τv_1, distancia recorrida por el gas en el tiempo τ. También se encuentra que, si la intensidad del choque supera a un determinado límite, su estructura se hace más compleja; esto puede verse del modo siguiente.

En la figura 52 la curva a trazo continuo muestra la adiabática del choque dibujada a través de un punto inicial 1 dado, con la hipótesis de que los estados finales del gas son estados de equilibrio completo; la pendiente de

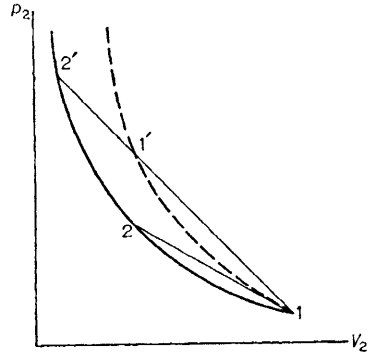

FIG. 52

† Una onda de choque intensa produce un aumento considerable de temperatura; l designa el recorrido libre medio para cierta temperatura media del gas en el choque.

la tangente en el punto 1 da la velocidad del sonido de «equilibrio» designada en § 78 por c_0. La curva a trazos muestra la adiabática del choque que pasa a través del mismo punto 1, con la hipótesis de que los procesos de relajación están «congelados» y no se producen. La pendiente de la tangente de esta curva en el punto 1 representa la velocidad del sonido que designábamos en § 78 por c_∞.

Si la velocidad de la onda de choque es tal que $c_0 < v_1 < c_\infty$, la cuerda 12 se traza como se ve en la figura 52 (cuerda inferior). En este caso tenemos un aumento simple del espesor del choque, estando representados todos los estados intermedios entre el estado inicial 1 y el estado final 2 en el plano pV sobre el segmento 12.†

Sin embargo, si $v_1 > c_\infty$, la cuerda adquiere la posición 11'2'. No hay ningún punto que caiga entre 1 y 1' que corresponda a un estado real cualquiera del gas; el primer punto real (después de 1) es 1', que corresponde a un estado en el cual el equilibrio de la relajación no es diferente del correspondiente al estado 1. La compresión del gas desde el estado 1 al estado 1' se produce de modo discontinuo y, posteriormente (en distancias del orden de $\sim v_1 \tau$), se ve comprimido gradualmente hasta el estado final 2'.

§ 88. Discontinuidad isoterma

El estudio de la estructura de una onda de choque realizada en § 87 exige la hipótesis de que la viscosidad y la conductividad térmica sean del mismo orden de magnitud, como sucede normalmente. Sin embargo, también es posible el caso en el que $\chi \gg \nu$. Si la temperatura es suficientemente elevada, se transfiere un calor adicional por radiación térmica en equilibrio con la materia. La radiación tiene un efecto mucho menor sobre la viscosidad (es decir, sobre la transferencia de impulso) y por ello ν puede ser pequeña en comparación con χ. Veremos ahora que esta desigualdad conduce a una diferencia muy importante en la estructura de la onda de choque.

Despreciando términos en la viscosidad, podemos escribir las ecuaciones (87.2) y (87.3), que determinan la estructura de la capa de transición, como

$$p + j^2 V = p_1 + j^2 V_1, \tag{88.1}$$

$$\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx} = w + \tfrac{1}{2} j^2 V^2 - w_1 - \tfrac{1}{2} j^2 V_1^2. \tag{88.2}$$

El segundo miembro de (88.2) es cero únicamente en los límites de la capa.

† Esto resulta del hecho de que (despreciando la viscosidad ordinaria y la conducción térmica) todos los estados a través de los cuales pasa el gas satisfacen las ecuaciones de conservación de masa, $\rho v = j$ = constante, y del impulso, $p + j^2 V$ = constante (ver un estudio análogo, pero más detallado en § 121).

Puesto que la temperatura detrás de la onda de choque debe ser más elevada que la que hay delante de la misma, se deduce que tenemos

$$dT/dx > 0 \tag{88.3}$$

en todos los puntos de la capa de transición, es decir, la temperatura aumenta monótonamente.

Todas las magnitudes en la capa son funciones de una sola variable, la coordenada x, y, por tanto, son funciones unas de otras. Derivando (88.1) respecto a V, obtenemos

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dT}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + j^2 = 0.$$

La derivada $(\partial p/\partial T)_V$ es siempre positiva en los gases. Por tanto, el signo de la derivada dT/dV es el inverso del correspondiente a la suma $(\partial p/\partial V)_{T+j^2}$. En el estado 1 tenemos $j^2 < -(\partial p_1/\partial V_1)$, (puesto que $v_1 > c_1$), y $j^2 > -(\partial p_1/\partial V_1)_T$, puesto que la compresibilidad adiabática es siempre menor que la compresibilidad isoterma. Por tanto, en el lado 1, $dT_1/dV_1 < 0$. Si esta derivada permaneciese negativa en todas las partes dentro de la capa de transición, entonces al comprimir el gas (disminuir V), la temperatura aumenta monótonamente de acuerdo con (88.3), desde la cara 1 a la cara 2. En otras palabras, tenemos una onda de choque cuyo espesor se ve muy aumentado por la elevada conductividad térmica (posiblemente hasta una extensión tal que incluso el denominarle onda de choque es un simple convenio).

Sin embargo, si el choque es tan intenso que

$$j^2 < -(\partial p_2/\partial V_2)_T, \tag{88.4}$$

en el estado 2 tenemos, entonces, $dT_2/dV_2 > 0$, de modo que la función $T(V)$ tiene un máximo en algún punto entre V_1 y V_2 (figura 53). Es evidente que la transición del estado 1 al estado 2, variando V continuamente, resulta entonces imposible, puesto que no puede satisfacerse en todos los puntos la desigualdad (88.3).

En consecuencia, tenemos el siguiente esquema de la transición desde el estado inicial 1 al estado final 2. Primeramente encontramos una región en donde el gas se comprime gradualmente pasando del volumen específico V_1 a cierto volumen V' (el valor para el cual $T(V') = T_2$ por primera vez; ver figura 53); el espesor de esta región está determinado por la conductividad térmica y puede ser considerable. La compresión desde V' hasta V_2 ocurre entonces discontinuamente, permaneciendo constante la temperatura al valor T_2. Esta discontinuidad puede denominarse *discontinuidad isoterma.*

Determinemos la variación de la presión y de la densidad en una discontinuidad isoterma, admitiendo que tenemos un gas perfecto. La condición de continuidad del flujo del impulso (88.1), aplicada a los dos lados de la

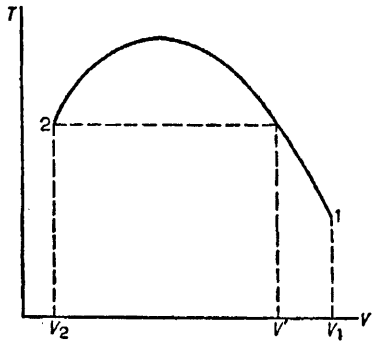

FIG. 53

discontinuidad, da $p' + j^2V' = p_2 + j^2V_2$. En el caso de un gas perfecto $V = RT/\mu p$; puesto que $T' = T_2$, tenemos

$$p' + \frac{j^2RT_2}{\mu p'} = p_2 + \frac{j^2RT_2}{\mu p_2}.$$

La ecuación de segundo grado en p' tiene las soluciones $p' = p_2$ (trivial) y

$$p' = j^2RT_2/\mu p_2 = j^2V_2. \tag{88.5}$$

Podemos expresar j^2 en la forma (82.6), obteniendo $p' = (p_2 - p_1)V_2/(V_1 - V_2)$, y, sustituyendo V_2/V_1 a partir de (85.1), tenemos

$$p' = \tfrac{1}{2}[(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2]. \tag{88.6}$$

Puesto que $p_2 > p'$, vemos que una discontinuidad isoterma se presenta sólo cuando el cociente de las presiones p_2 y p_1 satisface la relación

$$p_2/p_1 > (\gamma+1)/(3-\gamma) \tag{88.7}$$

(RAYLEIGH, 1910). Como es natural, esta condición puede obtenerse directamente a partir de (88.4).

Puesto que la densidad del gas para una temperatura dada es proporcional a la presión, el cociente de densidades en una discontinuidad isoterma es igual al cociente de presiones:

$$\rho'/\rho_2 = V_2/V' = p'/p_2. \tag{88.8}$$

§ 89. Discontinuidades débiles

Además de las discontinuidades superficiales, en las que las magnitudes ρ, p, **v**, etc., son discontinuas, podemos tener también superficies en las que estas magnitudes, aunque permanecen continuas, no sean funciones regulares de las coordenadas. La irregularidad puede ser de diversos tipos. Por ejemplo, pueden ser discontinuas las primeras derivadas espaciales de ρ, p,

v, etc., sobre una superficie, o bien pueden estas derivadas ser infinitas; también las derivadas de orden superior pueden comportarse del mismo modo. Denominaremos a dichas superficies *discontinuidades débiles* en contraste con las discontinuidades fuertes o intensas (ondas de choque y discontinuidades tangenciales), en las que las propias magnitudes ρ, p, **v**, ..., son discontinuas.

A partir de consideraciones sencillas es fácil ver que las discontinuidades débiles se propagan respecto al gas (en cada lado de la superficie) con la velocidad del sonido. En efecto, puesto que las propias funciones ρ, p, **v**, ..., son continuas, pueden «suavizarse» modificándolas sólo cerca de las superficies de discontinuidad y sólo en cantidades arbitrariamente pequeñas, de tal modo que las funciones suavizadas carezcan de singularidades. La verdadera distribución de la presión, por ejemplo, puede representarse así como una superposición de una función perfectamente suave p_0, libre de toda singularidad, y de una perturbación muy pequeña p' de esta distribución cerca de la superficie de discontinuidad; y esta última, como cualquier perturbación pequeña, se propaga respecto al gas con la velocidad del sonido.

Debe resaltarse que en el caso de una onda de choque, las funciones suavizadas diferirían de las verdaderas en magnitudes que en general no son pequeñas y, por tanto, los razonamientos anteriores dejan de ser válidos. Sin embargo, si las discontinuidades en la onda de choque son suficientemente pequeñas, aquellos argumentos vuelven a ser aplicables y dicha onda de choque se propaga con la velocidad del sonido, resultado que se obtuvo por otro método en § 83.

Si el flujo es estacionario en un sistema coordenado dado, entonces la superficie de discontinuidad está en reposo en dicho sistema y el gas fluye a su través. La componente de velocidad normal a la superficie debe ser igual a la velocidad del sonido. Si designamos por α el ángulo formado por la dirección de la velocidad del gas y el plano tangente a la superficie, entonces $v_n = v \operatorname{sen} \alpha = c$, o $\operatorname{sen} \alpha = c/v$, es decir, una superficie de discontinuidad débil corta a las líneas de corrientes formando el ángulo de Mach. En otras palabras, una superficie discontinua débil es una de las superficies características, resultado que es totalmente razonable si recordamos su significado físico: son superficies a lo largo de las cuales se propagan las pequeñas perturbaciones (ver § 79). Es evidente que en el flujo estacionario de un gas pueden producirse discontinuidades débiles sólo a velocidades no inferiores que la del sonido.

Las discontinuidades débiles difieren fundamentalmente de las intensas en el modo de su presentación. Veremos que las ondas de choque pueden formarse como un resultado directo del flujo gaseoso, siendo continuas las condiciones límites (por ejemplo, la formación de ondas de choque en una onda sonora, § 95). En contraste con esto, las discontinuidades débiles no

pueden producirse espontáneamente; son siempre el resultado de alguna singularidad de las condiciones iniciales o límites del flujo. Estas singularidades pueden ser de diversos tipos, como las propias discontinuidades débiles. Por ejemplo, puede producirse una discontinuidad débil a causa de la presencia de ángulos en la superficie de un cuerpo, al cual rodea el flujo; en este caso son discontinuas las primeras derivadas espaciales de la velocidad. También se forma una discontinuidad débil cuando la curvatura de la superficie del cuerpo es discontinua sin ser un ángulo; en este caso son discontinuas las segundas derivadas espaciales de la velocidad, y así sucesivamente. Finalmente, cualquier singularidad en la variación respecto al tiempo del flujo da como resultado una discontinuidad débil no estacionaria.

La componente tangencial de la velocidad del gas respecto a la superficie de una discontinuidad débil está dirigida siempre alejándose del punto (por ejemplo, un ángulo en la superficie de un cuerpo), a partir del cual empieza la perturbación que produce la discontinuidad; diremos que la discontinuidad empieza en este punto. Esto es un ejemplo del hecho de que en el flujo supersónico las perturbaciones se propagan aguas abajo.

La presencia de la viscosidad y de la conducción térmica da como resultado un espesor finito de una discontinuidad débil que, por tanto, es en realidad una capa de transición, como una onda de choque. Sin embargo, su espesor depende únicamente de su intensidad y es constante en el tiempo, mientras que el espesor de una discontinuidad débil aumenta con el tiempo a partir de su formación. Es fácil determinar la ley que rige este aumento. Para ello, consideremos de nuevo la nota hecha al principio de esta sección de que el movimiento de cualquier parte de la superficie de una discontinuidad débil obedece a las mismas ecuaciones que la propagación de cualquier perturbación débil en el gas. Cuando se presenta la viscosidad y la conducción térmica, una perturbación que esté inicialmente concentrada en un pequeño volumen (un «paquete de ondas») se expansiona cuando se mueve al transcurrir el tiempo; la forma de realizarse esta expansión ha sido determinada en § 77. Por tanto, podemos obtener la conclusión de que el espesor δ de una discontinuidad débil es del orden de

$$\delta \sim \sqrt{(act)}, \tag{89.1}$$

siendo t el tiempo a partir de la formación de la discontinuidad y a el coeficiente de la frecuencia elevada al cuadrado en el coeficiente de absorción del sonido. Si la discontinuidad está en reposo, entonces el tiempo t debe sustituirse por l/c, siendo l la distancia al punto en donde se inicia la discontinuidad (por ejemplo, en el caso de una discontinuidad débil que parte de un ángulo que existe en la superficie de un cuerpo, l es la distancia desde el vértice de dicho ángulo); en consecuencia, $\delta \sim \sqrt{(al)}$. Así pues, el espesor de una discontinuidad débil aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo a partir de su formación o de la distancia de su punto de partida.

Para terminar esta sección hagamos las siguientes aclaraciones, análogas a las que hicimos al final del § 79. Allí indicamos que, entre las diversas perturbaciones del estado de un gas en movimiento, las perturbaciones de entropía (a presión constante) y de vorticidad tienen propiedades distintas. Dichas perturbaciones no se mueven respecto al gas y no se propagan con la velocidad del sonido. De aquí que las superficies en las que la entropía y la vorticidad† tienen una discontinuidad pequeña están en reposo respecto al gas y se mueven con él respecto a un sistema fijo de coordenadas. Dichas discontinuidades pueden denominarse *discontinuidades tangenciales débiles*; se mueven junto con las líneas de corriente, y en este aspecto son totalmente análogas a las discontinuidades tangenciales intensas.

† Una discontinuidad débil de la vorticidad implica una discontinuidad débil de la componente tangencial de la velocidad en la superficie de discontinuidad; por ejemplo, las derivadas normales de la velocidad pueden ser discontinuas.

CAPÍTULO X

FLUJO GASEOSO MONODIMENSIONAL

§ 90. Flujo de un gas a través de una tobera

Consideremos el flujo estacionario de un gas que sale de un gran recipiente a través de un tubo de sección recta variable (una *tobera*). Supongamos que el flujo gaseoso es uniforme en toda la sección recta de cada punto del tubo y que la velocidad está dirigida a lo largo de su eje. Para que esto sea así el tubo no debe ser demasiado ancho y el área de su sección recta S debe variar lentamente a lo largo de su longitud. En este caso todas las magnitudes que caracterizan el flujo serán funciones únicamente de la coordenada a lo largo del eje del tubo. Bajo estas condiciones podemos aplicar las relaciones obtenidas en § 80, que son válidas a lo largo de líneas de corriente, directamente a la variación de las magnitudes a lo largo del eje.

La masa de gas que pasa a través de una sección recta del tubo en la unidad de tiempo (*descarga* o *caudal*) es $Q = \rho v S$; este valor evidentemente debe ser constante a lo largo del tubo:

$$Q = S\rho v = \text{constante}. \tag{90.1}$$

Se supone que las dimensiones lineales del recipiente son muy grandes en comparación con el diámetro del tubo. La velocidad del gas en el recipiente puede, por tanto, tomarse como cero y de acuerdo con ello todas las magnitudes con el sufijo 0 en las fórmulas del § 80 tendrán los valores de aquellas mismas magnitudes dentro del recipiente.

Hemos visto que la densidad del flujo $j = \rho v$ no puede superar un cierto valor límite j_*. Por tanto, queda claro que los valores posibles del caudal total Q tienen (para un tubo dado y un estado determinado del gas dentro del recipiente) un límite superior Q_{max} que se determina fácilmente. Si el valor j_* de la densidad del flujo se alcanzase en todas partes, excepto en el punto más estrecho del tubo, tendríamos $j > j_*$ para secciones rectas con valores más pequeños de S, lo cual es imposible. Por tanto, el valor $j = j_*$ puede obtenerse únicamente en el punto más estrecho del tubo; supongamos que el área de su sección recta sea S_{min}. Entonces el límite superior del caudal total es

$$Q_{max} = \rho_* v_* S_{min} = \sqrt{(\gamma p_0 \rho_0)}[2/(\gamma+1)]^{(1+\gamma)/2(\gamma-1)} S_{min}. \tag{90.2}$$

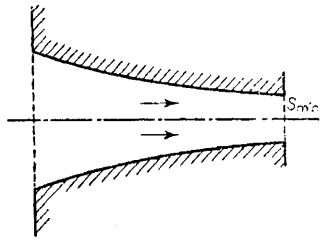

FIG. 54

Consideremos, en primer lugar, una tobera que se estrecha continuamente hacia su extremo exterior, de modo que el área de la sección recta mínima está en dicho extremo (figura 54). Según (90.1), la densidad de flujo j aumenta monótonamente a lo largo del tubo. Lo mismo se cumple para la velocidad del gas v, y la presión, de acuerdo con ello, disminuye monótonamente. El valor más grande posible de j se alcanza si v adquiere el valor c justo en el extremo exterior del tubo, es decir, si $v_1 = c_1 = v_*$ (el sufijo 1 designa las magnitudes que corresponden al extremo exterior). Al mismo tiempo, $p_1 = p_*$.

Sigamos ahora la variación en el modo de fluir hacia fuera del gas cuando disminuye la presión externa p_e. Cuando esta presión disminuye desde el valor p_0, que es la presión en el interior del recipiente, hasta p_*, la presión p_1 en el extremo exterior del tubo disminuye también, y ambas presiones, p_1 y p_e, permanecen iguales; es decir, la totalidad de caída de presión desde p_0 hasta p_e se produce en la tobera. La velocidad v_1, con la cual el gas abandona el tubo, y el caudal total $Q = j_1 S_{\min}$, aumentan, sin embargo, monótonamente. Para $p_e = p_*$ la velocidad se hace igual a la velocidad local del sonido y el caudal alcanza el valor $Q_{\max}$. Cuando la presión externa disminuye aún más, la presión p_1 permanece constante en el valor p_* y la caída de presión desde p_* hasta p_e se produce en el exterior del tubo, en el medio que lo rodea. En otras palabras, la caída de presión a lo largo del tubo no puede ser mayor que de p_0 a p_*, sea cualquiera la presión exterior. En el caso del aire ($p_* = 0{,}53\ p_0$), la caída de presión máxima es $0{,}47\ p_0$. La velocidad en el extremo del tubo y el caudal permanecen también constantes para $p_e < p_*$. Así pues, el gas no puede adquirir una velocidad supersónica al fluir a través de una tobera de este tipo.

Si consideramos únicamente el flujo en la proximidad inmediata del extremo del tubo, el movimiento del gas después de abandonar el tubo es esencialmente un flujo alrededor de un ángulo, cuyo vértice es la arista de la boca del tubo; estudiaremos con detalle este flujo en § 104.

La imposibilidad de obtener velocidades supersónicas mediante flujos a través de una tobera que se estrecha de modo continuo se debe al hecho de

que puede alcanzarse únicamente una velocidad igual a la velocidad local del sonido en el extremo de dicho tubo. Es evidente que puede alcanzarse una velocidad supersónica mediante una tobera que primeramente se estreche y luego se ensanche otra vez (figura 55). Este tipo de tobera se denomina *tobera de Laval.*

La densidad de flujo máximo j_*, si llega a alcanzarse, puede presentarse únicamente en la sección recta más estrecha, de modo que el caudal no puede superar a $S_{\min} j_*$. En la parte de estrechamiento de la tobera, la densidad de flujo aumenta (y la presión disminuye); la curva de la figura 56 muestra j en función† de p, y la variación que acabamos de describir corresponde al intervalo desde c hasta b. Si la densidad de flujo máximo se alcanza en la sección recta $S_{\min}$ (el punto b de la figura 56), la presión continúa disminuyendo en la parte de la tobera en la que existe un ensanchamiento, mientras que j empieza a disminuir también, proceso que corresponde al segmento ba de la curva. En el extremo exterior del tubo j toma un valor

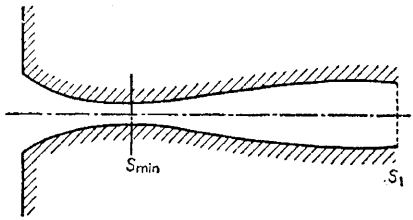

FIG. 55

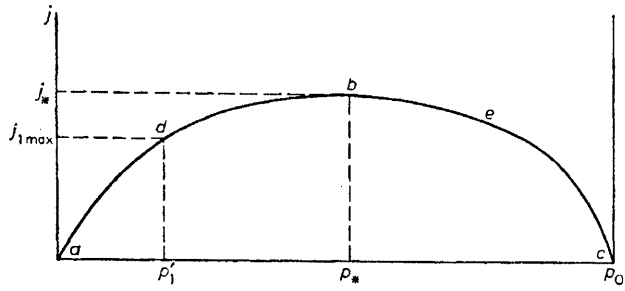

FIG. 56

† De acuerdo con las fórmulas (80.15-80.17), la dependencia es

$$j = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_0 \rho_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

definido, $j_{1,\max} = j_* S_{\min}/S_1$, y la presión tiene el valor correspondiente, designado en la figura 56 por p_1', en un punto determinado d de la curva. Sin embargo, si sólo se alcanza un punto concreto e en la sección recta $S_{\min}$, la presión aumenta en la parte de ensanchamiento de la tobera, correspondiendo un retorno hacia abajo de la curva desde e hacia c. A primera vista puede parecer que es posible pasar de modo discontinuo desde cb hasta ab sin pasar a través del punto b, mediante la formación de una onda de choque. Sin embargo, esto es imposible, puesto que el gas que «entra» en la onda de choque no puede tener una velocidad subsónica.

Recordando estos resultados, analizaremos ahora el modo de variación del flujo de salida cuando aumenta gradualmente la presión externa p_e. En el caso de presiones pequeñas, desde cero hasta p_1', la presión p_* y la velocidad $v_* = c_*$ se alcanzan en la sección recta $S_{\min}$. En la parte de ensanchamiento de la tobera la velocidad continúa aumentando, de modo que como resultado se obtiene un flujo supersónico del gas y de acuerdo con ello la presión continúa disminuyendo, alcanzando el valor p_1' en el extremo exterior del tubo, cualquiera que sea la presión p_e. La presión disminuye desde p_1' hasta p_e fuera de la tobera en la onda de rarefacción que abandona el borde la boca del tubo (ver § 104).

Cuando p_e supera a p_1', una onda de choque oblicua sale del borde de la boca del tubo, comprimiendo el gas desde p_1' hasta p_e (§ 104). Sin embargo, veremos que una onda de choque estacionaria solamente puede abandonar una superficie sólida si su intensidad no es demasiado grande (§ 103). De aquí que, cuando la presión externa aumenta adicionalmente, la onda de choque pronto empieza a moverse hacia el interior de la tobera, produciéndose la separación delante de la misma y en la superficie interior del tubo. Para un determinado valor de p_e la onda de choque alcanza la sección recta más estrecha y entonces desaparece; el flujo se hace en todas partes subsónico con separación en las paredes a lo largo de la parte ensanchada de la tobera. Todos estos fenómenos son, como es natural, tridimensionales.

PROBLEMA

A un gas perfecto se le suministra una pequeña cantidad de calor en un segmento corto del tubo por donde circula con flujo estacionario. Determinar la variación de la velocidad del gas cuando pasa a través de este segmento.

Solución. Sea Sq la cantidad de calor suministrada por unidad de tiempo, siendo S el área de la sección recta del tubo en el segmento de que se trata. La densidad de flujo másico $j = \rho v$ y la densidad de flujo del impulso $p + jv$ son las mismas en ambos lados del segmento caliente; de aquí que $\Delta p = -j\Delta v$, designando por Δ la variación de una magnitud cuando pasa a través de dicho segmento. La diferencia de la densidad de flujo de energía $(w + v^2/2)j$ es q. Escribiendo $w = \gamma p/(\gamma - 1)\rho = \gamma pv/(\gamma - 1)j$, obtenemos (suponiendo que Δv y Δp son pequeños) $vj\Delta v + \gamma(p\Delta v + v\Delta p)/(\gamma - 1) = q$. Eliminando Δp,

tenemos $\Delta v = (\gamma - 1)q/\rho(c^2 - v^2)$. Vemos que, en el flujo subsónico, el suministro de calor acelera el flujo ($\Delta v > 0$), mientras que en el flujo supersónico lo retarda.

Escribiendo la temperatura del gas en la forma $T = \mu p/R\rho = \mu pv/Rj$ (siendo R la constante de los gases), se tiene

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma-1)q}{Rj(c^2-v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

En el caso del flujo supersónico esta expresión es siempre positiva y la temperatura del gas aumenta; sin embargo, en el caso de flujo subsónico, ΔT puede ser o bien positiva o bien negativa.

§ 91. Flujo de un gas viscoso en una tubería

Consideremos el flujo de un gas en una tubería (de sección recta constante) suficientemente larga para que el rozamiento del gas contra las paredes, es decir, la viscosidad del gas, no pueda despreciarse. Supondremos que las paredes están térmicamente aisladas, de modo que no existe intercambio de calor entre el gas y el medio que lo rodea. En el caso de velocidades del gas del orden de (o superiores a) la velocidad del sonido (único caso que estudiaremos aquí), el flujo de gas en la tubería es, como es natural, turbulento, si el radio de la misma no es pequeño. La turbulencia del flujo es importante respecto a nuestro problema sólo en un aspecto: hemos visto en § 43 que, en el flujo turbulento, la velocidad (media) es prácticamente la misma en casi todos los puntos de la sección recta de la tubería y disminuye rápidamente hacia cero cerca de las paredes. Por tanto, supondremos que la velocidad del gas v es constante en toda la sección recta y la definiremos de modo que el producto $S\rho v$ (siendo S el área de la sección recta) sea igual al caudal total a través de la sección recta.

Puesto que el caudal total $S\rho v$ es constante a lo largo de la tubería y se supone que S es constante, la densidad de flujo másico debe ser también constante:

$$j = \rho v = \text{constante}. \tag{91.1}$$

A continuación, puesto que la tubería está térmicamente aislada, debe ser también constante el flujo de energía total transportado por el gas a través de una sección recta cualquiera. Este flujo vale $S\rho v(w + v^2/2)$, y según (91.1) tenemos

$$w + \tfrac{1}{2}v^2 = w + \tfrac{1}{2}j^2V^2 = \text{constante}. \tag{91.2}$$

Como es natural, la entropía s del gas no permanece constante, sino que aumenta cuando el gas se mueve a lo largo de la tubería debido al rozamiento interno. Si x es la coordenada a lo largo de la tubería, aumentando aguas abajo, podemos escribir

$$ds/dx > 0. \tag{91.3}$$

Derivemos a continuación (91.2) respecto a x. Puesto que $dw = Tds + Vdp$, tenemos

$$T\frac{ds}{dx} + V\frac{dp}{dx} + j^2V\frac{dV}{dx} = 0.$$

A continuación, sustituyendo

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}, \tag{91.4}$$

obtenemos

$$\left[T + j^2V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\right]\frac{ds}{dx} = -V\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}. \tag{91.5}$$

Por una bien conocida fórmula de la termodinámica, $(\partial V/\partial s)_p = (T/c_p)(\partial V/\partial T)_p$. El coeficiente de dilatación térmica es positivo en el caso de los gases. Por tanto, utilizando (91.3), se obtiene la conclusión que el primer miembro de (91.5) es positivo. Por consiguiente, el signo de la derivada dp/dx es el de $-[1 + j^2(\partial V/\partial p)_s] = (v/c)^2 - 1$. Vemos que

$$dp/dx \lesseqgtr 0 \text{ para } v \lesseqgtr c. \tag{91.6}$$

Así pues, en el caso de flujo subsónico la presión disminuye aguas abajo, lo mismo que ocurría en el caso de un fluido incompresible. Sin embargo, aumenta en el caso del flujo supersónico.

De modo semejante podemos determinar el signo de la derivada dV/dx. Puesto que $j = v/V$ = constante, el signo de dv/dx es el mismo que el de dV/dx. Este último puede expresarse en función de la derivada positiva ds/dx mediante (91.4) y (91.5). El resultado es que

$$dv/dx \gtreqless 0 \text{ para } v \lesseqgtr c, \tag{91.7}$$

es decir, la velocidad aumenta aguas abajo en el caso del flujo subsónico y disminuye en el caso del flujo supersónico.

Dos magnitudes termodinámicas cualesquiera de un gas que fluye en el interior de una tubería son funciones entre sí (independientemente de la ley de resistencia de la tubería, además de ser independientes de otras magnitudes). Estas funciones dependen de la constante j como parámetro y vienen dadas por la ecuación $w + j^2V^2/2$ = constante, que se obtiene eliminando la velocidad de las ecuaciones de conservación de masa y energía para el gas.

Analicemos la naturaleza de las curvas que dan, por ejemplo, la entropía en función de la presión. Volviendo a escribir (91.5) en la forma

$$\frac{ds}{dp} = V\frac{(v/c)^2 - 1}{T + j^2V(\partial V/\partial s)_p},$$

vemos que, en el punto en el que $v = c$, la entropía tiene un valor extremal. Es fácil ver que s pasa por un máximo. Puesto que la segunda derivada respecto a p en este punto es

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}p^2}\right]_{v=c} = -\frac{j^2 V(\partial^2 V/\partial p^2)_s}{T + j^2 V(\partial V/\partial s)_p} < 0;$$

admitimos, como es normal, que la derivada $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ es positiva.

Las curvas que dan s en función de p (denominadas *líneas de Fanno*) tienen, por tanto, la forma que se indica en la figura 57. La región de velocidades subsónicas está a la derecha del máximo y la de velocidades subsónicas a la izquierda. Cuando el parámetro j aumenta, pasamos a curvas inferiores. En efecto, derivando la ecuación (91.2) respecto a j para p constante, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}j} = -\frac{jV^2}{T + j^2 V(\partial V/\partial s)_p} < 0.$$

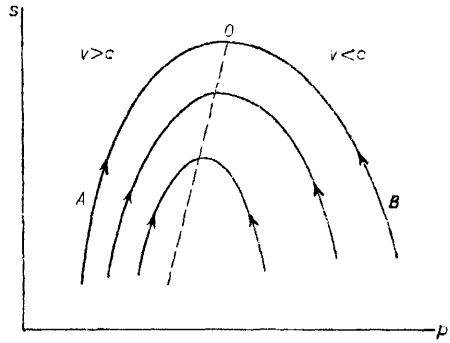

FIG. 57

A partir de los resultados anteriores se puede obtener una conclusión interesante. Supongamos que la velocidad del gas a la entrada de la tubería es menor que la del sonido. La entropía aumenta aguas abajo y la presión disminuye; esto corresponde a un movimiento a lo largo de la rama de la derecha de la curva $s = s(p)$, a partir de B hacia O (figura 57). Sin embargo, este movimiento sólo puede continuar hasta que la entropía alcanza su valor máximo. Un movimiento adicional a lo largo de la curva más allá de O (es decir, hacia el interior de la región de velocidades supersónicas) no es posible, puesto que la entropía del gas disminuiría cuando éste se moviese a lo largo de la tubería. La transición entre las ramas BO y OA no puede efectuarse ni siquiera mediante una onda de choque, puesto que el gas que

entra en una onda de choque no puede moverse con velocidad subsónica.

Así pues, llegamos a la conclusión de que, si la velocidad a la entrada de la tubería es menor que la del sonido, el flujo permanece subsónico en todo punto de la tubería. La velocidad del gas se hace igual a la velocidad local del sonido únicamente en el otro extremo de la tubería, si es que ocurre (sería así si la presión del medio externo en el cual entra el gas es suficientemente baja).

Con objeto de que el gas pueda tener velocidades supersónicas en la tubería, su velocidad a la entrada debe ser también supersónica. Por las propiedades generales del flujo supersónico (la imposibilidad de propagar perturbaciones aguas arriba), el flujo será entonces totalmente independiente de las condiciones a la salida de la tubería. En particular, la entropía aumentará a lo largo de la tubería de un modo totalmente definido y su valor máximo se obtendrá a una distancia definida $x = l_k$ de la entrada. Si la longitud total l de la tubería es menor que l_k, el flujo es supersónico en toda ella (correspondiendo a un movimiento sobre la rama AO desde A hacia O). Si, por otra parte, $l > l_k$, el flujo no puede ser supersónico a través de la tubería ni puede existir una transición suave a flujos supersónicos, puesto que podemos únicamente movernos a lo largo de la rama OB en el sentido indicado por la flecha. Por tanto, en este caso deberá formarse necesariamente una onda de choque que produzca un cambio discontinuo del flujo de supersónico a subsónico. Por consiguiente, la presión se ve aumentada y pasamos de la rama AO a BO sin pasar a través del punto O. El flujo es totalmente subsónico más allá de la discontinuidad.

§ 92. Movimiento de flujo de semejanza monodimensional

Una categoría importante de movimiento monodimensional no estacionario en ondas compresibles es el del flujo que se desarrolla en condiciones donde existan velocidades características, pero no longitudes características. El ejemplo más sencillo de dicho flujo viene dado por el flujo de gas en una tubería cilíndrica semiinfinita terminada por un pistón, cuando éste empieza a moverse con velocidad constante.

Dicho flujo se define por el parámetro velocidad y por los parámetros que dan, por ejemplo, la presión del gas y la densidad en el estado inicial. Sin embargo, no podemos formar ninguna combinación de estos parámetros que tengan las dimensiones de longitud o de tiempo. Por tanto, se deduce que la distribución de todas las magnitudes puede depender de las coordenadas x en el tiempo t únicamente a través del cociente x/t, que tiene las dimensiones de velocidad. En otras palabras, estas distribuciones en instantes distintos serán semejantes, difiriendo únicamente en la escala a lo largo del eje x, que aumenta proporcionalmente al tiempo. Podemos decir enton-

ces que el esquema del flujo no varía si las longitudes se miden en una unidad que aumenta proporcionalmente a t. Cuando el esquema de flujo resulta invariable con el tiempo, si la escala de longitud se modifica apropiadamente, hablamos de *flujo de semejanza.*

La ecuación de conservación de la entropía en el caso de un flujo que depende únicamente de una coordenada x es $\partial s/\partial t + v_x\,\partial s/\partial x = 0$. Admitiendo que todas las magnitudes dependen únicamente de $\xi = x/t$, y observando que en este caso $\partial/\partial x = (1/t)\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$, $\partial/\partial t = -(\xi/t)\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$, obtenemos $(v_x - \xi)\,s' = 0$ (designando con el símbolo prima la derivación respecto a ξ). De aquí que $s' = 0$, es decir, $s =$ constante†; por tanto, el flujo de semejanza en una dimensión debe ser isoentrópico. De modo parecido, a partir de las componentes y y z de la ecuación de Euler: $\partial v_y/\partial t + v_x\,\partial v_y/\partial x = 0$, $\partial v_z/\partial t + v_x\,\partial v_z/\partial x = 0$, encontramos que v_y y v_z son constantes, que tomaremos como cero sin pérdida de generalidad.

A continuación, la ecuación de continuidad y la componente x de la ecuación de Euler son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{92.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{92.2}$$

aquí y en lo que sigue escribiremos v_x simplemente como v. En función de la variable ξ, estas ecuaciones se transforman en

$$(v-\xi)\rho' + \rho v' = 0, \tag{92.3}$$

$$(v-\xi)v' = -p'/\rho = -c^2\rho'/\rho. \tag{92.4}$$

En la segunda ecuación hemos puesto $p' = (\partial p/\partial\rho)_s\,\rho' = c^2\rho'$, puesto que la entropía es constante.

En primer lugar, estas ecuaciones tienen la solución trivial $v =$ constante, $\rho =$ constante, es decir, un flujo uniforme de velocidad constante. Para hallar una solución no trivial eliminemos ρ' y v' de las ecuaciones, obteniendo $(v-\xi)^2 = c^2$, de aquí que $\xi = v \pm c$. Tomemos el signo +:

$$x/t = v + c; \tag{92.5}$$

esta selección del signo significa que tomamos el eje positivo en una dirección y sentido definidos, seleccionados del modo que indicaremos a continuación. Finalmente, sustituyendo $v - \xi = -c$ en (92.3), obtenemos $c\rho' = \rho v'$, o sea, $\rho\mathrm{d}v = c\mathrm{d}\rho$. La velocidad del sonido es una función del estado termodinámico del gas; tomando como magnitudes termodinámicas fundamentales la entropía s y la densidad ρ, podemos representar la velocidad del sonido

† La hipótesis de que $v_x - \xi = 0$, resultaría contradictoria con las otras ecuaciones del movimiento; a partir de (92.3) tendríamos $v_x =$ constante, en contra de la hipótesis.

como una función $c(\rho)$ de la densidad para un valor dado cualquiera de la entropía constante. Entendiendo que c es dicha función, podemos escribir

$$v = \int c\mathrm{d}\rho/\rho = \int \mathrm{d}p/c\rho. \tag{92.6}$$

Esta fórmula puede escribirse también en la forma

$$v = \int \sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)}, \tag{92.7}$$

en la cual permanece abierta la selección de la variable dependiente.

Las fórmulas (92.5) y (92.6) dan la solución buscada de las ecuaciones del movimiento. Si se conoce la función $c(\rho)$, entonces puede calcularse la velocidad v en función de la densidad a partir de (92.6). La ecuación (92.5) determina entonces la densidad como una función implícita de x/t. y así queda determinada también la relación entre todas las demás magnitudes con x/t.

Podemos deducir algunas propiedades generales de la solución así obtenida. Derivando la ecuación (92.5) respecto a x, tenemos

$$t\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}(v+c)}{\mathrm{d}\rho} = 1. \tag{92.8}$$

Para la derivada de $v + c$ tenemos, según (92.6),

$$\frac{\mathrm{d}(v+c)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho c)}{\mathrm{d}\rho}.$$

Pero

$$\rho c = \rho\sqrt{(\partial p/\partial\rho)} = 1/\sqrt{(-\partial p/\partial V)};$$

derivando, tenemos

$$\mathrm{d}(\rho c)/\mathrm{d}\rho = c^2\mathrm{d}(\rho c)/\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}\rho^3c^5(\partial^2V/\partial p^2)_s. \tag{92.9}$$

Así pues,

$$\mathrm{d}(v+c)/\mathrm{d}\rho = \tfrac{1}{2}\rho^2c^5(\partial^2V/\partial p^2)_s > 0. \tag{92.10}$$

Se deduce, por tanto, a partir de (92.8) que $\partial\rho/\partial x > 0$ para $t > 0$.† Puesto que $\partial\rho/\partial x = c^2\,\partial\rho/\partial x$, se obtiene la conclusión de que $\partial p/\partial x > 0$ también. Finalmente, tenemos $\partial v/\partial x = (c/\rho)\partial\rho/\partial x$, de modo que $\partial v/\partial x > 0$. Por consiguiente, son válidas las desigualdades

$$\partial\rho/\partial x > 0, \qquad \partial p/\partial x > 0, \qquad \partial v/\partial x > 0 \tag{92.11}$$

† El flujo de semejanza que estamos aquí considerando carece de significado para tiempos $t < 0$. Dicho flujo sólo podría producirse debido a alguna singularidad en las condiciones iniciales ($t = 0$) del flujo en el punto $x = 0$ y, por tanto, sólo tiene lugar para $t > 0$ (en nuestro ejemplo, la velocidad del pistón varía discontinuamente en $t = 0$. Ver también § 93).

El significado de estas desigualdades se hace más claro si seguimos la variación de las magnitudes en cuestión, no a lo largo del eje x para un valor dado t, sino en función del tiempo para un elemento determinado del gas cuando éste se mueve. Esta variación viene dada por la derivada total; por ejemplo, para la densidad tenemos, utilizando la ecuación de continuidad, $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + v\,\partial\rho/\partial x = -\rho\,\partial v/\partial x$. Según la tercera desigualdad (92.11), esta magnitud es negativa y, por lo tanto, también lo es dp/dt:

$$d\rho/dt < 0, \qquad dp/dt < 0. \tag{92.12}$$

Análogamente [utilizando la ecuación de Euler (92.2)] podemos ver que $dv/dt < 0$; sin embargo, esto no significa que el valor de la velocidad disminuye con el tiempo, puesto que v puede ser negativa. Las desigualdades (92.12) muestran que la densidad y la presión de un elemento de un gas cualquiera disminuye al moverse éste. En otras palabras, el gas se ve rarificado continuamente en su movimiento. Por consiguiente, dicho flujo puede denominarse como una *onda de rarefacción no estacionaria.*

Una onda de rarefacción puede propagarse únicamente a una distancia finita a lo largo del eje x; esto se ve a partir del hecho de que la fórmula (92.5) daría una velocidad infinita para $x \to \pm\infty$, lo cual es imposible.

Apliquemos la fórmula (92.5) a un plano que limita la región del espacio ocupado por la onda de rarefacción. Aquí x/t es la velocidad de este límite respecto al sistema de coordenadas fijas escogido. Su velocidad respecto al propio gas es $(x/t) - v$ y, por (92.5), es igual a la velocidad local del sonido. Esto significa que los límites de una onda de rarefacción son discontinuidades débiles. El flujo de semejanza en casos diferentes se constituye, por tanto, de ondas de rarefacción y de regiones de flujo constante separadas por superficies de discontinuidad débil.†

Se ve ahora que la selección del signo en (92.5) corresponde al hecho de que estas discontinuidades débiles se supone que se mueven en el sentido positivo del eje de las x respecto al gas. Las desigualdades (92.11) surgen como consecuencia de esta selección, pero como es natural las desigualdades (92.12) no dependen del sentido ni dirección del eje x.

Normalmente en los problemas reales nos ocupamos con ondas de rarefacción limitadas por una cara por una región en donde el gas está en reposo. Supongamos que esta región (I en la figura 58) está a la derecha de la onda de rarefacción. La región II es la onda de rarefacción y la región III contiene gas que se mueve con velocidad constante. Las flechas de la figura muestran el sentido del movimiento del gas y de las discontinuidades débiles que limitan la onda de rarefacción; la discontinuidad a siempre se mueve dentro del gas en reposo, pero la discontinuidad b se mueve en un sentido

† Como es natural, también pueden existir regiones de flujo constante separadas por ondas de choque.

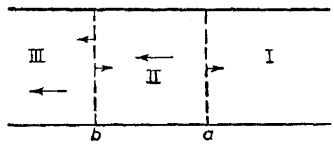

FIG. 58

cualquiera, dependiendo de la velocidad alcanzada en la onda de rarefacción (ver problema 2). Podemos dar explícitamente las relaciones existentes entre las diversas magnitudes de una onda de rarefacción de este tipo admitiendo que el gas es perfecto. En el caso de un proceso adiabático $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{constante}$. Puesto que la velocidad del sonido es proporcional a $\sqrt{T}$, podemos escribir esta relación como

$$\rho = \rho_0(c/c_0)^{2/(\gamma-1)}. \tag{92.13}$$

Sustituyendo esta expresión en la integral (92.6), obtenemos

$$v = \frac{2}{\gamma-1}\int \mathrm{d}c = \frac{2}{\gamma-1}(c-c_0);$$

se escoge la constante de integración, de modo que $c = c_0$ para $v = 0$ (utilizamos el sufijo 0 para referirnos al punto en donde el gas está en reposo). Expresaremos todas las magnitudes en función de v, recordando que, con la situación anterior de las diversas regiones, la velocidad del gas tiene el sentido negativo del eje de las x, es decir, $v < 0$. Así pues,

$$c = c_0 - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)|v|, \tag{92.14}$$

que determina la velocidad local del sonido en función de la velocidad del gas. Sustituyendo en (92.13), encontramos que la densidad resulta ser

$$\rho = \rho_0[1-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)|v|/c_0]^{2/(\gamma-1)}, \tag{92.15}$$

y análogamente la presión es

$$p = p_0[1-\tfrac{1}{2}(\gamma-1)|v|/c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \tag{92.16}$$

Finalmente, sustituyendo (92.14) en la fórmula (92.5), obtenemos

$$|v| = \frac{2}{\gamma+1}\left(c_0 - \frac{x}{t}\right), \tag{92.17}$$

que nos da v en función de x y t.

Por definición, la magnitud c no puede ser negativa. Por tanto, podemos deducir a partir de (92.14) la conclusión importante de que la velocidad debe satisfacer la desigualdad

$$|v| \leqslant 2c_0/(\gamma-1); \tag{92.18}$$

cuando la velocidad alcanza este valor límite, la densidad del gas (y también p y c) se hace cero. Así pues, un gas originalmente en reposo y expansionándose de modo no estacionario en una onda de rarefacción, puede acelerarse únicamente a velocidades que no superen a $2c_0/(\gamma - 1)$.

Ya hemos mencionado al principio de esta sección un ejemplo simple de flujo de semejanza, a saber, aquél que se produce en una tubería cilíndrica en la que un pistón empieza a moverse con velocidad constante. Si el pistón se mueve hacia el exterior de la tubería crea una rarefacción y se forma una onda de rarefacción del tipo descrito. Sin embargo, si el pistón se mueve hacia dentro, comprime el gas que hay delante de él, y la transición a la presión menor original solamente puede producirse en una onda de choque, que de hecho se forma delante de un pistón que se mueve hacia delante en una tubería (ver los problemas siguientes).†

PROBLEMAS

Problema 1. Un gas perfecto ocupa una tubería cilíndrica semiinfinita terminada por un pistón. En un instante inicial el pistón empieza a moverse hacia el interior de la tubería con velocidad constante U. Determinar el flujo resultante.

Solución. Se forma una onda de choque delante del pistón y se mueve a lo largo de la tubería. En el instante inicial esta onda de choque y el pistón coinciden, pero en instantes subsiguientes el choque se adelanta al pistón y aparece una región de gas comprendida entre ambas (región 2). Delante de la onda de choque (región 1), la presión de gas es igual a su valor inicial p_1 y su velocidad respecto a la tubería es cero. En la región 2, el gas se mueve con velocidad constante igual a la velocidad U del pistón (figura 59). La diferencia de velocidades entre las regiones 1 y 2 es, por tanto, también U, y, por las fórmulas (82.7) y (85.1), podemos escribir

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{[(p_2-p_1)(V_1-V_2)]} \\ &= (p_2-p_1)\sqrt{\{2V_1/[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2]\}}. \end{aligned}$$

De aquí se encuentra que la presión del gas p_2 entre el pistón y la onda de choque viene dada por

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1}\sqrt{\left[1 + \frac{(\gamma+1)^2U^2}{16c_1^2}\right]}.$$

† Podemos mencionar también un flujo de semejanza análogo en tres dimensiones: el flujo gaseoso con simetría central producido por una esfera en expansión uniforme. Delante de la esfera se forma una onda de choque esférica, que se expansiona con velocidad constante. A diferencia de lo que ocurre en el caso monodimensional, no es constante la velocidad del gas entre la esfera y el choque; no puede integrarse analíticamente la ecuación que la determina como una función del cociente r/t.

Este problema ha sido estudiado por L. I. SEDOV (1945; ver su obra *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Cleaver-Hume Press, London, 1959) y G. I. TAYLOR, *Proceedings of the Royal Society*, **A186**, 273, 1946.

Sabiendo p_2, podemos calcular, a partir de las fórmulas (85.4), la velocidad de la onda de choque respecto al gas en cada lado de la misma. Puesto que el gas 1 está en reposo, la velocidad de la onda de choque respecto a él es igual a la velocidad de propagación del choque en la tubería. Si la coordenada x (a lo largo de la tubería) se mide a partir de la posición inicial del pistón (estando el gas en el lado $x > 0$), encontramos la posición de la onda de choque en el tiempo t, que resulta ser

$$x = t\{\tfrac{1}{4}(\gamma+1)U+\sqrt{[\tfrac{1}{16}(\gamma+1)^2U^2+c_1^2]}\},$$

mientras que la posición del pistón es $x = Ut$.

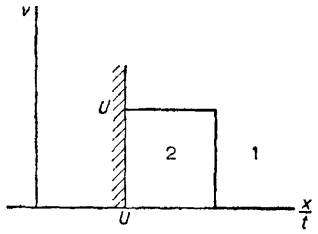

FIG. 59

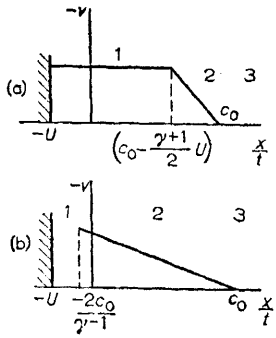

FIG. 60

Problema 2. Igual que el problema 1, pero para el caso en el que el pistón se mueve saliendo de la tubería con velocidad U.

Solución. El pistón limita o confina una región de gas (región 1, en la figura 60*a*) que se mueve en el sentido negativo del eje de las x con velocidad constante $-U$, igual a la propia velocidad del pistón. Entonces, se obtiene una onda de rarefacción (2) en la cual el gas se mueve en el sentido negativo del eje de las x, variando linealmente su velocidad desde $-U$ hasta cero, de acuerdo con (92.17). La presión varía de acuerdo con (92.16) desde $p_1 = p_0[1-(\gamma+1)U/2c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)}$ en el gas 1 hasta p_0 en el gas 3, que está en reposo. El límite de las regiones 1 y 2 viene dado por la condición $v = -U$; de acuerdo con (92.17), tenemos $x = [c_0-(\gamma+1)U/2]t = (c-U)t$, siendo c la velocidad del sonido en el gas 1. En el límite de las regiones 2 y 3, $v = 0$, de aquí que $x = c_0t$. Ambos límites son discontinuidades débiles; la segunda se propaga siempre hacia la derecha (es decir, alejándose del pistón), pero la primera puede propagarse tanto hacia la derecha (como se ve en la figura 60*a*) o hacia la izquierda [si la velocidad del pistón $U > 2c_0/(\gamma+1)$].

El esquema de flujo que acabamos de describir puede producirse únicamente si $U < 2c_0/(\gamma - 1)$. Si $U > 2c_0/(\gamma - 1)$, se forma un vacío delante del pistón (el gas no puede seguir al pistón) que se extiende desde el pistón hasta el punto $x = -2c_0t/(\gamma - 1)$ (región 1 en la figura 60*b*). En este punto, $v = -2c_0(\gamma - 1)$; entonces, sigue la región 2, en la cual la velocidad disminuye hasta cero en el punto $x = c_0t$, y luego la región 3, en donde el gas está en reposo.

Problema 3. Un gas ocupa una tubería cilíndrica semiinfinita ($x > 0$) terminada por una válvula. En el instante $t = 0$, se abre la válvula y el gas fluye hacia el medio exterior, cuya presión p_e es menor que la presión inicial p_0 dentro de la tubería. Determinar el flujo resultante.

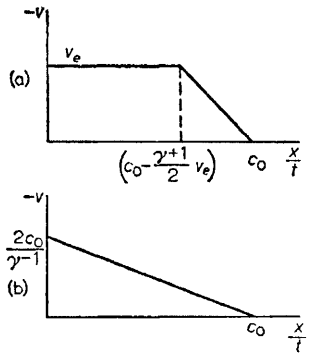

FIG. 61

Solución. Sea $-v_e$ la velocidad del gas que corresponde a la presión externa p_e de acuerdo con la fórmula (92.16); para $x = 0$ y $t > 0$, debemos tener $v = -v_e$. Si $v_e < 2c_0/(\gamma + 1)$, se tiene como resultado la distribución de velocidades indicada en la figura 61*a*. Para $v_e = -2c_0/(\gamma + 1)$ [correspondiente a una velocidad de flujo de salida igual a la velocidad local del sonido al final de la tubería: esto puede verse fácilmente haciendo $v = c$ en (92.14)], se anula la región de velocidad constante y se obtiene el esquema indicado en la figura 61*b*. La cantidad $2c_0(\gamma + 1)$ es la velocidad de flujo de salida de la tubería más grande posible en las condiciones establecidas. Si la presión externa p_e es tal que

$$p_e < p_0[2/(\gamma+1)]^{2\gamma/(\gamma-1)}, \tag{1}$$

la velocidad correspondiente supera a $2c_0/(\gamma + 1)$. En realidad, la presión en el punto de salida de la tubería debería seguir siendo igual al valor límite [el segundo miembro de (1)] y la velocidad de flujo de salida debería ser $2c_0/(\gamma + 1)$; la caída de presión restante (hasta p_e) se produce en el medio externo.

Problema 4. Una tubería infinita se divide mediante un pistón; en un lado de la misma ($x < 0$) existe, en el instante inicial, gas a presión p_0 y en el otro lado existe el vacío. Determinar el movimiento del pistón cuando se expansiona el gas.

Solución. En el gas se forma una onda de rarefacción; uno de sus límites se mueve hacia la derecha con el pistón y el otro se mueve hacia la izquierda. La ecuación del movimiento del pistón es

$$m\,dU/dt = p_0[1 - \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)U/c_0]^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

siendo U la velocidad del pistón y m su masa por unidad de área. Integrando, obtenemos

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma-1}\left\{1-\left[1+\frac{(\gamma+1)p_0}{2mc_0}\right]^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}\right\}.$$

Problema 5. Determinar el flujo de una onda de rarefacción isoterma de semejanza.

Solución. La velocidad isoterma del sonido es $c_T = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_T} = \sqrt{(RT/\mu)}$, y en el caso de temperatura constante c_T = constante = c_{T_0}. De acuerdo con (92.5) y (92.6) tenemos, por tanto,

$$v = c_{T_0}\log(\rho/\rho_0) = c_{T_0}\log(p/p_0) = (x/t)-c_{T_0}.$$

§ 93. Discontinuidades en las condiciones iniciales

Una de las razones más importantes para la presencia de superficies de discontinuidad en un gas es la posibilidad de discontinuidades en las condiciones iniciales. Estas condiciones (es decir, las distribuciones iniciales de velocidad, presión, etc.) pueden, en general, escribirse arbitrariamente. En particular, no necesitan ser continuas en todos los puntos, sino que pueden ser discontinuas sobre diversas superficies. Por ejemplo, si se ponen en contacto dos masas de gas a presiones diferentes en un instante dado, su superficie de contacto será una superficie de discontinuidad de la distribución de presiones iniciales.

Es importante que las discontinuidades de las diversas magnitudes en las condiciones iniciales (o, como diremos brevemente, en las *discontinuidades iniciales*) puedan tener valores cualesquiera; no es necesario que existan relaciones entre ellas. Sin embargo, sabemos que deben cumplirse ciertas condiciones sobre las superficies de discontinuidad estables en un gas; por ejemplo, las discontinuidades de densidad y de presión en una onda de choque están relacionadas por la adiabática del choque. Por tanto, resulta claro que si estas condiciones no se satisfacen en la discontinuidad inicial no puede continuar siendo una discontinuidad en los instantes siguientes. En lugar de ello, la discontinuidad inicial en general se desdobla en varias discontinuidades, cada una de las cuales es uno de los posibles tipos de discontinuidad (onda de choque, discontinuidad tangencial, discontinuidad débil); en el transcurso del tiempo, estas discontinuidades se separan. Un estudio general del comportamiento de una discontinuidad arbitraria ha sido realizado por N. E. Kochin (1926).

Durante un intervalo breve de tiempo después del instante inicial $t = 0$, las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial no se mueven alejándose a distancias grandes y el flujo en consideración tiene lugar, por tanto, en un volumen relativamente pequeño junto a la superficie de la discontinuidad inicial. Como es normal, basta considerar porciones separadas de esta superficie, cada una de las cuales puede considerarse como plana.

Por tanto, únicamente necesitamos considerar una superficie plana de discontinuidad que tomaremos como plano yz. Es evidente, a partir de la simetría, que las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial serán también planos y perpendiculares al eje x. El esquema de flujo dependerá de la coordenada x únicamente (y del tiempo), de modo que el problema es monodimensional. No existiendo parámetros característicos de longitud y tiempo tenemos un problema de semejanza y pueden utilizarse los resultados obtenidos en § 92.

Las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad inicial puede moverse evidentemente alejándose de su punto de formación, es decir, alejándose de la posición de la discontinuidad inicial. Es fácil ver que pueden moverse en cada sentido (el sentido positivo o negativo del eje de las x), o bien una onda de choque o bien un par de discontinuidades débiles que limiten una onda de rarefacción. En efecto, si existen, por ejemplo, dos ondas de choque formadas en el mismo punto en el instante $t = 0$ y ambas se propagan en el sentido positivo del eje de las x, la que está delante debería moverse más rápidamente que la otra. Sin embargo, de acuerdo con las propiedades generales de las ondas de choque, la onda de choque adelantada debe moverse respecto al gas que está detrás de él con una velocidad menor que la velocidad del sonido c en dicho gas, y la siguiente onda de choque debe moverse respecto al mismo gas con una velocidad que supera a c (siendo c una constante en la región entre ondas de choque) es decir, que debería sobrepasar a la otra. Por la misma razón una onda de choque y una onda de rarefacción no pueden moverse en el mismo sentido; para verlo es suficiente observar que las discontinuidades débiles se mueven con la velocidad del sonido respecto al gas en cada lado de la misma. Finalmente, dos ondas de rarefacción formadas al mismo tiempo no pueden separarse, puesto que las velocidades de sus frentes traseros son iguales.

De modo semejante a las ondas de choque y a las ondas de rarefacción, una discontinuidad tangencial debe formarse, en general, a partir de una discontinuidad inicial. Dicha discontinuidad debe producirse si las componentes de velocidad transversal v_y, v_z son discontinuas en la discontinuidad inicial. Puesto que estas componentes de velocidad no varían en una onda de choque o de rarefacción, sus discontinuidades se convierten siempre en una discontinuidad tangencial, que permanece en la posición de la discontinuidad inicial; en cada lado de esta discontinuidad, v_y y v_z son constantes (en realidad, como es natural, la inestabilidad de una discontinuidad de velocidad tangencial produce su suavización gradual dentro de una región turbulenta).

Sin embargo, debe presentarse una discontinuidad tangencial, aunque v_y y v_z sean continuas en la discontinuidad inicial (sin pérdida de generalidad, podemos admitir que son nulas y así lo haremos). Esto se demuestra del modo siguiente. Las discontinuidades formadas a partir de la discontinuidad

inicial deben hacer posible el paso de un estado 1 del gas en una cara de la discontinuidad inicial a un estado dado 2 en la otra cara. El estado del gas está determinado por tres magnitudes independientes, por ejemplo, p, ρ y $v_x = v$. Por tanto, es necesario tener tres parámetros arbitrarios con objeto de pasar del estado 1 a un estado arbitrario 2 mediante cierta selección de las discontinuidades. Sabemos, sin embargo, que una onda de choque perpendicular a la corriente y que se propaga en un gas de un determinado estado termodinámico está definida por un solo parámetro (§ 82). Lo mismo es cierto en el caso de una onda de rarefacción; como vemos a partir de las fórmulas (92.14)-(92.16), cuando el estado del gas que entra en una onda de rarefacción está definido, el estado del gas que sale de ella está también completamente determinado por un solo parámetro. Además, hemos visto que, como máximo, puede moverse en cada sentido una onda (de rarefacción o de choque). Por tanto, tenemos a nuestra disposición sólo dos parámetros que no son suficientes.

La discontinuidad tangencial formada en la posición de la discontinuidad inicial nos proporciona el tercer parámetro necesario. La presión es continua allí, pero no así la densidad (y, por tanto, tampoco la temperatura ni la entropía). La discontinuidad tangencial es estacionaria respecto al gas en ambas caras de la misma y, por tanto, los razonamientos sobre el «traspaso» de las dos ondas que se propagan en el mismo sentido no se aplican a ellas.

Los gases en ambos lados de la discontinuidad tangencial no se mezclan, puesto que no existe ningún movimiento del gas a través de una discontinuidad tangencial; en todos los ejemplos que daremos a continuación estos gases pueden ser sustancias distintas.

La figura 62 muestra esquemáticamente todos los tipos posibles de ruptura o de desintegración de una discontinuidad inicial. Las líneas a trazos lleno muestran la variación de la presión a lo largo del eje x; la variación de la densidad vendría dada por una línea semejante, siendo la única diferencia que existiría un salto adicional en la discontinuidad tangencial. Las líneas verticales muestran las discontinuidades formadas y las flechas muestran su sentido de propagación y el del flujo gaseoso. El sistema coordenado es siempre aquél en el que la discontinuidad tangencial está en reposo, junto con el gas en las regiones 3 y 3′ que le son contiguas. Las presiones, densidades y velocidades de los gases en las regiones extremas de la izquierda (1) y de la derecha (2) son los valores de estas magnitudes en el instante $t = 0$ en cada lado de la discontinuidad inicial.

En el primer caso, que escribiremos $I \rightarrow S_{\leftarrow} TS_{\rightarrow}$ (figura 62a), la discontinuidad inicial I da dos ondas de choque S que se propagan en sentidos opuestos y una discontinuidad tangencial T entre ellas. Este caso se presenta cuando dos masas de gas chocan con una velocidad relativa grande.

En el caso $I \rightarrow S_{\leftarrow} TR_{\rightarrow}$ (figura 62b), se propaga una onda de choque en un

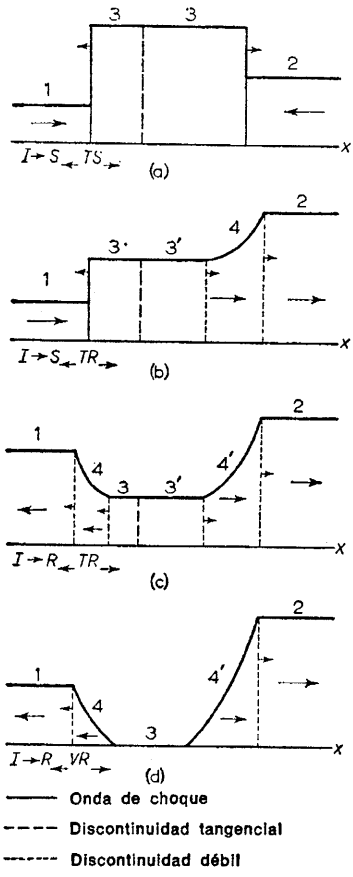

FIG. 62

lado de la discontinuidad tangencial y una onda de rarefacción en el otro lado. Este caso se presenta, por ejemplo, si dos masas de gas en reposo relativo ($v_2 - v_1 = 0$) y con presiones diferentes se ponen en contacto en el instante inicial. De todos los casos indicados en la figura 62, el segundo es el único en el que los gases 1 y 2 se están moviendo en el mismo sentido y, por lo tanto, la ecuación $v_1 = v_2$ es posible en dicho caso.

En el tercer caso ($I \to R_{\leftarrow} TR_{\rightarrow}$, figura 62c) se propaga una onda de rarefacción a cada lado de la discontinuidad tangencial. Si los dos gases 1 y 2 se separan con una velocidad relativa suficientemente grande $v_2 - v_1$, la presión puede disminuir hasta cero en las ondas de rarefacción. Entonces tenemos el esquema indicado en la figura **62d**; se forma un vacío 3 entre las regiones 4 y 4'.

Podemos deducir las condiciones analíticas que determinan el modo en que se rompe la discontinuidad inicial, en función de sus parámetros. Supondremos en cada caso que $p_2 > p_1$ y tomaremos el sentido positivo del eje de las x desde la región 1 a la región 2 (como en la figura 62).

Puesto que los gases en ambos lados de la discontinuidad inicial pueden ser sustancias distintas, los distinguiremos como gases 1 y 2.

(1) $I \rightarrow S_{\leftarrow} TS_{\rightarrow}$. Si $p_3 = p_{3'}$, V_3 y $V_{3'}$ son las presiones y volúmenes específicos en las regiones resultantes 3 y 3', entonces tenemos $p_3 > p_2 > p_1$, y los volúmenes V_3 y $V_{3'}$ son las abscisas de los puntos con ordenada p_3 en las adiabáticas de choque a través de (p_1, V_1) y (p_2, V_2), respectivamente. Puesto que los gases en las regiones 3 y 3' están en reposo en el sistema de coordenadas escogido, podemos utilizar las fórmulas (82.7) para dar las velocidades v_1 y v_2 que tienen los sentidos positivo y negativo de x, respectivamente:

$$v_1 = \sqrt{[(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)]}, \qquad v_2 = -\sqrt{[(p_3 - p_2)(V_2 - V_{3'})]}.$$

El valor más pequeño de p_3, para unos valores dados de p_1 y p_2, que no contradice la hipótesis inicial ($p_3 > p_2 > p_1$) es p_2. Además, como la diferencia $v_1 - v_2$ es una función monótonamente creciente de p_3, se encuentra la desigualdad buscada

$$v_1 - v_2 > \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V')]}, \tag{93.1}$$

en donde V' designa la abscisa del punto con ordenada p_2 sobre la adiabática del choque para el gas 1 que pasa a través de (p_1, V_1). Calculando V' con la fórmula (85.1) (sustituyendo V_2 por V') obtenemos la condición (93.1) para un gas perfecto en la forma

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1)\sqrt{\{2V_1/[(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2]\}}. \tag{93.2}$$

Debe señalarse que los límites colocados por (93.1) y (93.2) sobre los valores posibles de la diferencia de velocidades $v_1 - v_2$ no dependen claramente del sistema de coordenadas escogido.

(2) $I \rightarrow S_{\leftarrow} TR_{\rightarrow}$. Aquí $p_1 < p_3 = p_{3'} < p_2$. Para la velocidad del gas en la región 1 tenemos de nuevo

$$v_1 = \sqrt{[(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)]},$$

y la variación total de velocidad en la onda de rarefacción 4 es, según (92.7),

$$v_2 = \int_{p_3}^{p_2} \sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)}.$$

Para valores dados de p_1 y p_2, p_3 puede caer entre ambos. Sustituyendo p_3 en la diferencia $v_2 - v_1$ por p_1 y luego por p_2, obtenemos la condición

$$-\int_{p_1}^{p} \sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)} < v_1 - v_2 < \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V')]}. \tag{93.3}$$

En esta expresión V' tiene el mismo significado que en el caso anterior; debe calcularse el límite superior de la diferencia $v_1 - v_2$ para el gas 1 y el límite inferior para el gas 2. En el caso de un gas perfecto tenemos

$$-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma_2-1)/2\gamma_2}\right] < v_1-v_2 < (p_2-p_1)\sqrt{\{2V_1/[(\gamma_1-1)p_1+(\gamma_1+1)p_2]\}}, \tag{93.4}$$

en donde $c_2 = \sqrt{(\gamma_2 p_2 V_2)}$ es la velocidad del sonido en el gas 2 en el estado (p_2, V_2).

(3) $I \to R_{\leftarrow} T R_{\rightarrow}$. Aquí $p_2 > p_1 > p_3 = p_{3'} > 0$. Por el mismo método encontramos la siguiente condición para que se presente este caso:

$$-\int_0^{p_1}\sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)}-\int_0^{p_3}\sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)} < v_1-v_2 < -\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{(-\mathrm{d}p\,\mathrm{d}V)}. \tag{93.5}$$

La primera integral del primer miembro se calcula para el gas 1 y las otras para el gas 2. En el caso de un gas perfecto tenemos

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1-1}-\frac{2c_2}{\gamma_2-1} < v_1-v_2 < -\frac{2c_2}{\gamma_2-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma_2-1)/2\gamma_2}\right], \tag{93.6}$$

en donde $c_1 = \sqrt{(\gamma_1 p_1 V_1)}$, $c_2 = \sqrt{(\gamma_2 p_2 V_2)}$. Si

$$v_1-v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1-1}-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}, \tag{93.7}$$

entonces se forma un vacío entre las ondas de rarefacción ($I \to R_{\leftarrow} V R_{\rightarrow}$).

El problema de una discontinuidad en las condiciones iniciales incluye el de las diversas colisiones existentes entre las superficies planas de discontinuidad. En el instante del choque o colisión, coinciden los dos planos y forman una cierta discontinuidad inicial que entonces conduce a uno de los esquemas descritos anteriormente. La colisión de dos ondas de choque, por ejemplo, da como resultado otras dos ondas de choque que se mueven alejándose de la discontinuidad tangencial que permanece entre ellas: $S_{\rightarrow}S_{\leftarrow} \to S_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$. Cuando una onda de choque sobrepasa la otra, existen dos posibilidades: $S_{\rightarrow}S_{\rightarrow} \to S_{\rightarrow}TS_{\rightarrow}$ y $S_{\rightarrow}S_{\rightarrow} \to R_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$. En cualquier caso una onda de choque continúa en el mismo sentido.

El problema de la reflexión y transmisión de ondas de choque por una discontinuidad tangencial (límite de dos medios) también ha de estudiarse bajo este encabezamiento. Existen dos casos posibles: $S_{\rightarrow}T \to S_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$ y $S_{\rightarrow}T \to R_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$. La onda transmitida en el segundo medio es siempre un choque (ver también los problemas siguientes).†

† Para completar el tema debemos mencionar que, al chocar una onda de choque con una discontinuidad débil (problema que no es del tipo de semejanza considerado aquí), la onda de choque continúa propagándose en el mismo sentido; pero detrás de ella persiste una discontinuidad débil de la clase original y una discontinuidad tangencial débil (ver el final del § 89).

PROBLEMAS

Problema 1. Una onda de choque plana se refleja en una superficie plana rígida. Determinar la presión del gas detrás de la onda reflejada (S. V. IZMAILOV, 1935).

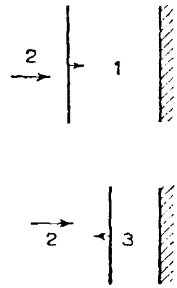

FIG. 63

Solución. Cuando una onda de choque incide sobre una pared rígida, se propaga una onda de choque reflejada alejándose de la pared. Designaremos mediante los sufijos 1, 2 y 3, respectivamente, las magnitudes que pertenecen al gas no perturbado delante de la onda de choque incidente, al gas detrás de este choque (que es también el gas delante del choque reflejado) y al gas detrás del choque reflejado; pueden verse estos números en la figura 63, en donde las flechas indican el sentido del movimiento de las ondas de choque y del propio gas. El gas en las regiones 1 y 3, que está junto a la pared, se encuentra en reposo respecto a la misma. La velocidad relativa de los gases a ambos lados de la discontinuidad es la misma en la onda de choque incidente y en la reflejada, e igual a la velocidad del gas 2. Utilizando la fórmula (82.7) para la velocidad relativa, tenemos, por tanto, $(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3)$. La ecuación de la adiabática del choque (85.1) para cada choque da, entonces,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}, \qquad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma+1)p_2+(\gamma-1)p_3}{(\gamma-1)p_2+(\gamma+1)p_3}.$$

Podemos eliminar los volúmenes específicos de estas tres ecuaciones y el resultado es

$$(p_3-p_2)^2[(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2] = (p_2-p_1)^2[(\gamma+1)p_3+(\gamma-1)p_2].$$

Esta es una ecuación de segundo grado para p_3, que tiene la raíz trivial $p_3 = p_1$; eliminando $p_3 - p_1$, se obtiene

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma-1)p_2-(\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2-(\gamma+1)p_1},$$

que determina p_3 a partir de p_1 y p_2. En el caso límite de una onda de choque incidente muy densa, $p_3 = (3\gamma-1)p_2/(\gamma-1)$, mientras que en el caso de una onda de choque débil $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$, que corresponde a la aproximación de la onda sonora.

Problema 2. Hallar la condición para que una onda de choque sea reflejada en un límite plano entre dos gases.

Solución. Sean $p_1 = p_{2'}$, V_1, $V_{2'}$, las presiones y volúmenes específicos de los dos medios antes de la incidencia de la onda de choque (que se propaga en el gas 2) en su superficie de separación, y p_2, V_2, son los valores de detrás de la onda de choque. La condición para

que la onda reflejada sea una onda de choque viene dada por la desigualdad (93.2), en la que debemos poner ahora

$$v_1 - v_2 = \sqrt{[(p_2 - p_{2'})(V_{2'} - V_2)]}.$$

Expresando todas las magnitudes en función del cociente de presiones p_2/p_1 y de los volúmenes específicos iniciales V_1, $V_{2'}$, obtenemos

$$\frac{V_1}{(\gamma_1+1)p_2/p_1+(\gamma_1-1)} < \frac{V_{2'}}{(\gamma_2+1)p_2/p_1+(\gamma_2-1)}.$$

§ 94. Ondas móviles monodimensionales

Al estudiar las ondas sonoras en § 63, admitíamos que era pequeña la amplitud de las oscilaciones de la onda. El resultado era que la ecuación del movimiento resultaba lineal y se resolvía fácilmente. Una solución particular de estas ecuaciones es una función cualquiera de $x \pm ct$ (onda plana) correspondiente a una *onda móvil* cuyo perfil se mueve con velocidad c, permaneciendo invariable su forma; por *perfil* de una onda entendemos la distribución de densidad, velocidad ,etc., a lo largo de la dirección de propagación. Puesto que la velocidad v, la densidad ρ y la presión p (y las demás magnitudes) de dicha onda son funciones de la misma magnitud $x \pm ct$, pueden expresarse unas en función de otras, de modo que las coordenadas y el tiempo no aparezcan explícitamente [$p = p(\rho)$, $v = v(p)$, y así sucesivamente].

Cuando la amplitud de la onda no es necesariamente pequeña, no son válidas estas sencillas relaciones. Sin embargo, se encuentra que puede obtenerse una solución general de las ecuaciones exactas del movimiento, en forma de una onda plana móvil que es una generalización de la solución $f(x \pm ct)$ de las ecuaciones aproximadas, válidas para amplitudes pequeñas. Para deducir esta solución, empezaremos a partir del requisito de que, en el caso de una onda de cualquier amplitud, puede expresarse la velocidad como una función de la densidad.

En ausencia de ondas de choque, el flujo es adiabático. Si el gas es homogéneo en un instante inicial determinado (de modo que, en particular, s = constante), entonces s = constante en todo instante y lo admitiremos así en lo que sigue.

En una onda sonora plana que se propaga en la dirección x, todas las magnitudes dependen sólo de x y t, y para la velocidad tenemos $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. La ecuación de continuidad es $\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v)/\partial x = 0$, y la ecuación de Euler se escribe

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Utilizando el hecho de que v es función solamente de ρ, podemos escribir estas ecuaciones en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}(\rho v)}{\mathrm{d}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{94.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{94.2}$$

Como

$$\frac{\partial \rho/\partial t}{\partial \rho/\partial x} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\rho},$$

tenemos a partir de (94.1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\rho} = \frac{\mathrm{d}(\rho v)}{\mathrm{d}\rho} = v + \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho},$$

y análogamente a partir de (94.2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{v} = v + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}. \tag{94.3}$$

Como el valor de ρ únicamente determina el de v, las derivadas a ρ y v constantes son iguales, es decir, $(\partial x/\partial t)_{\rho} = (\partial x/\partial t)_{v}$, de modo que $\rho\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}\rho = (1/\rho)\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}v$. Poniendo $\mathrm{d}p/\mathrm{d}v = (\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}v) = c^2\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}v$, obtenemos $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\rho = \pm\, c/\rho$, de aquí que

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho}\mathrm{d}\rho = \pm \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho c}. \tag{94.4}$$

Esto da la relación general existente entre la velocidad y la densidad o la presión en la onda.†

A continuación, podemos combinar (94.3) y (94.4) para dar $(\partial x/\partial t)_{v} = v + (1/\rho)\mathrm{d}p/\mathrm{d}v = v \pm c(v)$, o sea, integrando

$$x = t[v \pm c(v)] + f(v), \tag{94.5}$$

en donde $f(v)$ es una función arbitraria de la velocidad y $c(v)$ viene dada por (94.4).

Las fórmulas (94.4) y (94.5) dan la solución general requerida (B. RIEMANN, 1860). Determinan la velocidad (y, por tanto, todas las demás magnitudes) como una función implícita de x y t, es decir, el perfil de onda en todo instante. Para un valor determinado de v tenemos $x = at + b$, es decir, el punto en donde la velocidad tiene un valor dado se mueve con velocidad constante; en este sentido la solución obtenida es una onda móvil. Los dos

† En una onda de pequeña amplitud tenemos $\rho = \rho_0 + \rho'$, y (94.4) da en primera aproximación $v = c_0\rho'/\rho_0$ [en donde $c_0 = c(\rho_0)$], es decir, la fórmula usual (63.12).

signos de (94.5) corresponden a ondas que se propagan (respecto al gas) en los sentidos positivo y negativo del eje de las x.

El flujo descrito por la solución (94.4) y (94.5) suele denominarse *onda simple* y utilizaremos esta expresión más adelante. Debe señalarse que el flujo de semejanza estudiado en § 92 es un caso particular de una onda simple que corresponde a $f(v) = 0$ en (94.5).

Podemos escribir explícitamente las relaciones para una onda simple en un gas perfecto; para mayor definición admitiremos que existen un punto en la onda para el cual $v = 0$, como suele ocurrir normalmente en la práctica. Puesto que la fórmula (94.4) es la misma que la (92.6), tenemos por analogía con las fórmulas (92.14)-(92.16)

$$c = c_0 \pm \tfrac{1}{2}(\gamma-1)v, \tag{94.6}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 \pm \tfrac{1}{2}(\gamma-1)v/c_0)^{2/(\gamma-1)}, \\ p &= p_0(1 \pm \tfrac{1}{2}(\gamma-1)v/c_0)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned} \tag{94.7}$$

Sustituyendo (94.6) en (94.5), obtenemos

$$x = t(\pm c_0 + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)v) + f(v). \tag{94.8}$$

A veces es conveniente escribir esta solución en la forma

$$v = F[x - (\pm c_0 + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)v)t], \tag{94.9}$$

siendo F otra función arbitraria.

A partir de las fórmulas (94.6) y (94.7) vemos nuevamente (como en § 92) que la velocidad en sentido opuesto al de la propagación de la onda (relativa al propio gas) tiene magnitud limitada; para una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x tenemos

$$-v \leqslant 2c_0/(\gamma-1). \tag{94.10}$$

Una onda móvil descrita por las fórmulas (94.4) y (94.5) es esencialmente distinta de la obtenida en el caso límite de amplitudes pequeñas. La velocidad de un punto del perfil de ondas es

$$u = v \pm c; \tag{94.11}$$

puede considerarse de modo conveniente como una superposición de la propagación de la perturbación relativa al gas con la velocidad del sonido y el movimiento del propio gas con velocidad v. La velocidad u es ahora una función de la densidad y, por tanto, diferente para los distintos puntos del perfil. Así pues, en el caso general de una onda plana de amplitud arbitraria no existe una «velocidad de onda» constante definida. Puesto que las velocidades de los distintos puntos del perfil de onda son diferentes, el perfil modifica su forma en el transcurso del tiempo.

Consideremos una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x, para la cual $u = v + c$. La derivada de $v + c$ respecto a la densidad

ha sido calculada en § 92; ver (92.10). Hemos visto que $du/d\rho > 0$. La velocidad de propagación de un punto determinado en el perfil de onda es, por tanto, tanto mayor cuanto mayor sea la densidad. Si designamos por c_0 la velocidad del sonido en el caso de una densidad igual a la densidad de equilibrio ρ_0, entonces en las compresiones $\rho > \rho_0$ y $c > c_0$, mientras que en las rarefacciones $\rho < \rho_0$ y $c < c_0$.

La desigualdad de la velocidad de los distintos puntos del perfil de onda causa la variación de su forma en el transcurso del tiempo: los puntos de compresión se mueven hacia adelante y los de rarefacción se quedan atrás hacia la izquierda (figura 64b). Finalmente, el perfil puede resultar de tal modo que la función $\rho(x)$ (para un valor dado de t) sea multiforme; a un valor x corresponden tres valores diferentes de ρ (la línea a trazos de la figura 64c). Como es natural, esto es físicamente imposible. En realidad, se forman discontinuidades, en donde ρ es multiforme y en consecuencia ρ es una función uniforme en todas partes, excepto en las propias discontinuidades. El perfil de onda tiene entonces la forma indicada por la línea continua de la figura 64c. Las superficies de discontinuidad se forman en puntos que distan entre sí una longitud de onda.

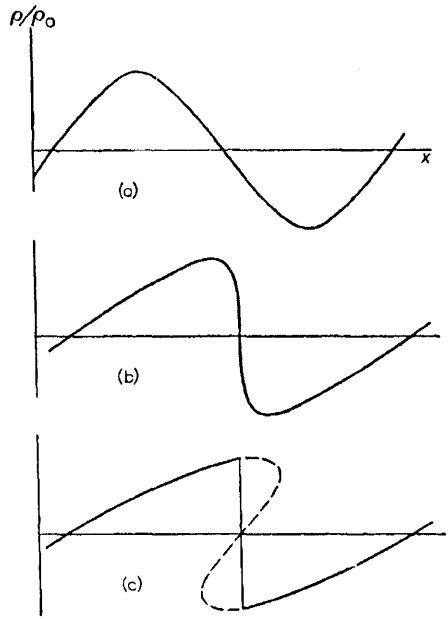

FIG. 64

Cuando se forman las discontinuidades, la onda cesa de ser una onda simple. La causa de ello puede enunciarse brevemente así: cuando están presentes las superficies de discontinuidad, la onda se «refleja» a partir de ella, y, por lo tanto, cesa de ser una onda móvil en un sentido. En consecuencia, la hipótesis sobre la que se basó toda la deducción, a saber, que las diversas magnitudes son entre ellas funciones uniformes, deja de verificarse en general.

La presencia de discontinuidades (ondas de choque) da como resultado la disipación de energía, como se mencionó en § 82. Por tanto, la formación de discontinuidades conduce a un amortiguamiento marcado de la onda. Esto es evidente en la figura 64. Cuando se forma la discontinuidad, se corta la parte más elevada del perfil de onda. En el transcurso del tiempo, cuando el perfil se curva, su altura resulta menor y el perfil se «suaviza» dando otro de amplitud menor, es decir, la onda se amortigua.

Es evidente, a partir de lo anterior, que deben, finalmente, formarse discontinuidades en toda onda simple que contenga regiones en las que la densidad disminuye en el sentido de la propagación. El único caso en el que no se presentan discontinuidades es en una onda en la que la densidad aumenta monótonamente en el sentido de propagación (como, por ejemplo, la onda formada cuando un pistón se mueve saliendo de una tubería infinita llena de gas; ver los problemas al final de esta sección).

Aunque cuando se ha formado una discontinuidad la onda deja de ser sencilla, el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad puede determinarse analíticamente. Hemos visto que la presencia de discontinuidades se debe matemáticamente al hecho de que en una onda simple las magnitudes p, ρ y v resultan funciones multiformes de x (para un valor dado de t) en tiempos mayores que un valor definido t_0, mientras que para $t < t_0$ son funciones uniformes. El tiempo t_0 es el de formación de la discontinuidad. Es evidente, a partir de consideraciones geométricas, que en el instante t_0 la curva que da, por ejemplo, v en función de x resulta vertical en un cierto punto $x = x_0$, que es el punto en el que la función resulta multiforme. Analíticamente esto significa que la derivada $(\partial v/\partial x)_t$ se hace infinita y $(\partial x/\partial v)_t$ se hace cero. Resulta también evidente que en el instante t_0 la curva $v = v(x)$ debe caer a ambos lados de la tangente vertical, puesto que en otro caso $v(x)$ ya sería multiforme. En otras palabras, el punto $x = x_0$ debe ser, no un extremo de la función $x(v)$, sino un punto de inflexión y, por tanto, debe también anularse la segunda derivada $(\partial^2 x/\partial v^2)_t$. Así pues, el lugar y tiempo de formación de la onda de choque están determinados por las ecuaciones simultáneas

$$(\partial x/\partial v) = 0, \qquad (\partial^2 x/\partial v^2)_t = 0. \tag{94.12}$$

En el caso de un gas perfecto estas ecuaciones son

$$t = -2f'(v)/(\gamma+1), \qquad f''(v) = 0, \tag{94.13}$$

en donde $f(v)$ es la función que aparece en la solución general (94.8).

Estas condiciones exigen alguna modificación si la onda simple está junto a un gas en reposo y se forma la onda de choque en la frontera. Aquí también la curva $v = v(x)$ debe hacerse vertical, es decir, debe anularse la derivada $(\partial x/\partial v)_t$ en el instante en que se produce la discontinuidad. Sin embargo, la segunda derivada no necesita anularse; la segunda condición ahora es simplemente que la velocidad es cero en la frontera del gas en reposo, de modo que $(\partial x/\partial v)_t = 0$ para $v = 0$. A partir de esta condición podemos obtener expresiones explícitas para el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad. Derivando (94.5), obtenemos

$$t = -f'(0)/\alpha_0, \qquad x = \pm c_0 t + f(0), \tag{94.14}$$

en donde α_0 es el valor para $v = 0$ de la magnitud α definida por la fórmula (95.2). En el caso de un gas perfecto

$$t = -2f'(0)/(\gamma+1). \tag{94.15}$$

PROBLEMAS

Problema 1. Un gas perfecto está dentro de una tubería cilíndrica semiinfinita ($x > 0$) terminada por un pistón. En el instante $t = 0$ el pistón empieza a moverse con una velocidad uniformemente acelerada $U = \pm at$. Determinar el flujo resultante.

Solución. Si el pistón se mueve saliendo de la tubería ($U = -at$), el resultado es una onda de rarefacción simple, cuyo frente hacia adelante se propaga hacia la derecha a través del gas en reposo, con una velocidad c_0; en la región $x > c_0 t$, el gas está en reposo. En la superficie del pistón, el gas y el pistón deben tener la misma velocidad, es decir, debemos tener $v = -at$ para $x = -at^2/2$ $(t > 0)$. Esta condición da la función $f(v)$ en (94.8)

$$f(-at) = -c_0 t + \tfrac{1}{2}\gamma a t^2.$$

De aquí que tengamos

$$\begin{aligned} x - [c_0 + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)v]t &= f(v) \\ &= c_0 v/a + \tfrac{1}{2}\gamma v^2/a, \end{aligned}$$

y entonces

$$-v = [c_0 + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)at]/\gamma - \sqrt{\{[c_0 + \tfrac{1}{2}(\gamma+1)at]^2 - 2a\gamma(c_0 t - x)\}}/\gamma. \tag{1}$$

Esta fórmula da la variación de la velocidad en la región comprendida entre el pistón y el frente delantero $x = c_0 t$ de la onda (figura 65*a*) durante el intervalo de tiempo desde $t = 0$ a $t = 2c_0/(\gamma - 1)a$. La velocidad del gas es en todo punto hacia la izquierda, como la del pistón, y disminuye monótonamente de valor en el sentido positivo del eje de las x; la densidad y presión aumenta monótonamente en este sentido. Para $t > 2c_0/(\gamma - 1)a$, la desigualdad (94.10) deja de ser válida para la velocidad del pistón y entonces el gas no puede seguir al pistón. Se forma entonces un vacío en una región junto al pistón, más allá de la cual la velocidad disminuye desde $-2c_0/(\gamma - 1)$ hasta cero, de acuerdo con la fórmula (1).

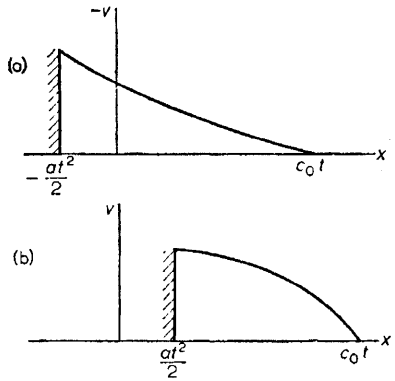

FIG. 65

Si el pistón se mueve introduciéndose en la tubería ($U = at$), se forma una onda de compresión simple; se obtiene la solución correspondiente cambiando simplemente el signo de a en (1) (figura 65*b*). Sin embargo, es válida únicamente hasta que se forma una onda de choque; el término en que esto ocurre está determinado por la fórmula (94.15) y es

$$t = 2c_0/a(\gamma+1).$$

Problema 2. El mismo que el problema 1, pero para el caso en el que el pistón se mueve de cualquier manera.

Solución. Supongamos que el pistón empieza a moverse en el instante $t = 0$ de acuerdo con la ley $x = X(t)$ [con $X(0) = 0$]; su velocidad es $U = X'(t)$. La condición límite en el pistón ($v = U$ para $x = X$) da $v = X'(t)$, $f(v) = X(t) - t[c_0 + (\gamma + 1)X'(t)/2]$. Si ahora consideramos t como un parámetro, estas dos ecuaciones determinan la función $f(v)$ en forma paramétrica. Designando el parámetro por τ, podemos escribir la solución como

$$v = X'(\tau), \quad x = X(\tau)+(t-\tau)[c_0+\tfrac{1}{2}(\gamma+1)X'(\tau)], \tag{1}$$

que determina, en forma paramétrica, la función requerida $v(t, x)$ en la onda simple que está producida por el movimiento del pistón.

Problema 3. Determinar el tiempo y lugar de formación de la onda de choque cuando el pistón (problema 1) se mueve de acuerdo con la ley $U = at^n$ ($n > 0$).

Solución. Si $a < 0$, es decir, si el pistón se mueve alejándose de la tubería, se tiene como resultado una onda de rarefacción simple en la que no se forma ninguna onda de choque. Por tanto, admitimos que $a > 0$, es decir, el pistón se mueve dentro de la tubería, produciendo una onda de compresión simple.

Cuando la función $v(x, t)$ viene dada por las fórmulas paramétricas (1) (problema 2), y $X = a\tau^{n+1}/n + 1$, el tiempo y lugar de formación de la onda de choque vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_t &= -c_0+\tfrac{1}{2}t\tau^{n-1}an(\gamma+1)-\tfrac{1}{2}a\tau^n[\gamma-1+n(\gamma+1)] = 0,\\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}\right)_t &= \tfrac{1}{2}t\tau^{n-2}an(n-1)(\gamma+1)-\tfrac{1}{2}an\tau^{n-1}[\gamma-1+n(\gamma+1)] = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

en donde la segunda ecuación debe sustituirse por $\tau = 0$ si nos ocupa la formación de una onda de choque en el frente delantero de la onda sencilla.

Para $n = 1$ se encuentra $\tau = 0$, $t = 2c_0/a(\gamma + 1)$, es decir, se forma la onda de choque en el frente delantero en un tiempo finito después de que empieza el movimiento, de acuerdo con los resultados del problema 1.

Para $n < 1$, la derivada $\partial x/\partial \tau$ tiene un signo variable [y, por lo tanto, la función $v(x)$ para un t determinado es multiforme] para cualquier $t > 0$. Esto significa que se forma una onda de choque en el pistón tan pronto como empieza a moverse.

Para $n > 1$, se forma la onda de choque, no en el frente delantero de la onda sencilla, sino en un punto intermedio determinado dado por (1). Habiendo determinado τ y t a partir de (1), podemos entonces hallar el lugar de formación de la discontinuidad a partir de (1) del problema 2. El resultado es

$$t = \left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n} \frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{n+1}{n-1}\gamma+1\right]^{(n-1)/n},$$

$$x = 2c_0\left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n}\left[\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{n-1}{n+1}\right]\frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n}[\gamma-1+n(\gamma+1)]^{1/n}}.$$

§ 95. Formación de discontinuidades en una onda sonora

Una onda sonora plana móvil, al ser una solución exacta de la ecuación del movimiento, es también una onda simple. Podemos utilizar los resultados generales obtenidos en § 94 para deducir algunas propiedades de las ondas sonoras de pequeña amplitud en la segunda aproximación (siendo la primera aproximación la que da la ecuación de onda lineal ordinaria).

Debemos observar en primer lugar que, finalmente, debe aparecer una discontinuidad en cada longitud de onda de una onda sonora. Esto conduce a un amortiguamiento muy notable de la onda como se vio en § 94. Sin embargo, debe señalarse que esto ocurre únicamente en el caso de una onda sonora suficientemente intensa; una onda sonora débil se amortigua por los efectos normales de la viscosidad y de la conducción térmica antes de que puedan desarrollarse los efectos de orden superior en la amplitud.

También tiene otro efecto la distorsión del perfil de onda. Si la onda es puramente armónica en un instante dado, cesa de serlo en instantes posteriores, teniendo en cuenta la variación de forma del perfil. Sin embargo, el movimiento permanece periódico con el mismo período que antes. Cuando la onda se desarrolla en una serie de Fourier, aparecen términos con la frecuencia $n\omega$ (siendo n un número entero y ω la frecuencia fundamental), lo mismo que el que tenía frecuencia ω. Así pues, la distorsión del perfil, cuando la onda sonora se propaga, puede considerarse como la aparición en ella de armónicos superiores además de la frecuencia fundamental.

La velocidad u de los puntos del perfil de onda (propagándose la onda en el sentido positivo del eje de las x) se obtiene en primera aproximación,

haciendo $v = 0$ en (94.11), es decir, $u = c_0$, lo que corresponde a la propagación de la onda sin variación de su perfil. En la aproximación siguiente tenemos

$$u = c_0 + \rho' \partial u/\partial \rho_0 = c_0 + (\partial u/\partial \rho_0)\rho_0 v/c_0,$$

o sea, utilizando la expresión (92.10) para la derivada $\partial u/\partial \rho$,

$$u = c_0 + \alpha_0 v, \tag{95.1}$$

en donde hemos puesto para mayor brevedad

$$\alpha = (c^4/2V^3)(\partial^2 V/\partial p^2)_s. \tag{95.2}$$

En el caso de un gas perfecto, $\alpha = (\gamma + 1)/2$, y la fórmula (95.1) concuerda con la fórmula exacta [ver (94.8)] para la velocidad u.

En el caso general de amplitud arbitraria, la onda deja de ser simple después de que hayan aparecido las discontinuidades. Sin embargo, una onda de pequeña amplitud sigue siendo simple en la segunda aproximación, aun cuando estén presentes ciertas discontinuidades. Esto puede verse del modo siguiente. Las variaciones de velocidad, presión y volumen específico en una onda de choque están relacionadas con la expresión

$$v_2 - v_1 = \sqrt{[(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)]}$$

La variación de la velocidad v en un segmento del eje x en una onda simple es

$$v_2 - v_1 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{(-\partial V/\partial p)}\,\mathrm{d}p.$$

Un cálculo simple utilizando un desarrollo en serie muestra que estas dos expresiones difieren únicamente en términos del tercer orden (debe recordarse que la variación de entropía en una discontinuidad es del tercer orden de magnitud, mientras que en una onda simple la entropía es constante). De aquí se deduce que, hasta los términos de segundo orden, una onda sonora en cualquier lado de una discontinuidad permanece simple y la condición límite apropiada se satisface en la propia discontinuidad. En aproximaciones más altas esto deja de ser cierto, teniendo en cuenta la aparición de ondas reflejadas en la superficie de discontinuidad.

Deduzcamos ahora la condición que determina la posición de las discontinuidades en la onda sonora móvil (de nuevo en segunda aproximación). Sea u la velocidad de la discontinuidad respecto a un sistema coordenado fijo, y v_1, v_2 la velocidad de los gases en cada lado de la misma. Entonces, la condición de que el flujo de masa sea continuo es $\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u)$, de aquí que $u = (\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2)/(\rho_1 - \rho_2)$. Hasta los términos de segundo orden, esto es igual a la derivada $\mathrm{d}(\rho v)/\mathrm{d}\rho$ en el punto en que v es igual a $(v_1 + v_2)/2$:

$$u = [\mathrm{d}(\rho v)/\mathrm{d}\rho]_{v=\frac{1}{2}(v_1+v_2)}.$$

Puesto que en una onda simple, $\mathrm{d}(\rho v)/\mathrm{d}\rho = v + c$, tenemos, por (95.1),

$$u = c_0 + \tfrac{1}{2}\alpha(v_1 + v_2). \tag{95.3}$$

A partir de esta expresión puede obtenerse la siguiente condición geométrica simple que determina la posición de la onda de choque. En la figura 66 la curva muestra el perfil de velocidades correspondiente a la onda simple; supongamos que la discontinuidad es *ae*. La diferencia de las áreas sombreadas *abc* y *cde* es la integral

$$\int_{v_1}^{v_2} (x - x_0)\mathrm{d}v$$

tomada a lo largo de la curva *abcde*. En el transcurso del tiempo, el perfil de onda se mueve; calculemos la derivada temporal de la integral anterior.

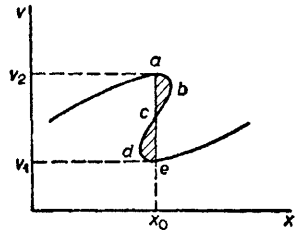

FIG. 66

Puesto que la velocidad $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ de los puntos en el perfil de onda viene dada por la fórmula (95.1) y la velocidad $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}t$ de la discontinuidad viene dada por (95.3), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v_1}^{v_2} (x - x_0)\,\mathrm{d}v = \alpha\{\int_{v_1}^{v_2} v\,\mathrm{d}v - \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}v\} = 0;$$

al derivar la integral, debemos observar que, aunque los límites de integración v_1 y v_2 varían también con el tiempo, $x - x_0$ se anula siempre en los límites, y así únicamente necesitamos derivar el integrando.

Así pues, la integral $\int (x - x_0)\mathrm{d}v$ permanece constante en el tiempo. Puesto que es cero en el instante en que se forma la onda de choque (entonces coinciden los puntos *a* y *e*), se deduce que tenemos siempre

$$\int_{abcde} (x - x_0)\mathrm{d}v = 0. \tag{95.4}$$

Geométricamente esto significa que las áreas *abc* y *cde* son iguales, una condición que determina la posición de la discontinuidad.

Consideremos un pulso de compresión monodimensional simple, en el que se ha formado ya una onda de choque, y analicemos cómo se amortiguará

finalmente esta onda de choque. Para ello, hallaremos también las leyes del amortiguamiento de cualquier onda de choque plana después de que se haya propagado durante un tiempo suficientemente largo.

En las etapas posteriores de su propagación, un pulso sonoro que contenga una onda de choque, tendrá un perfil de velocidades triangular. Supongamos que el perfil viene dado en un cierto instante (que tomaremos como $t = 0$) por el triángulo ABC (figura 67a). Si los puntos de este perfil se mueven con las velocidades (95.1), obtenemos después del tiempo t un perfil $A'B'C'$ (figura 67b). En realidad, la discontinuidad se mueve hasta E, y el perfil real será $A'DE$. Las áreas $DB'F$ y $C'FE$ son iguales por (95.4), y, por tanto, el área $A'DE$ del nuevo perfil es igual al área ABC del perfil original. Sea l la longitud del pulso sonoro en el instante t y Δv la discontinuidad de velocidades de la onda de choque. Durante el tiempo t, el punto B recorre una distancia $\alpha t \Delta v_0$ respecto a C; la tangente del ángulo $B'A'C'$ es, por tanto, $\Delta v_0/(l_0 + \alpha t \Delta v_0)$, y obtenemos la condición de áreas iguales ABC y $A'DE$ en la forma

$$l_0 \Delta v_0 = l^2 \Delta v_0/(l_0 + \alpha t \Delta v_0),$$

y por tanto,

$$l = l_0 \sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t/l_0]},$$

$$\Delta v = \Delta v_0/\sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t/l_0]}. \tag{95.5}$$

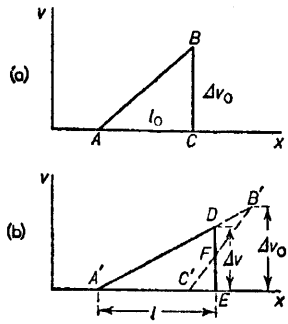

FIG. 67

Para $t \to \infty$ la intensidad de la onda de choque disminuye asintóticamente con el tiempo proporcionalmente a $1/\sqrt{t}$ (o, lo que es equivalente, proporcionalmente a la distancia, como $1/\sqrt{x}$). La energía total de un pulso sonoro móvil (por unidad de área de su frente) es

$$E = \rho_0 \int v^2 \, dx = E_0/\sqrt{[1 + \alpha \Delta v_0 t/l_0]}, \tag{95.6}$$

en donde E_0 es la energía en el instante $t = 0$. Para $t \to \infty$ la energía tiende también a cero proporcionalmente a $1/\sqrt{t}$.

Si tenemos una onda sonora esférica, cualquier sección pequeña de la misma puede considerarse como plana a distancias r suficientemente grandes del origen. La velocidad de cualquier punto del perfil de onda viene entonces dado por la fórmula (95.1). Sin embargo, si deseamos utilizar esta fórmula para seguir el movimiento de un punto cualquiera del perfil de onda a intervalos largos de tiempo, debemos tener en cuenta el hecho de que la amplitud de una onda esférica disminuye de modo inversamente proporcional a la distancia r, incluso en primera aproximación. Esto significa que, en un punto cualquiera dado del perfil, v no es constante como sucedía en el caso de una onda plana, sino que disminuye como $1/r$. Si v_0 es el valor de v (para un punto determinado del perfil) a una distancia r_0 (grande), podemos poner $v = v_0 r_0/r$. Así pues, la velocidad u de los puntos del perfil de onda es $u = c_0 + \alpha v_0 r_0/r$. El primer término es la velocidad ordinaria del sonido y corresponde al movimiento de la onda sin variación en la forma del perfil (aparte de la disminución general de la amplitud proporcionalmente a $1/r$). El segundo término da como resultado una distorsión del perfil. La cantidad δr de este movimiento adicional de los puntos del perfil durante un tiempo $t = (r - r_0)/c$ se obtiene multiplicando por dr/c_0 e integrando desde r_0 hasta r; esto da

$$\delta r = (\alpha v_0 r_0/c_0)\log(r/r_0). \tag{95.7}$$

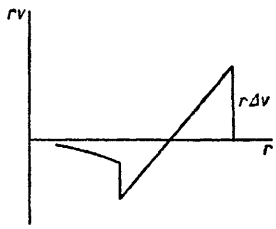

FIG. 68

Así pues, la distorsión del perfil de una onda esférica aumenta proporcionalmente al logaritmo de la distancia, es decir, con mucha mayor lentitud que en el caso de una onda plana, en donde la distorsión δx aumenta con la distancia x recorrida por la onda.

La distorsión del perfil conduce, finalmente, a la formación de discontinuidades. Consideremos ondas de choque formadas en un pulso sonoro esférico simple que ha alcanzado una distancia grande de la fuente o foco (el origen). El caso esférico se distingue del caso plano fundamentalmente por el hecho de que la región de compresión debe estar seguida por una región de rarefacción; el exceso de presión y la velocidad de las partículas

del gas en la onda deben ambas cambiar de signo (ver § 69). La distorsión del perfil da como resultado, finalmente, la formación de dos ondas de choque: una en la región de compresión y la otra en la región de rarefacción (figura 68).† En la onda de choque delantera, la presión aumenta discontinuamente, luego disminuye gradualmente hasta ser una rarefacción, luego aumenta de nuevo discontinuamente en el segundo choque (pero no hasta su valor sin perturbar, que se alcanza únicamente de modo asintótico detrás de este choque).

La obtención del amortiguamiento final de las ondas de choque con el tiempo (o lo que es lo mismo, con la distancia r de la fuente o foco) se encuentra fácilmente de un modo semejante al caso plano estudiado anteriormente. Utilizando el resultado (95.7), se ve que, a distancias suficientemente grandes, el espesor l del pulso sonoro (distancia entre dos discontinuidades) aumenta proporcionalmente a $\log^{1/2}(r/a)$, en lugar de aumentar proporcionalmente a $\sqrt{x}$ como ocurría en el caso plano; a es una longitud constante determinada. La intensidad de la onda de choque delantera está amortiguada de acuerdo con la expresión $r\Delta v \sim \log^{-1/2}(r/a)$, o sea,

$$\Delta v \sim 1/r \log^{\frac{1}{2}}(r/a). \tag{95.8}$$

Finalmente, consideremos el caso cilíndrico. La disminución general de la amplitud de una onda sonora divergente se produce en proporción inversa a $\sqrt{r}$, siendo r la distancia al eje. Repitiendo los razonamientos dados para el caso esférico, encontramos ahora que la velocidad u de los puntos del perfil de ondas es $u = c_0 + \varkappa v_0\sqrt{(r_0/r)}$, y así el desplazamiento δr de los puntos del perfil entre r_0 y r es

$$\delta r = 2\varkappa(v_0/c_0)\sqrt{r_0}(\sqrt{r} - \sqrt{r_0}). \tag{95.9}$$

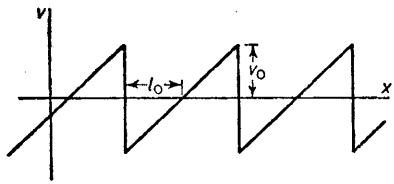

FIG. 69

La propagación cilíndrica de un pulso de compresión debe estar acompañada como en el caso esférico por una rarefacción del gas detrás de la compresión. Por tanto, deben formarse en este caso también dos ondas de

† Debe señalarse que, como siempre existe un amortiguamiento ordinario (debido a la viscosidad y a la conducción térmica) cuando se propaga el sonido en el gas, la lentitud de la distorsión de una onda esférica puede dar como resultado el amortiguamiento antes de que puedan formarse las discontinuidades.

choque. Por el mismo método encontramos la ley final de aumento del espesor del pulso: $l \sim r^{1/4}$, y la ley final de amortiguamiento de la intensidad de la onda de choque: $\sqrt{r}\Delta v \sim r^{-1/4}$, o sea,

$$\Delta v \sim r^{-\frac{3}{4}}. \tag{95.10}$$

La formación de discontinuidades en una onda de choque es un ejemplo de la presencia espontánea de ondas de choque en ausencia de cualquier singularidad en las condiciones externas del flujo. Debe resaltarse que, aunque pueda aparecer espontáneamente en un instante particular, no puede desaparecer del mismo modo. Una vez formada, una onda de choque disminuye sólo asintóticamente cuando el tiempo se hace infinito.

PROBLEMAS

Problema 1. En el instante inicial, el perfil de onda se compone de una serie infinita de «dientes», como se ve en la figura 69. Determinar cómo varían el perfil y la energía de la onda con el transcurso del tiempo.

Solución. Es evidente que en instantes subsiguientes el perfil de onda tendrá la misma forma, permaneciendo invariable l_0, pero siendo la altura v_t menor que v_0. Consideremos un «diente»: en el instante $t = 0$, la ordenada que pasa por el punto en donde $v = v_t$ corta una parte $v_t l_0/v_0$ de la base del triángulo. Durante un tiempo t este punto se mueve hacia delante una distancia $\alpha v_t t$. La condición de que la base del triángulo resulte sin variación en su longitud es $v_t l_0/v_0 + \alpha t v_t = l_0$, de aquí que $v_t = v_0/(1 + \alpha v_0 t/l_0)$. Cuando $t \to \infty$, la amplitud de onda disminuye proporcionalmente a $1/t$. La energía es $E = E_0/(1 + \alpha v_0 t/l_0)^2$, es decir, disminuye proporcionalmente a $1/t^2$ para $t \to \infty$.

Problema 2. Determinar la intensidad del segundo armónico formado por la distorsión del perfil de una onda esférica monocromática.

Solución. Escribiendo la onda en la forma $rv = A\cos(kr - \omega t)$, podemos tener en cuenta la distorsión en primera aproximación sumando δr a r en el segundo miembro de esta ecuación y desarrollando en potencias de δr. Esto da, según (95.7),

$$rv = A\cos(kr - \omega t) - (\alpha k/2c_0)A^2 \log(r/r_0)\operatorname{sen} 2(kr - \omega t);$$

Aquí debe tomarse r_0 como una distancia a la cual la onda pueda considerarse también, con exactitud suficiente, como estrictamente monocromática. El segundo término de esta fórmula es el segundo armónico en el análisis espectral de la onda. Su intensidad total (promedio temporal) I_2, es

$$I_2 = (\alpha^2 k^2/8\pi c_0^3 \rho_0) \log^2(r/r_0) I_1^2,$$

en donde $I_1 = 2\pi c_0 \rho_0 A^2$ es la intensidad del primer armónico.

§ 96. Características

La definición de características dada en § 79, como líneas a lo largo de las cuales se propagan pequeñas perturbaciones (en la aproximación de la

acústica geométrica) es de validez general y no está restringida al flujo supersónico estacionario plano estudiado en § 79.

En el caso de un flujo no estacionario monodimensional podemos introducir las características como líneas en el plano xt, cuya pendiente dx/dt es igual a la velocidad de propagación de perturbaciones pequeñas respecto a un sistema coordenado fijo. Las perturbaciones, propagadas respecto al gas con la velocidad del sonido en el sentido positivo o negativo del eje de las x, se mueven respecto al sistema coordenado fijo con velocidad $v \pm c$. Las ecuaciones diferenciales de las dos familias de características, que denominaremos C_+ y C_-, son de acuerdo con ello

$$(dx/dt)_+ = v+c, \qquad (dx/dt)_- = v-c. \tag{96.1}$$

Las perturbaciones transmitidas con el gas se propagan en el plano xt a lo largo de características que pertenecen a una tercera familia C_0, para la cual

$$(dx/dt)_0 = v. \tag{96.2}$$

Estas son precisamente las «líneas de corriente» del plano xt; ver el final de § 79.† Debe resaltarse que para que existan estas características deja de ser necesario el hecho de que el flujo del gas sea supersónico. La propagación direccional de las perturbaciones, como resulta evidenciado por las características, se debe aquí simplemente a la relación causal entre los movimientos en instantes sucesivos.

Como ejemplo, consideremos las características de una onda simple. Para una onda que se propaga en el sentido positivo del eje de las x tenemos, según (94.5), $x = t(v + c) + f(v)$. Diferenciando esta relación, tenemos

$$dx = (v+c)dt+[t+tc'(v)+f'(v)]dv.$$

A lo largo de una característica C_+, tenemos $dx = (v + c)dt$; comparando ambas ecuaciones vemos que a lo largo de dicha característica $[t + tc'(v) + f'(v)]dv = 0$. La expresión entre corchetes no puede anularse idénticamente y, por tanto, $dv = 0$, es decir, $v =$ constante. Así pues, llegamos a la conclusión de que a lo largo de una característica cualquiera C_+, la velocidad es constante y, por tanto, lo son también todas las demás magnitudes. La misma propiedad es válida para las características C_- en una onda que se propaga hacia la izquierda. Veremos en § 97 que esto no es accidental, sino que es una consecuencia matemática de la naturaleza de las ondas simples.

A partir de esta propiedad de las características C_+ de una onda simple, podemos, a su vez, concluir que constituyen una familia de rectas en el plano xt; la velocidad es constante a lo largo de las líneas $x = t[v + c(v)] +$

† Las mismas ecuaciones (96.1) y (96.2) determinan las características en el caso de un flujo con simetría esférica no estacionario, si se sustituye x por la coordenada radial r (las características serán ahora líneas en el plano rt).

$+ f(v)$ (94.5). En particular, en el caso de una onda de rarefacción de semejanza (una onda simple con $f(v) = 0$), estas líneas forman un pincel a través del origen en el plano xt. Por esta razón, se dice a veces que una onda simple de semejanza está *centrada.*

La figura 70 muestra la familia de características C_+ para la onda simple de rarefacción formada cuando un pistón se mueve saliendo de una tubería con aceleración. Es una familia de líneas rectas divergentes que empiezan en la curva $x = X(t)$ dada por el movimiento del pistón. A la derecha de la característica $x = c_0 t$ existe una región de gas en reposo en donde las características se hacen paralelas.

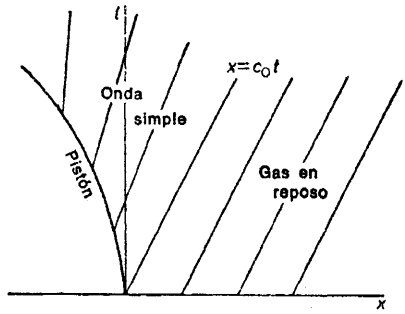

FIG. 70

La figura 71 es un diagrama análogo para el caso de una onda de compresión simple formada cuando se mueve un pistón hacia el interior de una tubería con aceleración. En este caso las características son líneas rectas convergentes que finalmente se cortan. Puesto que cada característica tiene un valor constante de v, su intersección muestra que la función $v(x, t)$ es multiforme, lo que carece de significado físico. Esta es la interpretación geométrica del resultado obtenido en § 94: una onda de compresión simple no puede existir indefinidamente y debe formarse una onda de choque. La interpretación geométrica de la condición (94.12), que determina el tiempo y lugar de formación de la onda de choque es la siguiente. La familia de características rectilíneas que se cortan tiene una envolvente que, en el caso de un valor mínimo de t determinado, tiene un punto anguloso; éste da el instante en el que aparece la multiformidad. Cada punto de la región comprendida entre las dos ramas de la envolvente está sobre tres características C_+. Si las ecuaciones de las características vienen dadas en forma paramétricas $x = x(v)$, $t = t(v)$, la posición del punto anguloso viene dada por las ecuaciones (94.12).†

† El caso particular en que la onda de choque se produce en la frontera del gas en reposo corresponde a aquél en el que una rama de la envolvente es parte de la característica $x = c_0 t$.

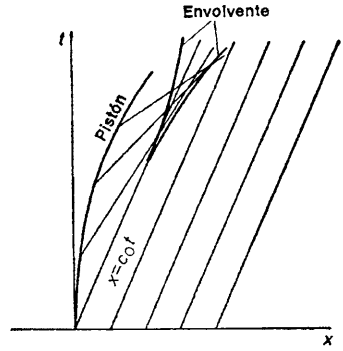

FIG. 71

A continuación indicaremos brevemente cómo la definición física dada anteriormente de las características como líneas a lo largo de las cuales se propagan las perturbaciones, se corresponde con el sentido matemático de la palabra en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Consideremos una ecuación en derivadas parciales de la forma

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + D = 0, \tag{96.3}$$

que es lineal en las derivadas segundas; los coeficientes A, B, C, D pueden ser funciones cualesquiera, tanto de las variables independientes x, t, como de las funciones incógnitas ϕ y de sus primeras derivadas.† La ecuación (96.3) es del tipo elíptico si $B^2 - AC < 0$ en todos los puntos, y del tipo hiperbólico si $B^2 - AC > 0$. En este último caso, la ecuación

$$A\,dt^2 - 2B\,dx\,dt + C\,dx^2 = 0, \tag{96.4}$$

o sea,

$$dx/dt = [B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}]/C, \tag{96.5}$$

determina dos familias de curvas en el plano xt, las *características* [para una solución determinada $\phi(x, t)$ de la ecuación (96.3)]. Si los coeficientes A, B, C son funciones únicamente de x y t, podemos señalar que entonces las características son independientes de la solución particular ϕ.

Supongamos que un flujo determinado corresponde a cierta solución $\phi = \phi_0(x, t)$ de la ecuación (96.3) y supongamos que se aplica a la misma una pequeña perturbación ϕ_1. Admitamos que esta perturbación satisface las condiciones necesarias para que sea válida la acústica geométrica: esto no influye grandemente al flujo (ϕ_1 y sus primeras derivadas son pequeñas), pero varía considerablemente en distancias pequeñas (las segundas deriva-

† El potencial de la velocidad satisface una ecuación de esta forma en el flujo no estacionario monodimensional.

das de ϕ_1 son relativamente grandes). Poniendo en la ecuación (96.3) $\phi = \phi_0 + \phi_1$, obtenemos entonces para ϕ_1 la ecuación

$$A\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} = 0,$$

con $\phi = \phi_0$ en los coeficientes A, B, C. Siguiendo el método utilizado al pasar de la óptica ondulatoria a la óptica geométrica, escribamos $\phi_1 = ae^{i\psi}$, en donde la función ψ (*eikonal*) es grande, y se obtiene así

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t} + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \qquad (96.6)$$

La ecuación de propagación de rayos en la acústica geométrica se obtiene igualando dx/dt a la velocidad de grupo: $dx/dt = d\omega/dk$, en donde $k = \partial\psi/\partial x$, $\omega = -\partial\psi/\partial t$. Derivando la relación $Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0$, obtenemos $dx/dt = (B\omega - Ak)/(C\omega - Bk)$, y eliminando k/ω por la misma relación, llegamos de nuevo a la ecuación (96.5).

PROBLEMA

Hallar la ecuación de la segunda familia de características en una onda simple centrada.

Solución. En una onda simple centrada que se propaga en un gas en reposo hacia la derecha del mismo, tenemos $x/t = v + c = c_0 + (\gamma + 1)v/2$. Las características C_+ forman el pincel $x =$ constante $\times\, t$. Por otra parte, las características C_- están determinadas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma+1}c_0.$$

Integrando, se obtiene

$$x = -\frac{2}{\gamma-1}c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{(3-\gamma)/(\gamma+1)},$$

en donde la constante de integración se ha escogido de modo que la característica C_- pasa a través del punto $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ sobre la característica C_+ ($x = c_0 t$) que es el límite entre la onda simple y la región en reposo.

Las «líneas de corriente» en el plano xt vienen dadas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right),$$

de aquí que

$$x = -\frac{2}{\gamma-1}c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(\gamma+1)}.$$

§ 97. Invariantes de Riemann

Una perturbación pequeña arbitraria se propaga, en general, a lo largo de tres características (C_+, C_-, C_0) saliendo de un punto determinado en el plano xt. Sin embargo, una perturbación arbitraria puede separarse en partes, cada una de las cuales se propaga a lo largo de sólo una característica.

Supongamos, en primer lugar, un flujo de gas isoentrópico. Escribamos la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

en la ecuación de continuidad hemos sustituido las derivadas de la densidad por las de la presión, utilizando las fórmulas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Dividiendo la primera ecuación por $\pm \rho c$ y sumándola a la segunda, obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right)(v \pm c) = 0. \tag{97.1}$$

Introduzcamos ahora dos nuevas funciones incógnitas

$$J_+ = v + \int \mathrm{d}p/\rho c, \qquad J_- = v - \int \mathrm{d}p/\rho c, \tag{97.2}$$

que se denominan *invariantes de Riemann*. Debe recordarse que, en el flujo isoentrópico, ρ y c son funciones definidas de p y las integrales de los segundos miembros son, por tanto, funciones definidas. En el caso de un gas perfecto

$$J_+ = v + 2c/(\gamma - 1), \qquad J_- = v - 2c/(\gamma - 1). \tag{97.3}$$

En función de estas magnitudes, las ecuaciones de movimiento toman la forma simple

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v+c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_+ = 0, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v-c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_- = 0. \tag{97.4}$$

Los operadores diferenciales que actúan sobre J_+ y J_- son precisamente los operadores de derivación a lo largo de las características C_+ y C_- en el plano xt. Así pues, vemos que J_+ y J_- permanecen constantes a lo largo de cada característica C_+ o C_-, respectivamente. Podemos decir también que se propagan pequeñas perturbaciones de J_+ únicamente a lo largo de las características C_+, y las de J_- sólo a lo largo de C_-.

En el caso general de flujo anisoentrópico, no pueden escribirse las ecuaciones (97.1) en la forma (97.4), puesto que $dp/\rho c$ no es una diferencial perfecta. Sin embargo, estas ecuaciones permiten todavía la separación de las perturbaciones que se propagan a lo largo de las características de sólo una familia. Puesto que estas perturbaciones son aquéllas que tienen la forma $\delta v \pm \delta p/\rho c$, en donde δv y δp son perturbaciones arbitrariamente pequeñas de la velocidad y de la presión. Con objeto de obtener un sistema completo de ecuaciones del movimiento, deben suplementarse las ecuaciones (97.1) por la ecuación adiabática

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right]s = 0, \tag{97.5}$$

que muestra que las perturbaciones δs se propagan a lo largo de las características C_0. Una perturbación arbitrariamente pequeña puede separarse siempre en partes independientes de los tres tipos mencionados.

Una comparación con la fórmula (94.4) muestra que los invariantes de Riemann (97.2) son las magnitudes que, en ondas simples, son constantes a través de la región del flujo en todos los instantes: J_- es constante en una onda simple que se propaga hacia la derecha, y J_+ en otra que se mueve hacia la izquierda. Matemáticamente, ésta es la propiedad fundamental de las ondas simples a partir de la cual se deduce en particular la propiedad mencionada en § 96: una familia de características se compone de líneas rectas. Por ejemplo, supongamos que la onda se propaga hacia la derecha. Cada característica C_+ tiene un valor constante de J_+ y, además, un valor constante de J_-, el cual es el mismo en todos los puntos. Puesto que tanto J_+ como J_- son constantes, se deduce que v y p también lo son (y, por lo tanto, lo son todas las demás magnitudes), y obtenemos la propiedad de las características C_+ deducidas en § 96, que, a su vez, muestran que son líneas rectas.

Si el flujo en dos regiones adyacentes del plano xt se describe por dos soluciones analíticamente diferentes de las ecuaciones del movimiento, entonces el límite entre las regiones es una característica. En efecto, este límite es una discontinuidad en las derivadas de cierta magnitud, es decir, es una discontinuidad débil y, por lo tanto, debe coincidir necesariamente con una cierta característica.

La propiedad siguiente de las ondas simples es de gran importancia en la teoría del flujo isoentrópico monodimensional. El flujo en una región adyacente a una región de flujo constante (en la que v = constante, p = constante) debe ser una onda simple.

Es muy fácil de probar esta afirmación. Supongamos que la región 1 en el plano xt está limitada por la derecha por una región (2) de flujo constante (figura 72). Ambos invariantes J_+ y J_- son evidentemente constantes en esta última región y ambas familias de características son líneas rectas.

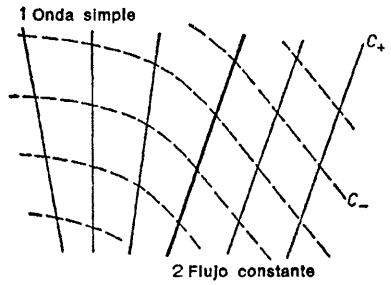

FIG. 72

El límite entre las dos regiones es una característica C_+ y las líneas C_+ en una región no entran en la otra. Las características C_- pasan continuamente de una región a la otra y transportan el valor constante de J_- de la región 1 a la región 2. Así pues, J_- es una constante a través de la región 1 también, de modo que el flujo en esta última es una onda simple.

La capacidad de las características para «transmitir» valores constantes de ciertas magnitudes, arroja cierta luz sobre el problema general de las condiciones iniciales y límites de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. En los casos particulares de interés físico, no existe normalmente ninguna duda acerca de la selección de estas condiciones que vienen dictadas por las consideraciones físicas. Sin embargo, en casos más complejos, pueden ser útiles ciertas consideraciones matemáticas basadas en las propiedades generales de las características.

Para mayor claridad estudiaremos un flujo de gas isoentrópico monodimensional. Matemáticamente un problema de dinámica de gases normalmente necesitará la determinación de dos funciones incógnitas (por ejemplo, v y p) en una región del plano xt comprendida entre dos curvas dadas (OA y OB en la figura 73a), en las que se conocen las condiciones límites. El problema consiste en hallar cuántas magnitudes pueden tomar valores dados sobre estas curvas. En este aspecto es muy importante saber cómo se sitúa cada curva respecto a las direcciones o sentidos (indicados por flechas en la figura 73) de las características C_+ y C_-† que salen de cada punto de la misma. Dos casos pueden presentarse: o bien ambas características están en el mismo lado de la curva o no lo están. En la figura 73a, la curva OA pertenece al primer caso y la curva OB al segundo. Es claro que, en el caso de una determinación completa de las funciones incógnitas en la región AOB, los valores de las dos magnitudes deben estar dados sobre la curva OA (por ejemplo, los dos invariantes J_+ y J_-), y solamente los de una magnitud

† En el plano xt, las características que salen de un punto dado son aquéllas que van en el sentido de t creciente.

sobre OB. En efecto, los valores de la segunda magnitud se «transmiten» a la curva OB a partir de la curva OA mediante las características de la familia correspondiente y, por lo tanto, no pueden venir dados arbitrariamente.† Análogamente, la figura 73b y c muestran casos en los que vienen dadas una o dos magnitudes, respectivamente, sobre cada curva límite.

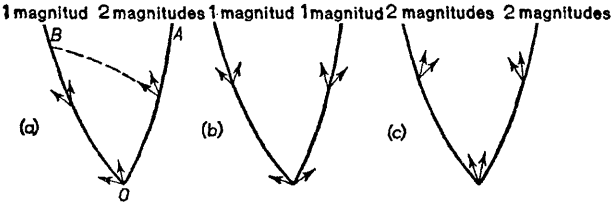

FIG. 73

Debe mencionarse también que, si la curva límite coincide con una característica, no pueden especificarse sobre ella dos magnitudes independientes, puesto que sus valores están relacionados por la condición de que sea constante el invariante de Riemann correspondiente.

El problema de condiciones límites especificadas para el caso general del flujo anisoentrópico puede estudiarse de un modo totalmente semejante.

Finalmente, podemos hacer la siguiente aclaración. Anteriormente, hemos hablado siempre de las características de un flujo monodimensional como líneas contenidas en el plano xt. Sin embargo, pueden definirse también las características en el plano de dos variables cualesquiera que describan el flujo. Por ejemplo, podemos considerar las características en el plano vc. En el caso del flujo isoentrópico, las ecuaciones de estas características vienen dadas simplemente por $J_+ = \text{constante}$, $J_- = \text{constante}$, con diversas constantes en el segundo miembro; denominaremos a estas características Γ_+ y Γ_-. En el caso de un gas perfecto estas son, según (97.3), dos familias de líneas paralelas (figura 74).

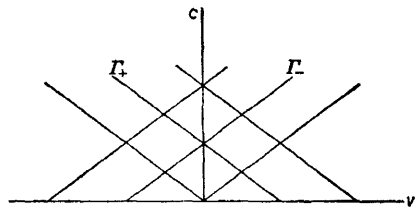

FIG. 74

‡ Como ilustración puede darse un ejemplo de este caso: el flujo gaseoso que se produce cuando un pistón entra o sale de una tubería infinita. Aquí nos interesa hallar una solución de las ecuaciones de la dinámica de gases en la región del plano xt comprendida entre dos líneas, el eje x positivo y la línea $x = X(t)$ que da el movimiento del pistón (figuras 70, 71). En la primera línea están dados los valores de dos magnitudes (la condición inicial $v = 0$, $p = p_0$ para $t = 0$), y en la segunda línea los de una magnitud [$v = u$, siendo $u(t)$ la velocidad del pistón].

Debe señalarse que estas características están determinadas totalmente por las propiedades del gas y que no dependen de ninguna solución particular de las ecuaciones del movimiento. Esto se debe a que la ecuación del flujo isoentrópico descrito con las variables v, c es (como veremos en § 98) una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, con coeficientes que dependen únicamente de las variables independientes.

Las características en los planos xt y vc son transformaciones mutuas que intervienen en la solución particular de las actuaciones del movimiento. Sin embargo, la transformación no necesita ser biunívoca. En particular, solamente una característica del plano vc corresponde a una onda simple dada y todas las demás características del plano xt se transforman en ella. Así, en el caso de una onda moviéndose hacia la derecha (por ejemplo), existe una de las características Γ_-; las características C_- se transforman en la línea Γ_-, y las características C_+ en sus diversos puntos.

PROBLEMA

Hallar la solución general de la ecuación del flujo isoentrópico monodimensional de un gas perfecto con $\gamma = 3$.

Solución. Para $\gamma = 3$ tenemos $J_\pm = v \pm c$, y las ecuaciones (97.4) tienen la integral general

$$x = (v+c)t + f_1(v+c),$$
$$x = (v-c)t + f_2(v-c),$$

siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. Estas dos ecuaciones determinan implícitamente las funciones requeridas $v(x, t)$ y $c(x, t)$, y, por tanto, todas las demás magnitudes. Podemos decir que en este caso las dos magnitudes $v \pm c$ se propagan independientemente como dos ondas simples que no interaccionan.

§ 98. Flujo gaseoso monodimensional arbitrario

Consideremos ahora el problema general de un flujo gaseoso isoentrópico monodimensional arbitrario (sin ondas de choque). Primero demostraremos que este problema puede reducirse a la resolución de una ecuación diferencial lineal.

Un flujo monodimensional cualquiera (es decir, un flujo que depende únicamente de las coordenadas espaciales) debe ser un flujo potencial, puesto que cualquier función $v(x, t)$ puede escribirse como una derivada: $v(x, t) = \partial\phi(x, t)/\partial x$. Por tanto, podemos utilizar como primera integral de la ecua-

ción de Euler, la ecuación de Bernoulli (9.3): $\partial\phi/\partial t + v^2/2 + w = 0$. A partir de ella se encuentra la diferencial

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= v\,\mathrm{d}x - (\tfrac{1}{2}v^2 + w)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En este caso las variables independientes son x y t; haremos ahora la transformación a las variables independientes v y w. Para ello, utilizaremos la transformación de Legendre; poniendo

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}(xv) - x\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}[t(w + \tfrac{1}{2}v^2)] + t\mathrm{d}(w + \tfrac{1}{2}v^2)$$

y sustituyendo ϕ por una nueva función auxiliar

$$\chi = \phi - xv + t(w + \tfrac{1}{2}v^2),$$

obtenemos

$$\mathrm{d}\chi = -x\,\mathrm{d}v + t\mathrm{d}(w + \tfrac{1}{2}v^2) = t\,\mathrm{d}w + (vt - x)\mathrm{d}v,$$

en donde χ se considera como una función de v y w. Comparando esta relación con la ecuación $\mathrm{d}\chi = (\partial\chi/\partial w)\mathrm{d}w + (\partial\chi/\partial v)\mathrm{d}v$, tenemos $t = \partial\chi/\partial w$, $vt - x = \partial\chi/\partial v$, o sea,

$$t = \partial\chi/\partial w, \qquad x = v\,\partial\chi/\partial w - \partial\chi/\partial v. \tag{98.1}$$

Si se conoce la función $\chi(v, w)$, estas fórmulas determinan v y w en función de la coordenada x y del tiempo t.

Deduzcamos ahora una ecuación para χ. Para ello partamos de la ecuación de continuidad que todavía no hemos utilizado:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Transformemos esta ecuación en otra que sea función de las variables v, w. Escribiendo las derivadas parciales como jacobianos, tenemos

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(t, x)} + v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(t, x)} + \rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(t, x)} = 0,$$

o sea, multiplicando por $\partial(t, x)/\partial(w, v)$,

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(w, v)} + v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(w, v)} + \rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(w, v)} = 0.$$

Para desarrollar estos jacobianos debemos utilizar el resultado siguiente. De acuerdo con la ecuación de estado del gas, ρ es una función de otras dos cualesquiera magnitudes termodinámicas independientes; por ejemplo, podemos considerar ρ como función de w y s. Si s = constante, tenemos simple-

mente $\rho = \rho(w)$, y la densidad es independiente de v. Desarrollando los jacobianos tenemos, por tanto,

$$\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial x}{\partial v} - v\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial t}{\partial v} + \rho\frac{\partial t}{\partial w} = 0.$$

Sustituyendo aquí las expresiones (98.1) para t y x, obtenemos

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dw}\left(\frac{\partial \chi}{\partial w} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} = 0.$$

Si $s =$ constante, tenemos $dw = dp/\rho$, y por tanto, $dw/dp = 1/\rho$. Es decir, podemos escribir $d\rho/dw = (d\rho/dp)(dp/dw) = \rho/c^2$. Finalmente, tenemos para χ la ecuación

$$c^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0; \tag{98.2}$$

en este caso la velocidad del sonido c ha de considerarse como una función de w. El problema de integrar las ecuaciones no lineales del movimiento se ha reducido así al de resolver una ecuación lineal.

Apliquemos este resultado al caso de un gas perfecto. Tenemos $c^2 = (\gamma - 1)w$, y la ecuación fundamental (98.2) se transforma

$$(\gamma - 1)w\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \tag{98.3}$$

Esta ecuación tiene una integral general elemental si $(3-\gamma)/(\gamma-1)$ es un número entero par:

$$(3-\gamma)/(\gamma-1) = 2n, \text{ o sea } \gamma = (3+2n)/(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{98.4}$$

Esta condición se satisface por los gases monoatómicos ($\gamma = 5/3$, $n = 1$) y diatómicos ($\gamma = 7/5$, $n = 2$). Expresando γ en función de n, podemos volver a escribir (98.3) como

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \tag{98.5}$$

Designaremos por χ_n una función que satisfaga esta ecuación para un valor dado de n. Para la función χ_0 tenemos

$$2w\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi_0}{\partial w} = 0.$$

Introduciendo en lugar de w la variable $u = \sqrt{(2w)}$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial v^2} = 0.$$

Esta es precisamente la ecuación de ondas ordinaria, cuya solución general es

$$\chi_0 = f_1(u+v) + f_2(u-v),$$

siendo f_1 y f_2 funciones arbitrarias. Así pues,

$$\chi_0 = f_1[\sqrt{(2w)}+v]+f_2[\sqrt{(2w)}-v]. \tag{98.6}$$

Mostraremos ahora que, si se conoce la función χ_n, puede obtenerse la función χ_{n+1} por derivación. Efectivamente, derivando la ecuación (98.5) respecto a w, se encuentra fácilmente

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{2n+3}{2n+1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0.$$

Haciendo $v = v'\sqrt{[(2n+1)/(2n+3)]}$, tenemos para $\partial\chi_n/\partial w$ la ecuación

$$\frac{2}{2n+3}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0,$$

que es la ecuación (98.5) para la función $\chi_{n+1}(w, v')$. Así pues, se obtiene la conclusión de que

$$\chi_{n+1}(w,v')=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n(w,v)=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n\left(w, v'\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\right). \tag{98.7}$$

Utilizando esta fórmula n veces y tomando χ_0 a partir de (98.6), encontramos que la solución general de la ecuación (98.5) es

$$\chi=\frac{\partial^n}{\partial w^n}\{f_1[\sqrt{[2(2n+1)w]}+v]+f_2[\sqrt{[2(2n+1)w]}-v]\},$$

o sea,

$$\chi=\frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\left\{\frac{F_1[\sqrt{[2(2n+1)w]}+v]+F_2[\sqrt{[2(2n+1)w]}-v]}{\sqrt{w}}\right\}, \tag{98.8}$$

en donde F_1 y F_2 son de nuevo dos funciones arbitrarias.

Si expresamos w en función de la velocidad del sonido por la ecuación $w = c^2/(\gamma-1) = (2n+1)c^2/2$, la solución (98.8) se transforma en

$$\chi=\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F_1\left(c+\frac{v}{2n+1}\right)+\frac{1}{c}F_2\left(c-\frac{v}{2n+1}\right)\right\}. \tag{98.9}$$

Las expresiones $c \pm v/(2n+1) = c \pm (\gamma-1)v/2$, que son los argumentos de las funciones arbitrarias, son precisamente los invariantes de Riemann (97.3), que son constantes a lo largo de las características.

En las aplicaciones suele ser necesario calcular los valores de la función $\chi(v, c)$ sobre una característica. Para este objetivo es útil la siguiente fórmula:†

$$\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F\left(c\pm\frac{v}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(2c+a)}{c^n}, \tag{98.10}$$

† Se deduce de modo más simple utilizando el teorema de Cauchy de las funciones de variable com-

con $\pm v/(2n+1) = c + a$ (siendo a una constante arbitraria).

Busquemos ahora la relación entre la solución general que acabamos de hallar y la solución de las ecuaciones de la dinámica de los gases que describe una onda simple. La última se distingue por la propiedad de que en ella v es una función definida de w: $v = v(w)$ y, por tanto, el jacobiano $\Delta = \partial(v, w)/\partial(x, t)$ se anula idénticamente. Sin embargo, al transformar las variables v y w dividimos la ecuación del movimiento por este jacobiano y, por tanto, se «pierde» la solución para la cual $\Delta \equiv 0$. Así pues, una onda simple no puede obtenerse directamente a partir de la integral general de la ecuación del movimiento, sino que es una integral especial de estas ecuaciones.

Para comprender la naturaleza de esta integral especial debemos observar que puede obtenerse a partir de la integral general mediante un cierto paso a un límite que está estrechamente relacionado al significado físico de las características, como trayectos de propagación de pequeñas perturbaciones. Supongamos que la región del plano vw, en el que la función $\chi(v, w)$ no es cero, se convierte en una zona muy estrecha a lo largo de una característica. Las derivadas de χ en la dirección transversal a la característica toman entonces un margen muy amplio de valores, puesto que χ disminuye muy rápidamente en esa dirección. Estas soluciones $\chi(v, w)$ de las ecuaciones del movimiento deben existir, puesto que, al considerarlas como una perturbación en el plano vw, satisfacen las condiciones de la acústica geométrica y, por tanto, son no nulas a lo largo de las características, como deben ser dichas perturbaciones.

Es evidente, a partir de lo anterior, que, en el caso de una función determinada χ de este tipo, el tiempo $t = \partial\chi/\partial w$ tomará un margen arbitrariamente grande de valores. La derivada de χ a lo largo de las características

pleja. En el caso de una función arbitraria $F(c + u)$ tenemos

$$\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c} = 2^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial c^2}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c}$$

$$= 2^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(\sqrt{z}+u)}{\sqrt{z}(z-c^2)^n}dz,$$

en donde la integral se toma a lo largo de un contorno en el plano complejo que encierra el punto $z = c^2$. Haciendo ahora $u = c + a$ y sustituyendo en la integral $\sqrt{z} = 2\zeta - c$, obtenemos

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^n(\zeta-c)^n}d\zeta,$$

en donde el contorno de integración encierra al punto $\zeta = c$; de nuevo aplicando el teorema de Cauchy se tiene el resultado (98.10).

es, sin embargo, finita. A lo largo de una característica (por ejemplo, la característica Γ_-) tenemos

$$\frac{dJ_-}{dv} = 1 - \frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dw}{dv} = 0.$$

La derivada de χ a lo largo de una característica, que designaremos por $-f(v)$, es, por tanto,

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + c\frac{\partial\chi}{\partial w} = -f(v).$$

Expresando las derivadas parciales de χ en función de x y t por (98.1), obtenemos la relación $x = (v + c)t + f(v)$, es decir, la ecuación (94.5) para una onda simple. La expresión (94.4), que da la relación entre v y c en una onda simple, se satisface necesariamente, puesto que J_- es constante a lo largo de una característica Γ_-.

Hemos visto en § 97 que, si la solución de las ecuaciones del movimiento se reduce a un flujo constante en una cierta parte del plano xt, entonces debe existir una onda simple en las regiones adyacentes. El movimiento descrito por la solución general (98.8) debe, por tanto, separarse de una región de flujo constante (en particular, una región de gas en reposo) mediante una onda simple. El límite o la frontera entre la onda simple y la solución general, como cualquier límite entre dos soluciones analíticamente diferentes, es una característica. Al resolver los problemas particulares puede determinarse el valor de la función $\chi(w, v)$ sobre esta característica límite.

La condición de unión en el límite entre la onda simple y la solución general se obtiene sustituyendo las expresiones (98.1) para x y t en la ecuación de la onda simple $x = (v \pm c)t + f(v)$; esto da

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} \pm c\frac{\partial\chi}{\partial w} + f(v) = 0.$$

Además, en una onda simple (y, por lo tanto, sobre la característica límite), tenemos $dv = \pm\, dp/\rho c = \pm\, dw/c$, o sea, $\pm\, c = dw/dv$. Sustituyendo esta expresión en la condición anterior, tenemos

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{dw}{dv} + f(v) = \frac{d\chi}{dv} + f(v) = 0,$$

o sea, finalmente,

$$\chi = -\int f(v)\,dv, \tag{98.11}$$

que determina el valor límite requerido de χ. En particular, si la onda simple tiene un centro en el origen, es decir, si $f(v) \equiv 0$, entonces $\chi =$ constante; puesto que la función χ está definida únicamente hasta una constante aditi-

va, podemos, sin pérdida de generalidad, tomar $\chi = 0$ en la característica límite.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo resultante cuando una onda de rarefacción centrada se refleja en una pared sólida.

Solución. Supongamos que la onda de rarefacción se forma en el punto $x = 0$ en el instante $t = 0$, y se propaga en el sentido positivo del eje de las x; alcanza la pared después de un tiempo $t = l/c_0$, en donde l es la distancia de la pared. La figura 75 muestra las características para la reflexión de la onda. En las regiones 1 y 1′ el gas está en reposo; en la región 3 se mueve con una velocidad constante $v = -U$.† La región 2 es la onda de rarefacción incidente (con características rectilíneas C_+), y la región 5 es la onda reflejada (con características rectilíneas C_-). La región 4 es la «región de interacción» en la que se busca la solución; las características lineales se hacen curvas al entrar en esta región. La solución está totalmente determinada por las condiciones límites en los segmentos ab y ac. Sobre ab (es decir, sobre la pared) debemos tener $v = 0$ para $x = l$; por (98.1) se tiene, a partir de aquí, la condición $\partial\chi/\partial v = -l$ para $v = 0$. El límite ac con la onda de rarefacción es parte de una característica C_-, y, por tanto, tenemos $c - (\gamma - 1)v/2 = c - v/(2n + 1) =$ constante; puesto que en el punto a, $v = 0$ y $c = c_0$, la constante es c_0. En este límite, χ debe ser nulo, de modo que tenemos la condición $\chi = 0$ para $c - v/(2n + 1) = c_0$. Se ve fácilmente que una función de la forma (98.9) que satisface estas condiciones es

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}\left[\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)^2 - c_0^2\right]^n\right\}, \qquad (1)$$

y esta expresión da la solución buscada.

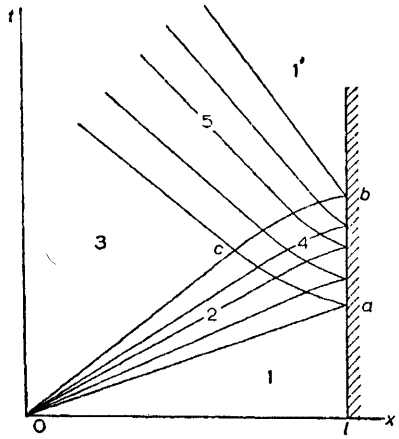

FIG. 75

† Si la onda de rarefacción se debe a un pistón que se mueve empezando a salir de una tubería con velocidad constante, entonces U es la velocidad del pistón.

La ecuación de la característica *ac* es (ver § 96, problema)

$$x = -(2n+1)c_0t + 2(n+1)l(tc_0/l)^{(2n+1)/2(n+1)}.$$

Su intersección con la característica *Oc*

$$x/t = c_0 - \tfrac{1}{2}(\gamma+1)U = c_0 - 2(n+1)U/(2n+1)$$

determina el tiempo en el que desaparece la onda incidente:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1}c_0^{\,n}}{[(2n+1)c_0 - U]^{n+1}}.$$

En la figura 75 se supone que $U < 2c_0/(\gamma+1)$; en el caso opuesto, la característica *Oc* está en el sentido negativo del eje de las x (figura 76). La interacción de las ondas incidente y reflejada subsiste entonces durante un tiempo infinito (y no, como en la figura 75, para un tiempo finito).

La función (1) describe también la interacción entre dos ondas de rarefacción centradas iguales que salen de los puntos $x = 0$ y $x = 2l$ en el instante $t = 0$, y se propagan una hacia la otra; esto es evidente a partir de la simetría (figura 77).

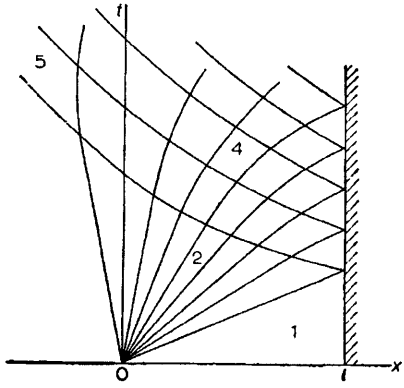

FIG. 76

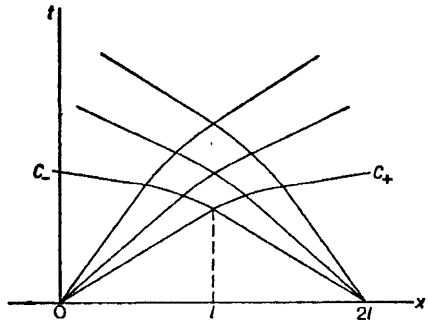

FIG. 77

Problema 2. Deducir la ecuación análoga a (98.3) para un flujo isotermo monodimensional de un gas perfecto.

Solución. En el caso de un flujo isotermo, la entalpía w en la ecuación de Bernouilli se sustituye por

$$\mu = \int \mathrm{d}p/\rho = c_T^2 \int \mathrm{d}\rho/\rho = c_T^2 \log\rho,$$

en donde $c_T^2 = (\partial p/\partial\rho)_T$ es el cuadrado de la velocidad isoterma del sonido. En el caso de un gas perfecto c_T = constante. Tomando la magnitud μ (en lugar de w) como una variable independiente, obtenemos por el mismo método que en el texto, la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$c_T^2 \frac{\partial^2\chi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial\chi}{\partial\mu} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} = 0.$$

§ 99. Propagación de ondas de choque intensas

Consideremos la propagación de una onda de choque esférica de gran intensidad que se obtiene como resultado de una explosión grande, es decir, a partir de una liberación instantánea de una gran cantidad de energía (que designaremos por E) en un volumen pequeño; supondremos que la onda de choque se propaga a través de un gas perfecto (L. I. SEDOV, 1946).

Consideremos la onda a distancias relativamente pequeñas de la fuente, de modo que la amplitud es todavía grande. Sin embargo, se supone que estas distancias son grandes en comparación con las dimensiones de la fuente; esto nos permite admitir que la energía E se genera en un solo punto (el origen).

Si la onda de choque es intensa, la discontinuidad de presiones en ella es muy grande. Supondremos que la presión p_2 detrás de la discontinuidad es tan grande en comparación con la presión p_1 del gas no perturbado delante de ella, que $p_2/p_1 \gg (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Esto significa que en todo punto podemos despreciar p_1 en comparación con p_2, y que el cociente de las densidades ρ_2/ρ_1 es igual a su valor límite $(\gamma+1)/(\gamma-1)$; ver § 85.

Así pues, el esquema de flujo gaseoso está totalmente determinado por dos parámetros: la densidad de gas inicial ρ_1 y la magnitud de la energía E generada en la explosión. A partir de estos parámetros y de las dos variables independientes (el tiempo t y la coordenada radial r) podemos formar sólo una combinación adimensional que escribiremos como

$$\xi = r(\rho_1/Et^2)^{1/5}. \tag{99.1}$$

En consecuencia, tenemos un determinado tipo de flujo de semejanza.

En primer lugar, podemos decir que la posición de la propia onda de choque en todo instante debe corresponder a un cierto valor constante ξ_0 de la magnitud adimensional ξ. Esto da de una vez el modo en que se mueve la

onda de choque con el tiempo; designando por r_0 la distancia de la onda de choque al origen, tenemos

$$r_0 = \xi_0(Et^2/\rho_1)^{1/5}. \tag{99.2}$$

A partir de esta expresión encontramos la velocidad de propagación de la onda de choque (respecto al gas no perturbado, es decir, respecto a un sistema coordenado fijo):

$$u_1 = \mathrm{d}r_0/\mathrm{d}t = 2r_0/5t. \tag{99.3}$$

Disminuye respecto al tiempo como $t^{-3/5}$.

La presión del gas p_2, la densidad ρ_2 y la velocidad $v_2 = u_1 - u_2$ (respecto a un sistema coordenado fijo) detrás precisamente de la discontinuidad puede expresarse en función de u_1 mediante las fórmulas deducidas en § 85. De acuerdo con (85.5) y (85.6),† tenemos

$$v_2 = 2u_1/(\gamma+1), \quad \rho_2 = \rho_1(\gamma+1)/(\gamma-1), \quad p_2 = 2\rho_1 u_1^2/(\gamma+1). \tag{99.4}$$

La densidad es constante en el tiempo, mientras que v_2 y p_2 disminuyen como $t^{-3/5}$ y $p^{-6/5}$, respectivamente. También podemos señalar que la presión p_2 debida al choque aumenta con la energía total de la explosión como $E^{2/5}$.

Determinemos a continuación el flujo del gas a través de la región detrás del choque. En lugar de la velocidad del gas v, la densidad ρ y la presión p, introduzcamos variables adimensionales v', ρ', p', definidas por

$$v = \frac{4}{5(\gamma+1)}\frac{r}{t}v', \qquad \rho = \rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho', \qquad p = \frac{8\rho_1}{25(\gamma+1)}\frac{r^2}{t^2}p'. \tag{99.5}$$

Las magnitudes v', ρ', p' pueden ser funciones únicamente de la variable adimensional ξ. En la superficie de discontinuidad (es decir, para $\xi = \xi_0$) deben tener los valores

$$v' = p' = \rho' = 1 \text{ para } \xi = \xi_0. \tag{99.6}$$

Las ecuaciones del flujo gaseoso adiabático con simetría central son

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{2\rho v}{r} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)\log\frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \tag{99.7}$$

La última ecuación es la ecuación de conservación de la entropía, habiendo sustituido la expresión (80.12) para la entropía de un gas perfecto. Después

† Designamos aquí por u_1 y u_2 las velocidades de la onda de choque relativas al gas, dadas por las fórmulas (85.6).

de sustituir (99.5) tenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones v', ρ' y p'. La integración de estas ecuaciones se facilita por el hecho de que puede obtenerse inmediatamente una integral utilizando los razonamientos siguientes.

El hecho de que hayamos despreciado la presión p_1 del gas no perturbado significa que despreciamos la energía original del gas en comparación con la energía E que adquiere como resultado de la explosión. Por tanto, resulta claro que la energía total del gas dentro de la esfera limitada por la onda de choque es constante e igual a E. Además, puesto que tenemos un flujo de semejanza, es evidente que la energía del gas dentro de una esfera cualquiera de un radio más pequeño, que aumenta con el tiempo, de tal modo que ξ es igual a una constante cualquiera (no sólo ξ_0), debe permanecer constante; la velocidad radial de los puntos sobre esta esfera es $v_n = 2r/5t$ [comparar con (99.3)].

Es sencillo escribir a continuación la ecuación que expresa la constancia de esta energía. Por una parte, una cantidad de energía $dt \cdot 4\pi r^2 \rho v(w + v^2/2)$ sale de la esfera (cuya área es $4\pi r^2$) en el tiempo dt. Por otra parte, el volumen de la esfera aumenta en dicho tiempo en $dt \cdot v_n \cdot 4\pi r^2$, y la energía del gas en este volumen extra es $dt \cdot 4\pi r^2 \rho v_n(\epsilon + v^2/2)$. Igualando ambas expresiones, haciendo $\epsilon = p/\rho(\gamma - 1)$ y $w = \gamma\epsilon$, e introduciendo las funciones adimensionales dadas por (99.5), obtenemos

$$\frac{p'}{\rho'} = \frac{(\gamma + 1 - 2v')v'^2}{2\gamma v' - \gamma - 1}, \tag{99.8}$$

que es la integral buscada. Satisface automáticamente la condición límite (99.6) en la superficie de discontinuidad.

Cuando se conoce la integral (99.8), la integración de las ecuaciones es elemental, aunque laboriosa. La segunda y tercera ecuaciones (99.7) dan

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{d\log\xi} + \left(v' - \frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{d\log\rho'}{d\log\xi} &= -3v', \\ \frac{d}{d\log\xi}\left(\log\frac{p'}{\rho'^{\gamma}}\right) &= \frac{5(\gamma+1) - 4v'}{2v' - (\gamma+1)}. \end{aligned} \tag{99.9}$$

A partir de ambas ecuaciones podemos expresar las derivadas $dv'/d\log\xi$ y $d\log\rho'/dv'$, mediante (99.8), como funciones únicamente de v', y luego una integración con las condiciones límites (99.6) da

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^5 = v'^2\left[\frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma}\right]^{\nu_1}\left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1}\right]^{\nu_2},$$

$$\rho' = \left[\frac{2\gamma v' - \gamma - 1}{\gamma - 1}\right]^{\nu_3}\left[\frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma}\right]^{\nu_4}\left[\frac{\gamma + 1 - 2v'}{\gamma - 1}\right]^{\nu_5},$$

$$\nu_1 = \frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \qquad \nu_2 = -\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}, \qquad \nu_3 = \frac{3}{2\gamma+1},$$

$$\nu_4 = \frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \qquad \nu_5 = \frac{1}{\gamma-2}. \tag{99.10}$$

Las fórmulas (99.8) y (99.10) dan la solución completa del problema. La constante ξ_0 está determinada por la condición

$$E = \int_0^{r_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) 4\pi r^2 \mathrm{d}r,$$

que establece que la energía total del gas es igual a la energía E de la explosión. En función de las magnitudes adimensionales, esta condición se transforma en

$$\xi_0{}^5 \frac{32\pi}{25(\gamma^2-1)} \int_0^1 (\xi^4\rho' v'^2 + \xi^9 p')\mathrm{d}\xi = 1. \tag{99.11}$$

Por ejemplo, en el caso del aire ($\gamma = 7/5$) esta constante es $\xi_0 = 1{,}033$.

Los cocientes v/v_2 y ρ/ρ_2, funciones de $r/r_0 = \xi/\xi_0$, como se ve fácilmente a partir de las fórmulas anteriores, tienden a cero cuando $r/r_0 \to 0$, del modo

$$v/v_2 \sim r/r_0, \qquad \rho/\rho_2 \sim (r/r_0)^{3/(\gamma-1)}; \tag{99.12}$$

sin embargo, el cociente de presiones p/p_2 tiende a una constante, y el cociente de temperaturas tiende, por tanto, a infinito.

La figura 78 muestra las magnitudes v/v_2, p/p_2 y ρ/ρ_2, en funciones de r/r_0 para el aire ($\gamma = 1{,}4$). La disminución muy rápida de la densidad dentro de la esfera es notable: casi todo el gas está dentro de una capa relativamente delgada detrás de la onda de choque. Como es natural, esto se debe al hecho de que el gas en la superficie de radio mayor (r_0) tiene una densidad que es seis veces la densidad normal.†

§ 100. Teoría del agua poco profunda

Existe una analogía notable entre un flujo gaseoso y el flujo en un campo gravitatorio de un fluido incompresible con una superficie libre, cuando la profundidad del fluido es pequeña (comparable con las dimensiones características del problema, tales como las dimensiones de las irregularidades en

† Los resultados de los cálculos para otros valores de γ han sido dados por L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, capítulo IV, § 11, Cleaver-Hume Press, Londres, 1959. También se estudia el problema correspondiente con simetría cilíndrica.

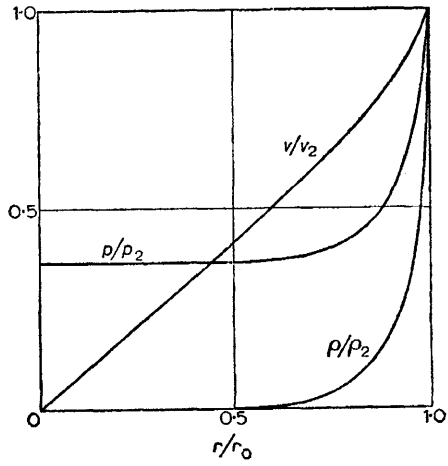

FIG. 78

el fondo del recipiente). En este caso puede despreciarse la componente vertical de la velocidad del fluido en comparación con su velocidad paralela a la superficie y esta última puede considerarse como constante a través de toda la profundidad del fluido. En esta aproximación (*hidráulica*), puede considerarse al fluido como un medio «bidimensional» que tiene una velocidad definida **v** en cada punto y también está caracterizada en cada punto por una magnitud h, que es la profundidad del fluido.

Las ecuaciones generales del movimiento correspondiente difieren de las obtenidas en § 13 únicamente en que las variaciones de las magnitudes durante el movimiento no necesitan suponerse que son pequeñas, como se hizo en § 13 al estudiar ondas de gravedad largas de pequeña amplitud. En consecuencia, los términos de segundo orden de la velocidad en la ecuación de Euler deben retenerse. En particular, en el caso de un flujo monodimensional en un canal, que depende sólo de una coordenada x (y del tiempo), las ecuaciones son

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}; \end{aligned} \tag{100.1}$$

se supone aquí que la profundidad h es constante en todo el canal.

Ondas de gravedad largas son, en un sentido general, pequeñas perturbaciones del flujo que estamos ahora considerando. Los resultados del § 13 muestran que dichas perturbaciones se propagan respecto al fluido con una velocidad finita, a saber

$$c = \sqrt{(gh)}. \tag{100.2}$$

Esta velocidad juega aquí el papel de la velocidad del sonido en la dinámica de los gases. Lo mismo que en § 79, podemos obtener la conclusión de que, si el fluido se mueve con velocidades $v < c$ (*flujo tranquilo*), el efecto de las perturbaciones se propaga tanto aguas arriba como aguas abajo. Sin embargo, si el fluido se mueve con velocidades $v > c$ (*flujo rápido*), el efecto de las perturbaciones se propaga solamente en determinadas regiones aguas abajo.

La presión p (contada a partir de la presión atmosférica en la superficie libre) varía con la profundidad del fluido de acuerdo con la ley hidrostática $p = \rho g(h - z)$, siendo z la altura por encima del fondo. Es útil señalar que si introducimos las magnitudes

$$\bar{\rho} = \rho h, \qquad \bar{p} = \int_0^h p\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho g h^2 = g\bar{\rho}^2/2\rho, \tag{100.3}$$

entonces las ecuaciones (100.1) se transforman en

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(v\bar{\rho})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \tag{100.4}$$

que son formalmente idénticas a las ecuaciones del flujo adiabático de un gas perfecto con $\gamma = 2(\overline{p} \sim \overline{\rho}^2)$. Esto nos permite aplicar inmediatamente a la teoría del agua poco profunda todos los resultados de la dinámica de los gases para el flujo en ausencia de ondas de choque. Sin embargo, si estuviesen presentes las ondas de choque, los resultados de la teoría del agua poco profunda difieren de los obtenidos en la dinámica de los gases perfectos.

Una «onda de choque» en un fluido dentro de un canal es una discontinuidad en la altura del fluido h y, por tanto, en la velocidad del fluido v (que se denomina *salto hidráulico* o *salto de agua*). La relación entre los valores de las magnitudes a ambos lados de la discontinuidad puede obtenerse a partir de las condiciones de continuidad de los flujos de masa y de impulso. La densidad del flujo de masa (por unidad de anchura del canal) es $j = \rho v h$. La densidad de flujo de impulso se obtiene integrando $p + \rho v^2$ en toda la profundidad del canal, y vale

$$\int_0^h (p + \rho v^2)\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\rho g h^2 + \rho v^2 h.$$

Por tanto, las condiciones de continuidad dan dos ecuaciones:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \tag{100.5}$$

$$v_1^2 h_1 + \tfrac{1}{2} g h_1^2 = v_2^2 h_2 + \tfrac{1}{2} g h_2^2. \tag{100.6}$$

Estas expresiones nos dan las relaciones entre las cuatro magnitudes v_1, v_2, h_1, h_2, dos de las cuales pueden especificarse arbitrariamente. Expresando las velocidades v_1 y v_2 en función de las alturas h_1 y h_2, obtenemos

$$v_1^2 = \tfrac{1}{2} g h_2(h_1 + h_2)/h_1, \qquad v_2^2 = \tfrac{1}{2} g h_1(h_1 + h_2)/h_2. \tag{100.7}$$

Los flujos de energía a ambos lados de la discontinuidad no son iguales, y su diferencia es la cantidad de energía disipada en la discontinuidad por unidad de tiempo. La densidad de flujo de la energía en el canal es

$$q = \int_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \tfrac{1}{2}v^2\right)\rho v \, dz = \tfrac{1}{2}j(gh + v^2).$$

Utilizando (100.7), hallamos que la diferencia es

$$q_1 - q_2 = gj(h_1^2 + h_2^2)(h_2 - h_1)/4h_1h_2.$$

Supongamos que el fluido se mueve a través de la discontinuidad del lado 1 al lado 2. Entonces, el hecho de que la energía se disipe significa que $q_1 - q_2 > 0$, y se obtiene la conclusión de que

$$h_2 > h_1, \tag{100.8}$$

es decir, el fluido se mueve desde la altura menor a la mayor. Podemos deducir, entonces, a partir de (100.7), que

$$v_1 > c_1 = \sqrt{(gh_1)}, \qquad v_2 < c_2 = \sqrt{(gh_2)}, \tag{100.9}$$

en analogía completa con los resultados para las ondas de choque en la dinámica de los gases. También podían haberse deducido las desigualdades (100.9) como las condiciones necesarias para que sea estable la discontinuidad, como en § 84.

CAPÍTULO XI

INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD

§ 101. Ondas de rarefacción

La línea de intersección de dos ondas de choque es, matemáticamente, una línea singular de dos funciones que describen el flujo de gases. El vértice de un ángulo agudo en la superficie de un cuerpo por el que el gas fluye es siempre una línea singular de este tipo. Resulta que el flujo del gas cerca de la línea singular puede analizarse de una manera completamente general (L. PRANDTL y T. MEYER, 1908).

Al considerar la región cerca de un pequeño segmento de la línea singular, podemos considerar esta última con una línea recta que tomaremos como eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z. Cerca de la línea singular todas las magnitudes dependen considerablemente del ángulo ϕ, pero su dependencia respecto a la coordenada r es sólo ligera y puede despreciarse para valores suficientemente pequeños de r. También carece de importancia la dependencia respecto a la coordenada z; puede despreciarse, por tanto, la variación del esquema del flujo en un pequeño segmento de la línea singular.

Así pues, hemos de analizar un flujo estacionario en el que todas las magnitudes son funciones únicamente de ϕ. La ecuación de conservación de la entropía, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, s = 0$, da $v_\phi \, ds/d\phi = 0$, de aquí que $s =$ constante,† es decir, el flujo es isoentrópico. Por tanto, podemos sustituir en la ecuación de Euler $\mathbf{grad}\, p/\rho$ por $\mathbf{grad}\, w$: $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w$. En coordenadas cilíndricas tenemos tres ecuaciones:

$$\frac{v_\phi}{r}\frac{dv_r}{d\phi} - \frac{v_\phi^2}{r} = 0, \qquad \frac{v_\phi}{r}\frac{dv_\phi}{d\phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{d\phi}, \qquad v_\phi \frac{dv_z}{d\phi} = 0.$$

†Si $v_\phi = 0$, se puede deducir fácilmente a partir de las ecuaciones del movimiento que daremos más adelante que $v_r = 0$, $v_z \neq 0$. Dicho flujo correspondería a la intersección de superficies de discontinuidad tangencial (con una velocidad discontinua v_z), y carece de interés, puesto que dichas discontinuidades son inestables.

A partir de la última de estas tenemos v_z = constante, y sin pérdida de generalidad podemos poner $v_z = 0$, considerando el flujo como bidimensional; esto es simplemente un modo de definir adecuadamente la velocidad del sistema coordenado a lo largo del eje z. Las dos primeras ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$v_\phi = \mathrm{d}v_r/\mathrm{d}\phi, \tag{101.1}$$

$$v_\phi\left(\frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}\phi} + v_r\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi}. \tag{101.2}$$

Sustituyendo (101.1) en (101.2), tenemos

$$v_\phi\frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}\phi} + v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi},$$

o sea, integrando

$$w + \tfrac{1}{2}(v_\phi^2 + v_r^2) = \text{constante}. \tag{101.3}$$

Podemos observar que la ecuación (101.1) implica que **rot v** = 0, es decir, tenemos flujo potencial como resultado del cual es válida la ecuación de Bernoulli (101.3).

A continuación, la ecuación de continuidad, $\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, da

$$\rho v_r + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}(\rho v_\phi) = \rho\left(v_r + \frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}\phi}\right) + v_\phi\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi} = 0. \tag{101.4}$$

Utilizando (101.2), obtenemos

$$\left(\frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}\phi} + v_r\right)\left(1 - v_\phi^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\right) = 0.$$

La derivada $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$, o más correctamente $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_s$, coincide con el cuadrado de la velocidad del sonido. Así pues,

$$\left(\frac{\mathrm{d}v_\phi}{\mathrm{d}\phi} + v_r\right)\left(1 - \frac{v_\phi^2}{c^2}\right) = 0. \tag{101.5}$$

Esta ecuación puede satisfacerse de cualquiera de las dos formas siguientes. Primeramente, podemos tener $\mathrm{d}v_\phi/\mathrm{d}\phi + v_r = 0$. Entonces, a partir de (101.2), p = constante y ρ = constante, y a partir de (101.3), encontramos que $v^2 = v_r^2 + v_\phi^2$ = constante, es decir, el módulo de la velocidad es constante. Es fácil ver que en este caso también la dirección de la velocidad es constante. El ángulo χ formado por la velocidad y una dirección determinada en el plano del movimiento es (figura 79)

$$\chi = \phi + \operatorname{arctg}(v_\phi/v_r). \tag{101.6}$$

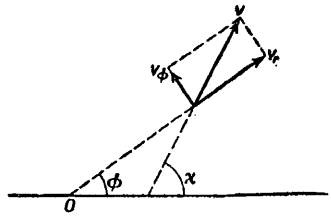

FIG. 79

Derivando esta expresión respecto a ϕ y utilizando las fórmulas (101.1) y (101.2), se obtiene fácilmente

$$d\chi/d\phi = -(v_r/\rho v_\phi v^2)\, dp/d\phi. \tag{101.7}$$

Como p = constante, se deduce que χ = constante. Así pues, si el primer factor de (101.5) es cero, tenemos la solución trivial de un flujo uniforme.

En segundo lugar, la ecuación (101.5) puede satisfacerse haciendo $1 - v_\phi^2/c^2 = 0$, es decir, $v_\phi = \pm c$. La velocidad radial viene dada por (101.3). Designando la constante de la ecuación por w_0, se encuentra que

$$v_\phi = \pm c, \qquad v_r = \pm\sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}.$$

En esta solución, la componente de la velocidad v_ϕ perpendicular al radio vector es igual a la velocidad local del sonido en todo punto. La velocidad total $v = \sqrt{(v_\phi^2 + v_r^2)}$ supera, por tanto, a la del sonido. En distintos puntos son diferentes tanto el módulo como la dirección de la velocidad. Puesto que la velocidad del sonido no puede anularse, es evidente que la función $v_\phi(\phi)$, que es continua, debe valer en todo punto $+c$, o bien en todo punto $-c$. Midiendo el ángulo ϕ en la dirección apropiada, podemos tomar $v_\phi = c$. Veremos a continuación que la selección del signo de v_r se obtiene a partir de consideraciones físicas y que el signo más debe ser el elegido. Así pues,

$$v_\phi = c, \qquad v_r = \sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}. \tag{101.8}$$

A partir de la ecuación de continuidad (101.4) tenemos $d\phi = -d(\rho v_\phi)/\rho v_r$. Sustituyendo (101.8) e integrando, tenemos

$$\phi = -\int \frac{d(\rho c)}{\rho\sqrt{[2(w_0 - w) - c^2]}}. \tag{101.9}$$

Si se conoce la ecuación de estado del gas y la ecuación de la adiabática (recordemos que s es constante) puede utilizarse esta fórmula para determinar todas las magnitudes como funciones del ángulo ϕ. Así pues, las fórmulas (101.8) y (101.9) determinan por completo el flujo del gas.

Estudiemos a continuación con más detalle la solución que hemos obtenido. En primer lugar, observemos que las líneas rectas ϕ = constante,

cortan a las líneas de corriente en todo punto, formando el ángulo de Mach (cuyo seno es $v_\phi/v = c/v$), es decir, son características. Así pues, una familia de características (en el plano xy) es un haz de líneas rectas a través del punto singular y tiene una propiedad importante en este caso: todas las magnitudes son constantes a lo largo de cada característica. En este aspecto la solución que nos ocupa juega la misma parte en la teoría del flujo bidimensional estacionario que lo hacía el flujo de semejanza estudiado en § 92 en la teoría del flujo monodimensional no estacionario. Volveremos a este punto en § 107.

Se ve a partir de (101.9) que $(\rho c)' < 0$, designando con el símbolo prima la derivación respecto a ϕ. Haciendo $(\rho c)' = \rho' \mathrm{d}(\rho c)/\mathrm{d}\rho$ y observando que la derivada $\mathrm{d}(\rho c)/\mathrm{d}\rho$ es positiva [ver 92.9)], vemos que $\rho' < 0$, y, por lo tanto, también son negativas las derivadas $p' = c^2\rho'$ y $w' = p'/\rho$. A continuación, y teniendo en cuenta que w' es negativo, se deduce que la velocidad $v = \sqrt{[2(w_0 - w)]}$ aumenta con ϕ. Finalmente, a partir de (101.7), $\chi' > 0$. Así pues, tenemos

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}\phi < 0, \qquad \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\phi < 0, \qquad \mathrm{d}v/\mathrm{d}\phi > 0, \qquad \mathrm{d}\chi/\mathrm{d}\phi > 0. \tag{101.10}$$

En otras palabras, cuando rodeamos el punto singular en la dirección del flujo, disminuyen la densidad y la presión, mientras que el módulo de la velocidad aumenta y su dirección gira en la dirección del flujo.

El flujo que acabamos de describir se suele denominar *onda de rarefacción*, y utilizaremos este nombre en lo que sigue.

Es fácil ver que una onda de rarefacción no puede existir en toda la región que rodea el punto singular. Efectivamente, puesto que v aumenta monótonamente con ϕ, un circuito completo alrededor del origen (es decir, una variación de ϕ en 2π) daría un valor de v diferente del valor inicial, lo cual es imposible. Por esta razón, el esquema real del flujo alrededor de una línea singular debe estar compuesto por una serie de sectores separados por planos ϕ = constante, que son superficies de discontinuidad. En cada una de estas regiones tenemos una onda de rarefacción o un flujo con velocidad constante. El número y naturaleza de estas regiones para los diversos casos particulares se establecerá en las secciones siguientes. Aquí mencionaremos simplemente que el límite entre una onda de rarefacción y un flujo uniforme debe ser una discontinuidad débil: no puede ser una discontinuidad tangencial (de v_r), puesto que la componente de velocidad normal $v_\phi = c$ no se anula en ella. Ni puede ser una onda de choque, puesto que la componente de velocidad normal v_ϕ debe ser mayor que la velocidad del sonido en un lado de dicha discontinuidad y menor en el otro, mientras que en nuestro problema siempre tenemos $v_\phi = c$ sobre cada lado del límite.

De lo anterior puede obtenerse una importante conclusión. Las perturbaciones que producen discontinuidades débiles evidentemente abandonan

la línea singular (eje z) y se propagan alejándose de ella. Esto significa que las discontinuidades débiles que limitan la onda de rarefacción deben ser aquellas que abandonan esta línea, es decir, aquéllas cuya componente de velocidad v_r tangencial a la discontinuidad débil sea positiva. Esto justifica la selección del signo de v_r hecha en (101.8).

Apliquemos a continuación estas fórmulas a un gas perfecto. En dicho gas $w = c^2/(\gamma - 1)$, mientras que la ecuación de la adiabática de Poisson puede escribirse en la forma

$$p\rho^{-2/(\gamma-1)} = \text{constante}, \quad p\rho^{-2\gamma/(\gamma-1)} = \text{constante}; \tag{101.11}$$

ver (92.13). Utilizando estas fórmulas podemos escribir la integral (101.9) en la forma

$$\phi = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{\mathrm{d}c}{\sqrt{(c_*^2 - c^2)}},$$

siendo c_* la velocidad crítica [ver (80.14)]. De aquí

$$\phi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cos^{-1}\frac{c}{c_*} + \text{constante},$$

o bien, si medimos ϕ de modo tal que la constante es cero,

$$v_\phi = c = c_* \cos\sqrt{[(\gamma-1)/(\gamma+1)]}\phi. \tag{101.12}$$

Por tanto, de acuerdo con la fórmula (101.8), tenemos

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_* \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi. \tag{101.13}$$

A continuación, utilizando la ecuación adiabática de Poisson en la forma (101.11), podemos hallar la presión del ángulo ϕ:

$$p = p_* \cos^{2\gamma/(\gamma-1)}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi. \tag{101.14}$$

Finalmente, tenemos para el ángulo χ (101.6)

$$\chi = \phi + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cot\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right), \tag{101.15}$$

midiéndose los ángulos χ y ϕ a partir de la misma línea inicial.

Puesto que debemos tener $v_r < 0$, $c > 0$, el ángulo ϕ en estas fórmulas puede variar únicamente entre 0 y ϕ_{max}, siendo

$$\phi_{max} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}. \qquad (101.16)$$

Esto significa que la onda de rarefacción puede ocupar un sector cuyo ángulo no supere a ϕ_{max}; en el caso de un gas diatómico (el aire, por ejemplo), este ángulo es 219,3°. Cuando ϕ varía desde 0 hasta ϕ_{max}, el ángulo χ varía desde $\pi/2$ hasta ϕ_{max}. Así pues, la dirección de la velocidad de la onda de rarefacción puede girar un ángulo que no supere a $\phi_{max} - \pi/2$ (= 129,3° en el caso del aire).

Cuando $\phi = \phi_{max}$, la presión es cero. En otras palabras, si la onda de rarefacción ocupa el ángulo máximo, la discontinuidad débil en un lado constituye un límite con el vacío y, como es natural, constituye una línea de corriente; tenemos $v_\phi = c = 0$, $v_r = v = \sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}c_* = v_{max}$, es decir, la velocidad es radial y alcanza su valor máximo límite v_{max} (ver § 80).

La figura 80 muestra los gráficos de p/p_*, c_*/v y χ en función del ángulo ϕ para el caso del aire ($\gamma = 1{,}4$).

Es interesante señalar la forma de la curva en el plano $v_x v_y$ definida por las fórmulas (101.12) y (101.13) (denominada *hodógrafa de velocidades*). Es un arco de una epicicloide entre las circunferencias de radio $v = c_*$ y $v = c_*\sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]} = v_{max}$ (figura 81).

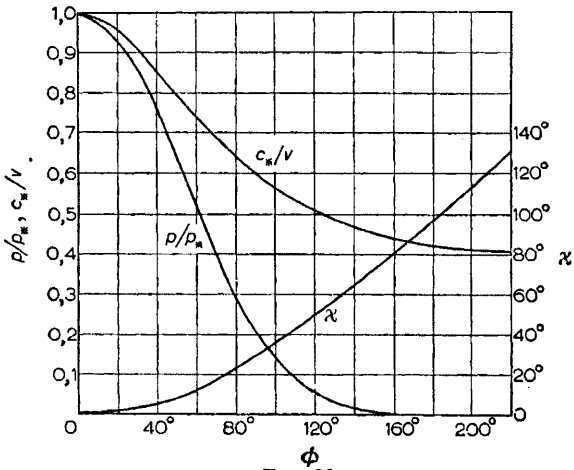

FIG. 80

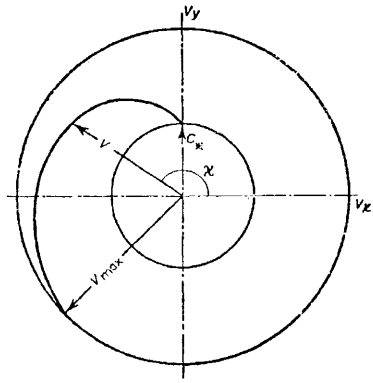

FIG. 81

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar la forma de las líneas de corriente en una onda de rarefacción.

Solución. La ecuación de las líneas de corriente en el caso de un flujo bidimensional es, en coordenadas polares, $dr/v_r = r\,d\phi/v_\phi$. Sustituyendo (101.12) y (101.13) e integrando, obtenemos

$$r = r_0 \cos^{-(\gamma+1)/(\gamma-1)} \sqrt{[(\gamma-1)/(\gamma+1)]}\,\phi.$$

Estas líneas de corriente forman una familia de curvas semejantes con la concavidad hacia el origen que es el centro de semejanza.

Problema 2. Determinar el ángulo máximo posible entre las discontinuidades débiles que limitan una onda de rarefacción para valores dados v_1, c_1 de la velocidad del gas y la velocidad del sonido en una discontinuidad.

Solución. El ángulo ϕ correspondiente a la primera discontinuidad es, según (101.12),

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcos} \frac{c_1}{c_*}.$$

El valor de ϕ_2 es ϕ_{max}, de modo que el ángulo buscado es

$$\phi_2 - \phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsen} \frac{c_1}{c_*}.$$

La velocidad crítica c_* viene dada en función de v_1 y c_1 por la ecuación de Bernouilli:

$$w_1 + \tfrac{1}{2}v_1^2 = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \tfrac{1}{2}v_1^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_*^2.$$

El ángulo máximo posible a través del cual puede girar la velocidad del gas en una onda de rarefacción es, de acuerdo con (101.15), la diferencia $\chi_{max} = \chi(\phi_1) - \chi(\phi_2)$:

$$\chi_{max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\text{arcsen}\,\frac{c_1}{c_*} - \text{arcsen}\,\frac{c_1}{v_1}.$$

Por ser una función de v_1/c_1, χ_{max} es máximo para $v_1/c_1 = 1$:

$$\chi_{max} = \tfrac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right).$$

Para $v_1/c_1 \to \infty$, χ_{max} tiende a cero.

$$\chi_{max} = \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{c_1}{v_1}.$$

§ 102. Intersección de las ondas de choque

Las ondas de choque pueden cortarse a lo largo de una línea. Al considerar el flujo cerca de un segmento pequeño de esta línea, podemos admitir que es una línea recta y que las superficies de discontinuidad son planas. Por tanto, es suficiente estudiar la intersección de ondas de choque planas.

La línea de intersección de dos continuidades es matemáticamente una línea singular, como ya se ha mencionado al principio del § 101. El esquema del flujo cerca de esta línea se compone de un cierto número de sectores, en cada uno de los cuales tenemos un flujo uniforme o una onda de rarefacción del tipo descrito en § 101. Es posible dar una clasificación general de los tipos posibles de intersección de las superficies de discontinuidad (L. LANDAU, 1944).

En primer lugar, debemos hacer la siguiente aclaración. Si el flujo del gas en ambos lados de la onda de choque es supersónico, entonces (como se mencionó al principio del § 86) podemos hablar del «sentido» de la onda de choque y de acuerdo con ello distinguir las ondas de choque que abandonan la línea de intersección de aquellas que se mueven hacia la misma. En el primer caso la componente de velocidad tangencial se aleja de la línea de intersección y podemos decir que las perturbaciones que produce la discontinuidad abandonan esta línea. En el segundo caso las perturbaciones salen de un punto que no está situado en la línea de intersección.

Si el flujo en un lado de la onda de choque es subsónico, entonces las perturbaciones se propagan en ambos sentidos a lo largo de su superficie y el «sentido» del choque no tiene, estrictamente hablando, ningún significado. Sin embargo, en los razonamientos que veremos a continuación, lo que tiene importancia es que las perturbaciones que salen del punto de intersección puedan propagarse a lo largo de dicha discontinuidad. En este sen-

tido, dichas ondas de choque juegan el mismo papel en el estudio siguiente que los choques puramente supersónicos que abandonan la intersección, e incluiremos ambos tipos en el término «choques que salen de la intersección».

Las figuras 82-86 muestran los esquemas del flujo en un plano perpendicular a la línea de intersección. Podemos admitir, sin pérdida de generalidad, que el flujo se produce en este plano. La componente de velocidad paralela a la línea de intersección (y, por tanto, a todos los planos de discontinuidad) debe ser la misma en todas las regiones que rodean la línea de intersección y, por tanto, podemos hacer que se anule mediante una selección apropiada de sistema de coordenadas.

Es fácil ver que no puede existir ninguna intersección de las ondas de choque en la que no exista ningún choque que alcance la intersección. Por ejemplo, en la intersección de dos ondas de choque que salen de la intersección, indicada en la figura 82a, las líneas de corriente del flujo incidente procedentes de la izquierda se desviarán en sentidos opuestos, mientras que la velocidad debería ser constante a través de la región 2 y esta dificultad no puede superarse añadiendo alguna otra discontinuidad adicional en la región 2.† Análogamente, podemos ver que la intersección de una onda de choque y de una onda de rarefacción, en la que ambas abandonan la intersección como se ve en la figura 82b, es imposible; aunque la velocidad en la región 2 puede tener una dirección constante, la presión no puede ser constante, puesto que aumenta en una onda de choque, mientras que disminuye en una onda de rarefacción.

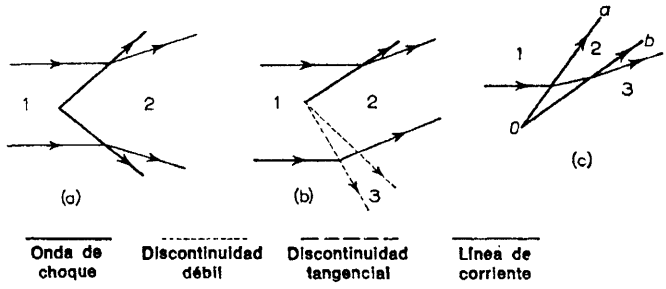

FIG. 82

A continuación, puesto que la intersección no puede influir en las ondas de choque que llegan a ella, la intersección simultánea (a lo largo de una línea común) de más de dos ondas de este tipo, que se deban a otras cau-

† Con objeto de no complicar la discusión con argumentos repetitivos, no haremos ninguna consideración semejante para aquellos casos en donde existen regiones de flujo subsónico y el choque que emerge de la intersección es realmente una onda de choque limitada por una región subsónica.

sas, sería una coincidencia muy poco probable. Así pues, sólo una o dos ondas de choque pueden llegar a la intersección.

El hecho siguiente es muy importante. El gas que fluye alrededor de un punto de intersección solamente puede atravesar una onda de choque o una onda de rarefacción que salga de este punto. Por ejemplo, supongamos que el gas se hace pasar a través de dos ondas de choque sucesivas que salen del punto *O*, como se ve en la figura 82c. Puesto que la componente de velocidad normal v_{2n} detrás del choque *Oa* es menor que c_2, la componente de velocidad en la región 2 normal al choque *Ob* debe ser también menor que c_2, en contradicción con una propiedad fundamental de las ondas de choque. Análogamente, podemos ver que el gas no puede pasar a través de dos ondas de rarefacción sucesivas, ni de una onda de choque y una onda de rarefacción que salgan del punto *O*.

Evidentemente estos razonamientos no pueden ampliarse a las ondas de choque que llegan al punto de intersección.

Ahora podemos continuar enumerando los tipos posibles de intersección. La figura 83 muestra una intersección en la que intervienen una onda de choque *Oa* que llega a la misma y dos ondas de choque, *Ob*, *Oc*, que salen de ella. Este caso puede considerarse como la descomposición o división de una onda de choque en otras dos.† Es fácil ver que además de las dos ondas de choque que salen, debe estar formándose una discontinuidad tangencial *Od* comprendida entre ellas, que separa el gas que fluye a través de *Ob* del que fluye a través de *Oc*.‡ Efectivamente, el choque *Oa* se debe a otras causas y está, por tanto, totalmente definido. Esto significa que las magnitudes termodinámicas (p y ρ, por ejemplo) y la velocidad **v** tienen valores dados en las regiones 1 y 2. Por tanto, permanecen a nuestra disposición sólo dos magnitudes (los ángulos que dan las direcciones de las discontinuidades *Ob* y *Oc*), con lo que se satisfacen, en general, cuatro condiciones (la constancia de p, ρ y las dos componentes de velocidades) en la región 3-4, que deberían haberse satisfecho en ausencia de la discontinuidad tangencial *Od*. No obstante, la adición de esta última reduce el número de condiciones a dos (la constancia de la presión y la constancia de la dirección de la velocidad).

Sin embargo, una onda de choque arbitraria no puede dividirse de esta manera. Una onda de choque que llegue a la intersección está definida por dos parámetros (para un estado termodinámico dado del gas 1), por ejemplo, el número de Mach M_1 de la corriente incidente y el cociente de presio-

† Debe señalarse que una onda de choque no puede dividirse en una onda de choque y otra de rarefacción; se ve fácilmente que no pueden reconciliarse las variaciones de presión y la dirección de las velocidades de las ondas.

‡ Como es normal, la discontinuidad tangencial se transforma en realidad en una región turbulenta.

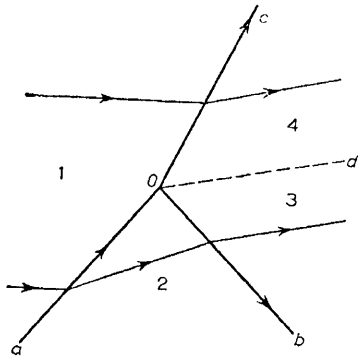

FIG. 83

nes p_1/p_2. Solamente en una cierta región dentro del plano de estos dos parámetros puede producirse la ramificación.†

Las intersecciones en las que intervienen dos ondas de choque que llegan a encontrarse pueden considerarse como «colisiones» de dos choques debidas a otras causas. Aquí existen dos casos esencialmente distintos, como se ve en la figura 84.

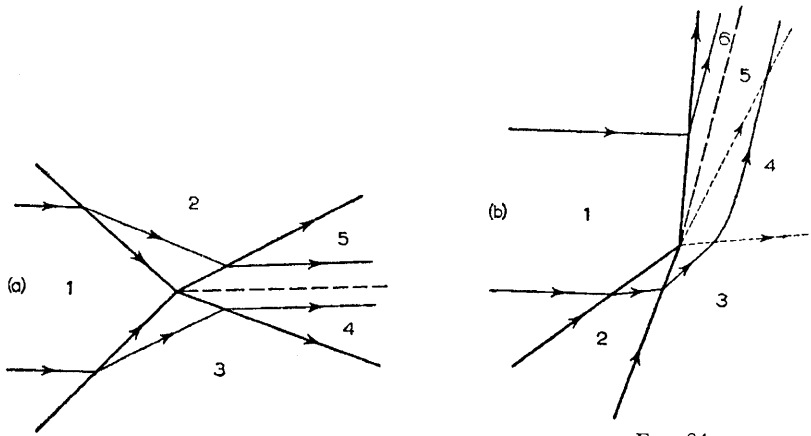

FIG. 84

† La determinación de esta región exige cálculos algebraicos muy laboriosos. Los resultados que se han publicado (ver, por ejemplo, R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948), se ven invalidados desgraciadamente por el hecho de que no hacen distinción entre ondas de choque que salen o llegan a la intersección. Por consiguiente, entre las configuraciones ternarias se incluyen también aquellas en las que dos ondas llegan a la intersección y sólo una sale de la misma. Sin embargo, este es el caso de intersección de dos choques debidos a causas diferentes y que alcanzan el punto de intersección con valores dados de todos los parámetros. Su «fusión» en un choque es posible sólo cuando estos parámetros arbitrarios están relacionados en cierto modo y esto resulta una coincidencia improbable.

En el primer caso, la colisión de las dos ondas de choque da como resultado otras dos ondas de choque que salen del punto de intersección. Si han de cumplirse todas las condiciones necesarias, debe formarse de nuevo una discontinuidad tangencial y debe estar entre las dos ondas de choque resultantes.

En el segundo caso, en lugar de dos ondas de choque, se forma una onda de choque y una onda de rarefacción.

Dos ondas de choque en colisión se definen mediante tres parámetros (por ejemplo, M_1 y los cocientes p_1/p_2, p_1/p_3). Los tipos de intersección que acabamos de describir son posibles únicamente para ciertos márgenes de valores de estos parámetros. Si los valores de los parámetros no caen dentro de estas regiones, la colisión de las ondas de choque debe estar precedida por su ruptura y ramificación.

La figura 85 representa la reflexión de una onda de choque procedente del límite entre un gas en movimiento y un gas en reposo. La región 5 contiene gas en reposo separado del gas en movimiento mediante una discontinuidad tangencial. En las dos regiones 1 y 4 adyacentes a la misma, la presión debe ser la misma e igual a p_5. Puesto que la presión aumenta en una onda de choque, es evidente que la onda de choque debe reflejarse en la discontinuidad tangencial con una onda de rarefacción 3, lo cual reduce la presión a su valor inicial.

Finalmente, estudiaremos brevemente la intersección de una onda de choque con una discontinuidad débil que llega procedente de una fuente externa. Aquí pueden presentarse dos casos, de acuerdo con que el flujo detrás de la onda de choque sea supersónico o subsónico. En el primer caso (figura 86a), la discontinuidad débil se ve «refractada» en la onda de choque en el espacio detrás de esta última; el propio choque no se ve refractado en la intersección, pero tiene una singularidad de orden superior, como el correspondiente a una discontinuidad débil. Además, la variación de entropía en la onda de choque debe producir detrás de ella una «discontinuidad tangencial débil», en la cual sean discontinuas las derivadas de la entropía.

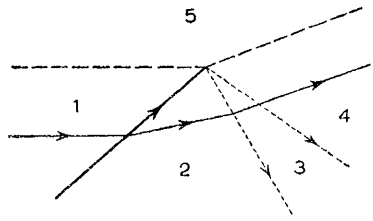

FIG. 85

Sin embargo, si el flujo se hace subsónico detrás de la onda de choque, la discontinuidad débil no puede penetrar dentro de esta región y cesa en el punto de intersección (figura 86b). Este último es ahora un punto singular; puede demostrarse que la distribución de velocidades detrás de la onda de choque tiene una singularidad logarítmica en este punto. Además, como en el caso anterior, debe presentarse una discontinuidad tangencial débil de la entropía detrás de la onda de choque.†

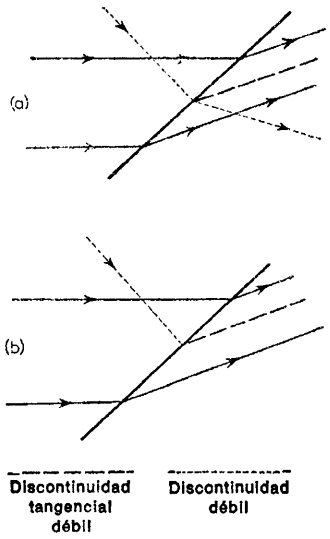

FIG. 86

§ 103. Intersección de ondas de choque con una superficie sólida

Una parte importante del fenómeno de la intersección estacionaria de ondas de choque con la superficie de un cuerpo está constituida por su interacción con la capa límite. Esta interacción es muy compleja y no ha sido suficientemente investigada experimental ni teóricamente. Sin embargo, algunos razonamientos generales simples nos permiten obtener ciertos resultados importantes que ahora expondremos.‡

† Un análisis detallado cualitativo y cuantitativo de los posibles tipos de intersección de las ondas de choque con las discontinuidades débiles ha sido dado por S. P. D'YAKOV, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **33**, 948, 962, 1957; *Soviet Physics JETP*, **6** (33), 729, 739, 1958; *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **99**, 921, 1954.

‡ La capa límite contiene necesariamente una parte subsónica adjunta a la superficie, en la que no puede penetrar la onda de choque. Al hablar de la intersección, ignoramos este hecho, que no influye en el estudio siguiente.

La presión es discontinua en una onda de choque y aumenta en el sentido del movimiento del gas. De aquí que, si la onda de choque intersecta a la superficie, debe existir un incremento finito de presión en una distancia muy corta cerca del lugar de la intersección, es decir, debe aparecer un gradiente de presiones positivo muy grande. Sin embargo, sabemos que dicho incremento rápido de presión no puede producirse cerca de una pared sólida (ver el final del § 40); entonces se produciría la separación y el esquema del flujo alrededor del cuerpo se modifica de tal modo que la onda de choque se mueve, alejándose a una distancia suficiente de la superficie.

Sin embargo, estos razonamientos no se aplican cuando la onda de choque es débil. Es evidente, a partir de la prueba dada al final del § 40, que la imposibilidad de discontinuidad de presión positiva en la capa límite es una consecuencia de la hipótesis de que esta discontinuidad es grande: debe superar un cierto límite, que depende del valor de R, el cual disminuye cuando R aumenta.‡

Así pues, se obtienen las siguientes conclusiones importantes. Es imposible la intersección estacionaria de ondas de choques intensas con una superficie sólida. Una superficie sólida puede cortar sólo a ondas de choque débiles y la intensidad límite es tanto menor cuanto mayor sea R. La intensidad máxima permisible de la onda de choque depende también de si la capa límite es laminar o turbulenta. Si la capa límite es turbulenta, se retarda el establecimiento de la separación (§ 45). Por tanto, en una capa límite turbulenta, pueden salir de la superficie del cuerpo unas ondas de choque más intensas que si la capa límite fuese laminar.††

Para evitar malas interpretaciones debe resaltarse que estos razonamientos cuentan con el hecho de que la capa límite existe delante de la onda de choque (es decir, aguas arriba de la misma). Por tanto, los resultados obtenidos se relacionan en particular con ondas de choque que salen del borde de atrás, pero no con aquéllas que salen del borde delantero del cuerpo; esto último puede producirse, por ejemplo, en el flujo que rodea una cuña de ángulo muy agudo que se estudia con detalle en § 104. En este último caso el gas llega al vértice del ángulo desde el exterior, es decir, desde una región en la que no existe ninguna capa límite. Por lo tanto, resulta claro que los razonamientos presentes no niegan que puedan producirse ondas de choque que salgan del vértice de dicho ángulo.

‡ En § 40, problema, hemos determinado la menor variación de presión Δp en una distancia Δx que puede producir separación en una capa límite laminar. En la aplicación presente, nos interesa la variación de presión en una distancia del orden del espesor δ de la capa límite y se obtiene la ley siguiente que rige la disminución de Δp cuando aumenta el número de Reynolds:

$$\Delta p/p \sim 1/\mathrm{R}_x^{\frac{1}{2}} \sim 1/\mathrm{R}_\delta^{\frac{1}{2}}.$$

†† Los datos publicados existentes no nos permiten especificar la intensidad máxima permisible.

En el flujo subsónico puede producirse la separación únicamente cuando la presión en la corriente principal aumenta aguas abajo a lo largo de la superficie. Sin embargo, en el flujo supersónico se encuentra que puede producirse la separación, aun cuando la presión disminuya aguas abajo. Dicho fenómeno puede producirse por la combinación de una onda de choque débil con una separación, teniendo lugar en la onda de choque el aumento de presión necesario para la separación; la presión puede aumentar o bien disminuir aguas abajo en la región delante de la onda de choque.

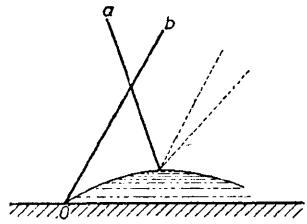

FIG. 87

Los datos existentes hasta el presente no nos permiten dar una descripción detallada de los fenómenos complejos que intervienen en la «reflexión» de una onda de choque procedente de la parte subsónica de una capa límite (o procedente de la región turbulenta más allá de la línea de separación). En estos fenómenos debe jugar una parte importante el hecho de que las perturbaciones debidas a la onda de choque puedan propagarse tanto aguas arriba como aguas abajo a través de la parte subsónica de la capa límite y pueden producir discontinuidades adicionales en ella. En particular, la formación de otra onda de choque débil aguas arriba puede dar como resultado la separación, que «desplace» una onda de choque fuerte incidente sobre la superficie desde el exterior. En la figura 87, la línea *a* es la onda de choque incidente, y la *b* la onda de choque formada aguas arriba que produce la separación en el punto *O*. Cuando el choque incidente se «refleja» a partir de la parte subsónica de la región turbulenta, es de esperar, en particular, que se forme una onda de rarefacción.

Todo el estudio anterior se relaciona únicamente con una intersección estacionaria, estando la onda de choque y el cuerpo en reposo relativo. Consideremos a continuación intersecciones no estacionarias cuando una onda de choque móvil está incidiendo sobre un cuerpo sólido, de modo que las líneas de intersección se mueven en la superficie. Dicha intersección está acompañada por la reflexión de la onda de choque: además de la onda incidente, se forma una onda reflejada que abandona el cuerpo.

Examinaremos el fenómeno en un sistema de coordenadas que se mueve con la línea de intersección; en este sistema las ondas de choque son esta-

cionarias. El tipo más sencillo de reflexión se produce cuando la onda reflejada abandona la propia línea de intersección; esto se denomina una reflexión *regular* (figura 88). Si se dan el ángulo de incidencia α_1 y la intensidad del choque incidente, el flujo en la región 2 está unívocamente determinado. La velocidad del gas en el choque reflejado debe girar formando un ángulo tal que resulte de nuevo paralela a la superficie. Cuando se da este ángulo, la posición e intensidad del choque reflejado se obtiene a partir de la ecuación de la polar del choque. En el caso de un ángulo dado la polar determina dos ondas de choque distintas, que son las correspondientes a las familias débil e intensa (§ 86). Los resultados experimentales muestran que, de hecho, el choque reflejado siempre pertenece a la familia débil y admitiremos esto en lo que sigue. Debe señalarse que, cuando la intensidad de la onda de choque incidente tiende a cero, la intensidad del choque reflejado tiende también a cero, y el ángulo de reflexión α_2 tiende al ángulo de incidencia α_1, como sería de esperar de acuerdo con la aproximación acústica. En el límite $\alpha_1 \to 0$, el choque reflejado de la familia débil pasa continuamente hacia el interior del choque obtenido cuando una onda de choque está incidiendo «frontalmente» (§ 93, problema 1).

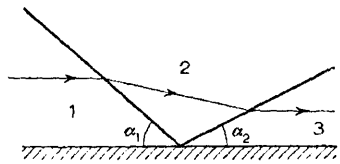

FIG. 88

Los cálculos matemáticos para la reflexión regular (en un gas perfecto) no ofrecen ninguna dificultad en principio, pero los detalles algebraicos son extremadamente laboriosos. Daremos aquí algunos de sus resultados.†

Es evidente, a partir de las propiedades generales de la polar del choque, que no es posible la reflexión regular en el caso de valores arbitrarios de los parámetros de la onda incidente (el ángulo de incidencia α_1 y el cociente p_2/p_1). Para un cociente dado p_2/p_1 existe un ángulo máximo posible α_{1k},‡ y cuando $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ es imposible la reflexión regular. Cuando $p_2/p_1 \to \infty$, el ángulo máxi-

† Una descripción más detallada de la reflexión de las ondas de choque viene dada por R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948, y por W. BLEAKNEY y A. H. TAUB, *Reviews of Modern Physics*, **21**, 584, 1949.

La solución de problemas complejos relativos a la reflexión regular de una onda de choque con incidencia casi normal en el vértice de un ángulo próximo a 180° y la difracción de una onda de choque con incidencia rasante en el vértice de un ángulo semejante, ha sido dada por M. J. LIGHTHILL (*Proceedings of the Royal Society*, **A198**, 454, 1949; **200**, 554, 1950).

‡ Este valor es el del ángulo de incidencia para el cual coinciden los choques reflejados débil e intenso.

mo tiende a arcsen $(1/\gamma)$ $(= 40°$ para el aire). Cuando $p_2/p_1 \to 1$, α_{1k} tiende hacia 90°, es decir, es posible la reflexión regular para cualquier ángulo de incidencia. La figura 89 muestra α_{1k} en función de p_1/p_2 en el caso del aire.

El ángulo de reflexión α_2 no es, en general, el mismo que el ángulo de incidencia. Existe un valor α_* del ángulo de incidencia tal que, si $\alpha_1 < \alpha_*$, el ángulo de reflexión $\alpha_2 < \alpha_1$; si $\alpha_1 > \alpha_*$, por otra parte, $\alpha_2 > \alpha_1$. El valor de α_* es 1/2 arcos $[(\gamma - 1)/2]$ $(= 39{,}2°$ para el aire); no depende de la intensidad de la onda incidente.

Cuando $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ es imposible la reflexión regular y la onda de choque incidente debe romperse a una distancia de la superficie, de modo que tenemos el esquema indicado en la figura 90, con tres ondas de choque y una discontinuidad tangencial que sale del punto en donde la onda de choque incidente se divide o ramifica.

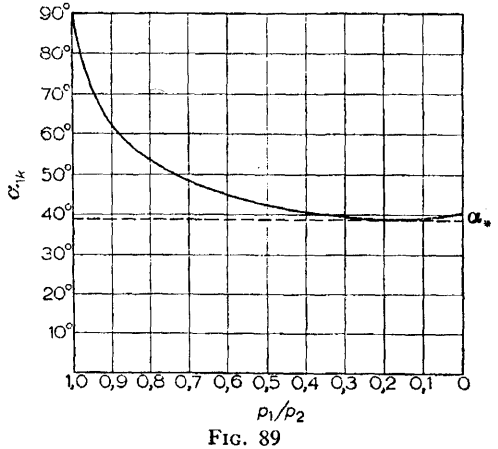

FIG. 89

§ 104. Flujo supersónico alrededor de un ángulo

Al estudiar el flujo cerca del vértice de un ángulo que existe en la superficie, es suficiente de nuevo considerar pequeñas porciones del vértice y suponer que el ángulo lo forman dos planos y que la arista es recta. Hablaremos de flujo exterior a un ángulo si el ángulo es mayor que π, y de flujo interior a un ángulo si es menor que π.

El flujo subsónico que rodea a un ángulo no es, en esencia, diferente del flujo de un fluido incompresible. Sin embargo, el flujo supersónico es totalmente distinto; una propiedad importante del mismo es la presencia de discontinuidades que salen del vértice del ángulo.

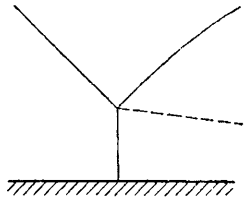

FIG. 90

Consideremos, en primer lugar, los esquemas de flujo posibles cuando una corriente de gas supersónico alcanza el vértice a lo largo de una de las caras del ángulo. De acuerdo con las propiedades generales del flujo supersónico, la corriente permanece uniforme hasta el vértice. Al desviarse la corriente hacia la dirección paralela al otro lado del ángulo se produce una onda de rarefacción que sale del vértice y el esquema de flujo se compone de tres regiones separadas por discontinuidades débiles (*Oa* y *Ob* en la figura 91): la corriente gaseosa uniforme que se mueve a lo largo del lado *AO* se convierte en una onda de rarefacción 2 y luego se mueve de nuevo con velocidad constante a lo largo del otro lado del ángulo. Debe señalarse que no se forma ninguna región turbulenta; por otra parte, en un flujo semejante de un fluido incompresible debe formarse una región turbulenta, con una línea de separación en el vértice del ángulo (figura 16, § 35).

Sea v_1 la velocidad de la corriente incidente (1 en la figura 91), y c_1 la velocidad del sonido en ella. La posición de la discontinuidad débil *Oa* se determina inmediatamente a partir del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$ por la condición de que corta las líneas de corriente en el ángulo de Mach. Las variaciones de velocidad y presión en la onda de rarefacción están determinadas por las fórmulas (101.12)-(101.15); todo lo que se necesita es la dirección a partir de la cual ha de medirse el ángulo ϕ en estas fórmulas. La línea recta $\phi = 0$ corresponde a $v = c = c_*$; para $M_1 > 1$ no existe de hecho tal línea, puesto que $v/c > 1$ en todos los puntos. Sin embargo, si imaginamos que la onda de rarefacción se extiende formalmente dentro de la región a la izquierda de *Oa*, podemos utilizar la fórmula (101.12), y hallaremos que la discontinuidad *Oa* debe corresponder a un valor de ϕ dado por

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

y que ϕ debe crecer desde *Oa* a *Ob*. La posición de la discontinuidad *Ob* está determinada por el hecho de que la dirección de la velocidad resulta paralela al lado *OB* del ángulo.

El ángulo a través del cual la corriente gira en la onda de rarefacción no puede superar al valor χ_{max} determinado en § 101, problema 2. Si el án-

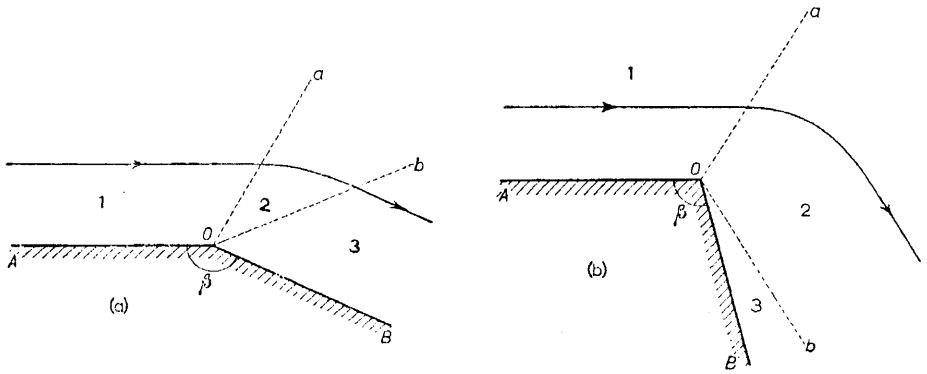

FIG. 91

gulo β alrededor del cual se produce el flujo es menor que $\pi - \chi_{max}$, la onda de rarefacción no puede hacer girar la corriente el ángulo necesario y tenemos el esquema de flujo indicado en la figura 91b. La rarefacción en la onda 2 procede entonces hasta alcanzar el valor cero de presión (alcanzada en la línea *Ob*), de modo que la onda de rarefacción se separa de la pared a través de una región vacía (región 3).

Sin embargo, el esquema de flujo descrito anteriormente no es el único posible. Las figuras 92 y 93 muestran esquemas en los que una región de gas en reposo está junto a la segunda cara del ángulo y a su vez esta región está separada del gas móvil por una discontinuidad tangencial; como es normal, ésta se transforma en región turbulenta, de modo que el caso considerado corresponde a la presencia de separación.† La rotación de la corriente en un cierto ángulo se opera en la onda de rarefacción (figura 92) o en la onda

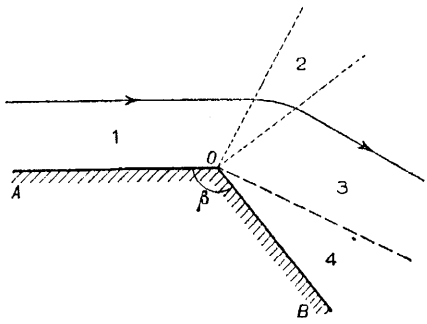

FIG. 92

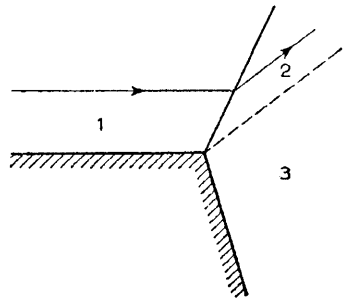

FIG. 93

† De acuerdo con los resultados experimentales, la compresibilidad del gas disminuye un poco el ángulo de la región turbulenta que se obtiene como resultado de la discontinuidad tangencial.

de choque (figura 93). Sin embargo, el último caso es posible únicamente si la onda de choque no es demasiado intensa (de acuerdo con las consideraciones generales dadas en § 103).

Las condiciones lejos del ángulo son las que determinan cuál de estos esquemas de flujo se producirá en un caso particular. Por ejemplo, cuando el gas fluye saliendo de una tobera (estando el vértice del ángulo en el borde de salida), la relación entre la presión p_1 del gas que sale y la presión p_e del medio externo tiene importancia. Si $p_e < p_1$, el flujo es del tipo indicado en la figura 92; la posición y ángulo de la onda de rarefacción están entonces determinados por la condición de que la presión en las regiones 3 y 4 es igual a p_e. Cuanto menor es p_e, mayor es el ángulo a través del cual debe hacerse girar la corriente. Sin embargo, si el ángulo β (figura 92) es grande, la presión del gas no puede alcanzar el valor requerido p_e; la dirección de la velocidad se hace paralela a la cara OB del ángulo antes de que la presión disminuya hasta p_e. El flujo, cerca de la cara exterior o de la salida, será entonces como se indica en la figura 90. La presión cerca de la cara exterior OB de la salida está totalmente determinado por el ángulo β y no depende de la presión p_e; la disminución final de la presión hasta p_e se produce sólo a una distancia determinada de la salida.

Si $p_e > p_1$, por otra parte, el flujo que rodea el borde de la salida es del tipo indicado en la figura 93, con una onda de choque que abandona el borde y eleva la presión desde p_1 hasta p_e. Sin embargo, esto es posible únicamente si la diferencia entre p_e y p_1 no es demasiado grande, es decir, si la onda de choque no es demasiado intensa; en otro caso existe una separación en la superficie interior de la tobera y la onda de choque se mueve dentro de la misma del modo descrito en § 90.

A continuación, consideremos el flujo en el interior de un ángulo. En el caso subsónico dicho flujo está acompañado por la separación en un punto más adelante del vértice (ver el final del § 40). Sin embargo, en el caso de un flujo incidente supersónico, la variación de dirección puede efectuarse por una onda de choque que abandona el vértice (figura 94). Aquí debemos mencionar de nuevo que dicho esquema de flujo sin separación es posible únicamente si la onda de choque no es demasiado intensa. Su intensidad aumenta con el ángulo χ, a través del cual se hace girar la corriente y, por

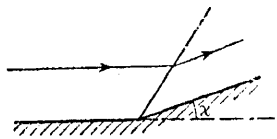

FIG. 94

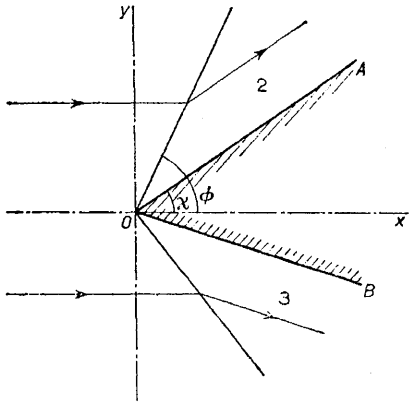

FIG. 95

tanto, podemos decir que el flujo sin separación es posible únicamente cuando χ no es demasiado grande.

Consideremos ahora el esquema de flujo que se obtiene como resultado en el caso de que una corriente supersónica libre incida sobre el vértice de un ángulo (figura 95). La corriente se hace girar en direcciones paralelas a las caras del ángulo por las ondas de choque que salen del vértice. Como se ha demostrado en § 103, éste es el caso excepcional en el que una onda de choque de intensidad arbitraria puede abandonar una superficie sólida.

Si conocemos las velocidades $\mathbf{v}_1$ y c_1 de la corriente incidente, podemos determinar las posiciones de las ondas de choque del flujo del gas en las regiones detrás de ella. La dirección de la velocidad $\mathbf{v}_2$ debe ser paralela a la cara OA: $v_{2y}/v_{2x} = \operatorname{tag} \chi$. Así pues, v_2 y el ángulo ϕ, que da la posición de la onda de choque, pueden determinarse inmediatamente a partir de la polar del choque utilizando una cuerda a través del origen con el ángulo conocido χ respecto al eje de abscisas (figura 50), como se explicó en § 86. Hemos visto que, para un valor de χ dado, la polar del choque da dos ondas de choque diferentes con valores distintos de ϕ. Uno de estos (correspondiente al punto B en la figura 50) es el más débil y, en general, abandona el flujo supersónico; el otro choque más intenso hace que el flujo se vuelva subsónico. En el caso presente de flujo que rodea un ángulo sobre una superficie sólida finita† debemos siempre tomar el primero, es decir, el choque débil. Deberá recordarse que esta selección se decide realmente por las condiciones del flujo lejos del ángulo. En el flujo que rodea un ángulo muy

† El problema puramente formal del flujo que rodea una cuña formada por la intersección de dos planos infinitos carece de interés físico.

agudo (χ pequeño), la onda de choque resultante debe, evidentemente, ser muy débil. Es natural suponer que cuando aumenta el ángulo, la intensidad del choque aumenta monótonamente; esto corresponde al movimiento a lo largo del arco QC de la polar del choque (figura 50), desde Q hacia C.

Hemos visto en § 86 que el ángulo a través del cual el vector velocidad se hace girar en una onda de choque no puede superar un valor determinado χ_{max}, que depende de M_1. El esquema de flujo descrito anteriormente es, por tanto, imposible si uno cualquiera de los lados del ángulo forma un ángulo mayor que χ_{max} con la dirección de la corriente incidente. En este caso el flujo gaseoso cerca de un ángulo debe ser subsónico; esto se consigue por la aparición de una onda de choque en algún punto delante del ángulo (ver § 114). Puesto que χ_{max} aumenta monótonamente con M_1, podemos decir también que para un valor dado del ángulo χ, M_1 para la corriente incidente debe ser mayor que un valor determinado $M_{1,min}$.

Finalmente, puede señalarse que, si los lados del ángulo se sitúan respecto a la corriente incidente, como se ve en la figura 96, entonces, como es natural, se forma una onda de choque en un lado solo del ángulo; la corriente se hace girar hacia el otro lado por una onda de rarefacción.

PROBLEMA

Determinar la posición e intensidad de la onda de choque en el flujo que rodea un ángulo muy pequeño ($\chi \ll 1$) para valores muy grandes de M_1 ($\gg 1/\chi$).

Solución. Para $\chi \ll 1$, la polar del choque da dos valores de ϕ, uno próximo a cero y el otro próximo a $\pi/2$. El choque débil que buscamos corresponde al primer valor, que es $(\gamma + 1)\chi/2$; ver § 86, problema 1. El cociente de presiones es, según (86.9), $p_2/p_1 = \gamma(\gamma + 1)M_1^2\chi^2/2$. El valor de M detrás del choque es

$$M_2 = \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}},$$

es decir, es todavía grande en comparación con la unidad, pero no suficientemente grande en comparación con $1/\chi$.

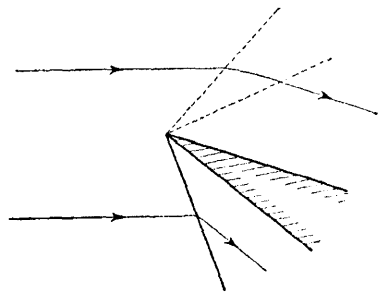

FIG. 96

§ 105. Flujo que rodea un obstáculo cónico

El problema del flujo supersónico estacionario cerca de una proyección puntiaguda situada sobre la superficie de un cuerpo es un problema tridimensional y es mucho más complicado que el flujo que rodea un ángulo diedro con una arista de intersección. Todavía no se ha realizado un estudio completo y general del primer problema. El único problema totalmente resuelto es el de un flujo con simetría axial que rodea a un saliente puntiagudo, y este es el caso que consideraremos.

Cerca de su vértice, una punta con simetría axial puede considerarse como un cono recto de sección recta circular y así el problema se reduce a analizar el flujo de una corriente uniforme que rodea un cono cuyo eje tiene la dirección del flujo incidente. El esquema del flujo es cualitativamente como sigue.

Como en el problema análogo del flujo que rodea un ángulo bidimensional debe formarse una onda de choque (A. BUSEMANN, 1929), y resulta evidente a partir de la simetría que este choque es una superficie cónica coaxial con el cono y poseyendo el mismo vértice (la figura 97 muestra el corte del cono por un plano que pasa por su vértice). Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el caso bidimensional, la onda de choque no desvía la velocidad del gas a través del ángulo completo χ necesario para que el gas fluya a lo largo de la superficie del cono (siendo 2χ el ángulo del vértice del cono). Después de pasar a través de la superficie de discontinuidad, las líneas de corriente se curvan y tienden asintóticamente a las generatrices del cono.

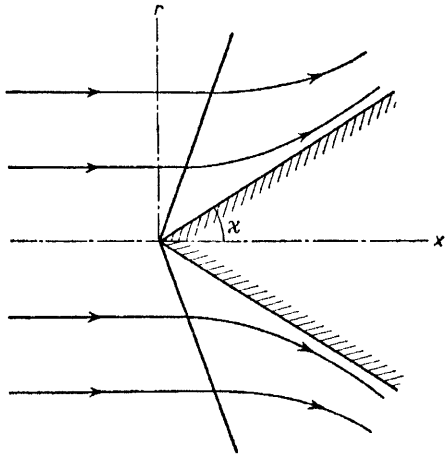

FIG. 97

Esta curvatura está acompañada por un aumento continuo de la densidad (además del incremento que se produce en el propio choque) y por la correspondiente disminución de la velocidad. Inmediatamente detrás de la onda de choque, la velocidad sigue siendo, en general, supersónica (como en el caso bidimensional, está determinada por la parte «supersónica» de la polar del choque), pero en la superficie del cono puede resultar subsónica. Como en el caso bidimensional, por cada valor del número de Mach $M_1 = v_1/c_1$ correspondiente a la corriente incidente, existe un valor límite χ_{max} para el ángulo del cono, por encima del cual resulta imposible este tipo de flujo.

La onda de choque cortará a todas las líneas de corriente del flujo incidente con el mismo ángulo y, por tanto, tiene intensidad constante. De aquí resulta (ver § 106) que también habrá un flujo isoentrópico detrás de la onda de choque.

A partir de la simetría del problema y de sus propiedades de semejanza (no existen longitudes constantes características en las condiciones impuestas), es evidente que la distribución de todas las magnitudes (velocidad, presión) del flujo detrás de la onda de choque dependerá únicamente del ángulo θ que el radio vector, que va desde el vértice del cono hasta el punto considerado, forma con el eje del cono (el eje x en la figura 97). De acuerdo con ello, las ecuaciones del movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias; se determinan las condiciones límites correspondientes a estas ecuaciones en la onda de choque mediante la ecuación de la polar del choque, mientras que las correspondientes a la superficie del cono consisten en que la velocidad deberá ser paralela a las generatrices. Sin embargo, estas ecuaciones no pueden integrarse analíticamente y han de resolverse numéricamente. Referimos al lector a otros autores† para los resultados de los cálculos, mientras que ahora daremos simplemente la curva (figura 51, § 86) que muestra el ángulo máximo posible χ_{max} en función de M_1. Podemos mencionar también que, cuando $M_1 \to 1$, el ángulo χ_{max} tiende a cero:

$$\chi_{max} = \text{constante} \times \sqrt{[(M_1 - 1)/(\gamma + 1)]}, \qquad (105.1)$$

como puede deducirse a partir de la ley general de la semejanza transónica (118.11); la constante es independiente, tanto de M_1 como del gas considerado.

Sólo es posible una solución analítica del problema del flujo que rodea a un cono en el límite de ángulos de vértices pequeños. Es evidente que en este caso la velocidad del gas en todo punto difiere grandemente de la velocidad v_1 de la corriente incidente. Designando por v a la pequeña diferencia existente entre la velocidad del gas en el punto considerado y v_1, y utilizando su potencial ϕ, podemos aplicar la ecuación linealizada (106.4); si

† Por ejemplo, N. E. KOCHIN, I. A. KIBEL' y N. V. ROZE, *Theoretical Hydromechanics (Teoreticheskaya gidromekhanika)*, parte 2, 3.ª ed., p. 193, Moscow, 1948; L. HOWARTH, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, vol. 1, cap. 5, Oxford, 1953.

tomamos coordenadas cilíndricas x, r, ω con el eje polar a lo largo del eje del cono (siendo ω el ángulo polar), esta ecuación se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\omega^2}-\beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \tag{105.2}$$

o, en el caso de una solución con simetría axial,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \tag{105.3}$$

en donde

$$\beta=\sqrt{(v_1^2/c_1^2-1)}. \tag{105.4}$$

Con objeto de que la distribución de velocidades sea sólo una función de θ, el potencial debe ser de la forma $\phi = xf(\xi)$, siendo $\xi = r/x = \operatorname{tg}\theta$. Sustituyendo, obtenemos para la función $f(\xi)$ la ecuación

$$\xi(1-\beta^2\xi^2)f''+f'=0,$$

cuya solución es elemental. La solución trivial $f =$ constante corresponde a un flujo uniforme; la otra solución es

$$f = \text{constante}\ \times[\sqrt{(1-\beta^2\xi^2)}-\operatorname{arcosh}(1/\beta\xi)].$$

La condición límite en la superficie del cono (es decir, para $\xi = \operatorname{tg}\chi \approx \chi$) es

$$v_r/(v_1+v_x)\approx(1/v_1)\,\partial\phi/\partial r=\chi \tag{105.5}$$

o sea, $f' = v_1\chi$. De aquí que la constante sea $v_1\chi^2$, y así tenemos la expresión siguiente para el potencial en la región $x > \beta r$:†

$$\phi=v_1\chi^2[\sqrt{(x^2-\beta^2r^2)}-x\operatorname{arcosh}(x/\beta r)]. \tag{105.6}$$

Debe señalarse que ϕ tiene una singularidad logarítmica para $r\to 0$.

A continuación podemos hallar las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned} v_x &= -v_1\chi^2\operatorname{arcosh}(x/\beta r),\\ v_r &= (v_1\chi^2/r)\sqrt{(x^2-\beta^2r^2)}. \end{aligned} \tag{105.7}$$

La presión en la superficie del cono se calcula con la fórmula (106.5); puesto que ϕ tiene una singularidad logarítmica para $r\to 0$, la velocidad v_r en la superficie del cono (es decir, para r pequeño) es grande en comparación con v_x y, por tanto, sólo necesitamos retener el término en v_r^2 en la fórmula correspondiente a la presión. El resultado es

$$p-p_1=\rho_1v_1^2\chi^2[\log(2/\beta\chi)-\tfrac{1}{2}]. \tag{105.8}$$

† En esta aproximación el cono $x = \beta r$ es una superficie de discontinuidad débil.

Todas estas fórmulas, que se han deducido mediante una teoría linealizada, dejan de ser válidas para M_1 grande, comparable con $1/\chi$ (ver § 119).

El flujo que rodea un cono de sección recta arbitraria (no siendo necesariamente nulo el ángulo de ataque) es un flujo de semejanza, como el flujo simétrico que rodea un cono circular. No tiene parámetros de longitud característicos, y por ello la distribución de velocidades sólo puede ser una función de los cocientes y/x, z/x de las coordenadas, es decir, es constante a lo largo de cualquier recta que pase por el origen (el vértice del cono). Dichos flujos de semejanza se denominan flujos *cónicos*.†

PROBLEMA

Determinar el flujo que rodea un cono de ángulo en el vértice 2χ pequeño colocado con un pequeño ángulo de ataque α (C. FERRARI, 1937).‡

Solución. Tomemos el eje del cono (y no la dirección de la corriente principal) como eje x; la ecuación linearizada (105.2) para el potencial resulta invariable si se desprecian magnitudes de orden superior ($\sim \alpha\phi$), y el potencial determina la velocidad del gas como $\mathbf{v}_1 + \mathbf{grad}\ \phi$. La condición límite en la superficie del cono es

$$\frac{v_1 \operatorname{sen}\alpha \cos\omega + v_r}{v_1 \cos\alpha + v_x} \approx \alpha\cos\omega + \frac{1}{v_1}\frac{\partial\phi}{\partial r} \approx \chi.$$

Busquemos ϕ en forma de una suma:

$$\phi = \phi^{(1)}(x,r) + \cos\omega \cdot \phi^{(2)}(x,r), \tag{1}$$

en donde $\phi^{(1)}$ es la expresión (105.6) y $\phi^{(2)}$ satisface la condición límite $\partial\phi^{(2)}/\partial r = -v_1\alpha$. La función $\phi^{(2)}$ puede escribirse como $rf(r/x)$, y, sustituyendo $rf\cos\omega$ en la ecuación (105.2), obtenemos para f la ecuación

$$\xi f''(\beta^2\xi^2 - 1) + f'(2\beta^2\xi^2 - 3) = 0.$$

La solución trivial f = constante corresponde a una corriente incidente uniforme (con velocidad $v_1\alpha$) en una dirección perpendicular al eje del cono; la otra solución conduce a

$$\phi^{(2)} = v_1\beta\chi^2\alpha[(x/\beta r)\sqrt{(x^2 - \beta^2r^2)} - \beta r \operatorname{arcosh}(x/\beta r)].$$

La velocidad del gas es $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$, en donde $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{grad}\ \phi^{(2)}$ y $\mathbf{v}^{(1)}$ viene dada por la fórmula (105.7). La presión se calcula mediante la fórmula

$$p - p_1 = -\tfrac{1}{2}\rho_1\{(v_1\cos\alpha + \partial\phi/\partial x)^2 + (v_1\operatorname{sen}\alpha\cos\omega + \partial\phi/r\,\partial\omega)^2 + (-v_1\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega + \partial\phi/r\,\partial\omega)^2 - v_1^2\}$$

en donde deben retenerse los términos de segundo orden en α y χ. La presión en la superficie del cono resulta que viene dada por

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2\{\chi^2\log(2/\beta\chi) - \tfrac{1}{2}(\chi^2 + \alpha^2) - 2a\chi\cos\omega + \alpha^2\cos 2\omega\}.$$

† Una descripción detallada de los diversos problemas que afectan a estos flujos viene dada en E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics (Compressible Flow)*, Pergamon Press, London, 1958.

‡ La solución del mismo problema en el caso de un sólido de revolución delgado cualquiera viene dado en F. I. FRANKL' y E. A. KARPOVICH, *Gas Dynamics of Thin Bodies*, § 2-7, Interscience, New York, 1953.

CAPÍTULO XII

FLUJO GASEOSO BIDIMENSIONAL

§ 106. Flujo potencial de un gas

A continuación nos enfrentaremos con otros muchos casos importantes en donde el flujo de un gas puede considerarse como flujo potencial en casi todas partes. Ahora deduciremos las ecuaciones generales del flujo potencial y estudiaremos la cuestión de su validez.

Después de pasar a través de una onda de choque, el flujo potencial de un gas normalmente se transforma en flujo rotacional. Sin embargo, una excepción la constituyen aquellos casos en donde un flujo potencial pasa a través de una onda de choque, cuya intensidad es constante en toda su área; por ejemplo, sucede así cuando una corriente uniforme pasa a través de una onda de choque cortando a todas las líneas de corriente con un mismo ángulo.† El flujo detrás de la onda de choque es entonces también flujo potencial. Para demostrar esto utilizaremos la ecuación de Euler en la forma

$$\tfrac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,v^2 - \mathbf{v}\times\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p$$

[ver (2.10)], o sea

$$\mathbf{grad}(w+\tfrac{1}{2}v^2) - \mathbf{v}\times\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = T\,\mathbf{grad}\,s,$$

donde hemos utilizado la identidad termodinámica $\mathrm{d}w = T\mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\rho$. Sin embargo, en el flujo potencial, $w + v^2/2 =$ constante delante de la onda de choque, y esta magnitud es continua en el choque; por tanto, es constante en todas partes detrás de la onda de choque, de modo que

$$\mathbf{v}\times\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -T\,\mathbf{grad}\,s. \tag{106.1}$$

El flujo potencial delante de la onda de choque es isoentrópico. En el caso general de una onda de choque arbitraria, para la cual la discontinuidad de la entropía varía en su superficie, $\mathbf{grad}\,s \neq 0$ en la región detrás del choque y, por tanto, **rot v** es también no nulo. Sin embargo, si la onda de choque es de intensidad constante, entonces la discontinuidad de entropía

† Ya nos hemos encontrado con este caso en conexión con el flujo supersónico que rodea una cuña o cono (§§ 104, 105).

en ella es constante y el flujo detrás de la misma es también isoentrópico, es decir, **grad** $s = 0$. De aquí se deduce que o bien **rot v** $= 0$, o bien los vectores **v** y **rot v** son paralelos en todos los puntos. Sin embargo, esto último es imposible; en la onda de choque **v** siempre tiene una componente normal no nula, pero la componente normal de **rot v** es siempre cero (puesto que viene dada por las derivadas tangenciales de las componentes de velocidad tangencial, que son continuas).

Otro caso importante en donde el flujo potencial se mantiene, a pesar de la onda de choque, es en el caso de un choque débil. Hemos visto (§ 83) que en dicha onda de choque la discontinuidad de la entropía es del tercer orden respecto a la discontinuidad de la presión o de la velocidad. Por tanto, vemos a partir de (106.1) que **rot v** detrás del choque es también del tercer orden. Esto nos permite admitir que tenemos flujo potencial detrás de la onda de choque, siendo el error de un orden superior.

Deduciremos a continuación la ecuación general para el potencial de velocidades en un flujo potencial estacionario arbitrario de un gas. Para ello eliminaremos la densidad en la ecuación de continuidad $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \equiv \rho \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\rho = 0$, utilizando la ecuación de Euler

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p = -(c^2/\rho)\mathbf{grad}\,\rho$$

y obteniendo así

$$c^2 \operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = 0.$$

Introduciendo el potencial de velocidad mediante $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\,\phi$ y desarrollando en sus componentes, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}+(c^2-\phi_z^2)\phi_{zz}-\\ -2(\phi_x\phi_y\phi_{xy}+\phi_y\phi_z\phi_{yz}+\phi_z\phi_x\phi_{zx}) = 0,\end{aligned} \tag{106.2}$$

en donde los sufijos designan aquí las derivadas parciales. En particular, en el caso de un flujo bidimensional tenemos

$$(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}-2\phi_x\phi_y\phi_{xy} = 0. \tag{106.3}$$

En estas ecuaciones la propia velocidad del sonido debe expresarse en función de la velocidad; esto puede, en principio, hacerse mediante la ecuación de Bernoulli, $w + v^2/2 =$ constante, y la ecuación de la isoentrópica, $s =$ constante. En el caso de un gas perfecto, c en función de v viene dada por la fórmula (80.18).

La ecuación (106.2) se simplifica mucho si en todos los puntos la velocidad del gas no difiere apreciablemente en valor o dirección de la correspondiente a la corriente incidente procedente del infinito.† Esto implica que las ondas de choque (si existen) son débiles, y en este caso el flujo potencial no se ve destruido.

† Un caso como éste se estudió en § 105 (flujo que rodea un cono estrecho), y se encontrarán otros en conexión con el flujo gaseoso que rodea cuerpos delgados de forma arbitraria.

Como en los casos semejantes vistos anteriormente, designaremos por $\mathbf{v}$ la diferencia pequeña existente entre la velocidad del gas en un punto dado y la correspondiente a la corriente principal. Designando esta última por $\mathbf{v}_1$ podemos escribir la velocidad total como $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}$. El potencial ϕ se toma de modo que corresponda al potencial de la velocidad $\mathbf{v}$: $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \phi$. La ecuación para este potencial se obtiene a partir de (106.2) sustituyendo $\phi \to \phi + xv_1$; tomaremos el eje x en la dirección del vector $\mathbf{v}_1$. Entonces consideraremos a ϕ como una magnitud pequeña y omitiremos todos los términos de orden superior al primero, obteniendo la siguiente ecuación lineal:

$$(1-\mathrm{M}_1^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0, \tag{106.4}$$

en donde $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$; como es natural, la velocidad del sonido viene dada por su valor en el infinito.

La presión en un punto cualquiera está determinada en función de la velocidad con la misma aproximación por una fórmula que puede obtenerse del modo siguiente. Consideraremos p en función de w (para una s dada), y utilizaremos el hecho de que $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, escribiendo $p - p_1 \approx \approx (\partial p/\partial w)_s(w - w_1) = \rho_1(w - w_1)$. A partir de la ecuación de Bernoulli tenemos

$$w-w_1 = -\tfrac{1}{2}[(\mathbf{v}_1+\mathbf{v})^2-\mathbf{v}_1^2] \approx -\tfrac{1}{2}(v_y^2+v_z^2)-v_1v_x,$$

de modo que

$$p-p_1 = -\rho_1v_1v_x-\tfrac{1}{2}\rho_1(v_y^2+v_z^2). \tag{106.5}$$

En esta expresión el término correspondiente a la velocidad transversal al cuadrado debe conservarse en general, puesto que en la región próxima al eje x (y, en particular, en la propia superficie del cuerpo), las derivadas $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ pueden ser grandes en comparación con $\partial\phi/\partial x$.

Sin embargo, la ecuación (106.4) no es válida si el número M_1 es muy próximo a la unidad (flujo *transónico*), de modo que el coeficiente del primer término es pequeño. Es evidente que en este caso deben mantenerse los términos de orden superior en las derivadas de ϕ respecto a x. Para deducir la ecuación correspondiente volvamos a la ecuación original (106.2); cuando se desprecian los términos que son ciertamente pequeños, esta ecuación se transforma en

$$\left(1-\frac{\phi_x^2}{c^2}\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0. \tag{106.6}$$

En el caso presente, la velocidad $v_x \cong v$, y la velocidad del sonido c está próxima a la velocidad crítica c_* (designando ahora con $\mathbf{v}$ a la velocidad total). Por tanto, podemos poner $c - c_* = (v - c_*)(\mathrm{d}c/\mathrm{d}v)_{v=c_*}$, o sea, $c - v = (c_* - v)[1 - (\mathrm{d}c/\mathrm{d}v)_{v=c_*}]$. Utilizando el hecho de que para $v = c = c_*$,

tenemos por (80.4) que $d\rho/dv = -\rho/c$, podemos escribir (para $v = c_*$)

$$\frac{dc}{dv} = \frac{dc}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho},$$

de modo que

$$c - v = [(c_* - v)/c]d(\rho c)/d\rho = \alpha_*(c_* - v). \tag{106.7}$$

Hemos utilizado aquí la expresión (92.9) para la derivada $d(\rho c)/d\rho$, mientras que α_* designa el valor de α (95.2) para $v = c_*$; en el caso de un gas perfecto, α es constante, de modo que $\alpha_* = \alpha = (\gamma + 1)/2$. Con la misma exactitud esta ecuación puede escribirse como

$$v/c - 1 = \alpha_*(v/c_* - 1). \tag{106.8}$$

Esta ecuación expresa la relación general existente entre los números de Mach M y M_* en el flujo transónico.

Utilizando esta fórmula, podemos escribir

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 2\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\alpha_*\left(1 - \frac{v}{c_*}\right).$$

Finalmente, introduzcamos un nuevo potencial mediante la sustitución $\phi \to c_*(x + \phi)$, de modo que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{v_x}{c_*} - 1, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{v_y}{c_*}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{v_z}{c_*}. \tag{106.9}$$

Sustituyendo estas fórmulas en (106.6), obtenemos la siguiente ecuación final para el potencial de velocidades en un flujo transónico (siendo la velocidad en todo punto casi paralela al eje x):

$$2\alpha_*\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{106.10}$$

Las propiedades del gas aparecen aquí sólo a través de la constante α_*. Veremos posteriormente que esta constante rige la dependencia completa de las propiedades del flujo transónico respecto a la naturaleza del gas.

La ecuación linealizada (106.4) resulta inválida también en el caso límite de valores muy grandes de M_1: sin embargo, la aparición de ondas de choque intensas tiene como resultado el hecho de que el flujo potencial no puede realmente producirse para dichos valores de M_1 (ver § 119).

§ 107. Ondas simples estacionarias

Determinemos la forma general de aquellas soluciones de las ecuaciones del flujo gaseoso supersónico bidimensional estacionario que describen los flujos en los que existe una corriente plana paralela uniforme en el infinito,

que luego gira o se desvía a través de cierto ángulo cuando se mueve rodeando un perfil curvado. Ya hemos visto un caso particular de dicha solución al estudiar el flujo próximo a un ángulo; el flujo considerado era esencialmente plano, paralelo a lo largo de un lado del ángulo, y luego giraba en el vértice del mismo. En esta solución particular todas las magnitudes (las dos componentes de velocidad, la presión y la densidad) eran funciones de una sola variable, el ángulo ϕ. Por tanto, cada una de estas magnitudes podrían expresarse en función de cualquier otra. Puesto que esta solución debe ser un caso particular de la solución general buscada, es natural buscar esta última con la hipótesis de que cada una de las magnitudes p, ρ, v_x, v_y (considerándose el plano del movimiento como plano xy), puede expresarse en función unas de otras. Esta hipótesis es, como es natural, una restricción muy considerable sobre la solución de las ecuaciones del movimiento, y la solución así obtenida no es la integral general de aquellas ecuaciones. En el caso general, cada una de las magnitudes p, ρ, v_x, v_y, que son funciones de las dos coordenadas x, y, pueden expresarse en función de dos cualesquiera de ellas.

Como tenemos una corriente uniforme en el infinito, en la que todas las magnitudes, y en particular la entropía s, son constantes, y puesto que en el flujo estacionario de un fluido ideal la entropía es constante a lo largo de las líneas de corriente, es evidente que s = constante en todo el espacio si no existe una onda de choque en el gas, como admitiremos.

Las ecuaciones de Euler y la ecuación de continuidad son

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0.$$

Escribiendo las derivadas parciales en forma de jacobianos, podemos convertir estas ecuaciones en la forma

$$v_x\frac{\partial(v_x,y)}{\partial(x,y)}-v_y\frac{\partial(v_x,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,y)}{\partial(x,y)},$$

$$v_x\frac{\partial(v_y,y)}{\partial(x,y)}-v_y\frac{\partial(v_y,x)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,x)}{\partial(x,y)};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x,y)}{\partial(x,y)}-\frac{\partial(\rho v_y,x)}{\partial(x,y)}=0.$$

Tomemos ahora (por ejemplo) x y p como variables independientes. Con objeto de efectuar esta transformación necesitamos únicamente multiplicar las

ecuaciones anteriores por $\partial(x, y)/\partial(x, p)$, obteniendo las mismas ecuaciones, excepto que $\partial(x, p)$ sustituye a $\partial(x, y)$ en el denominador de cada jacobiano. A continuación desarrollaremos los jacobianos, recordando que todas las magnitudes ρ, v_x, v_y se suponen que son funciones de p pero no de x, de modo que su derivada parcial respecto a x es nula. Entonces se obtiene

$$\left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{d\rho}{dp} + \rho\left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_x}{dp}\right) = 0.$$

Aquí $\partial y/\partial x$ designa $(\partial y/\partial x)_p$. Todas las magnitudes en estas ecuaciones, excepto $\partial y/\partial x$, son funciones de p únicamente, por hipótesis, y x no aparece explícitamente. Por tanto, podemos concluir, en primer lugar, que $\partial y/\partial x$ también es una función de p únicamente: $(\partial y/\partial x)_p = f_1(p)$, de aquí

$$y = xf_1(p) + f_2(p), \tag{107.1}$$

siendo $f_2(p)$ una función arbitraria de la presión.

No es necesario ningún cálculo adicional más si utilizamos la solución particular, ya conocida, para una onda de rarefacción en el flujo que rodea un ángulo (§§ 101, 104). Se recordará que en esta solución todas las magnitudes (incluyendo la presión) son constantes a lo largo de cualquier recta (característica) que pasa por el vértice del ángulo. Esta solución particular evidentemente corresponde al caso en donde la función arbitraria $f_2(p)$ en la expresión general (107.1) es idénticamente nula. La función $f_1(p)$ está determinada por las fórmulas obtenidas en § 101.

La ecuación (107.1) para diversos valores de p constante dan una familia de líneas rectas en el plano xy. Estas líneas cortan a las líneas de corriente en todo punto formando el ángulo de Mach. Esto se ve inmediatamente a partir del hecho de que las líneas $y = xf_1(p)$ en la solución particular con $f_2 \equiv 0$ tienen esta propiedad. Así pues, una de las familias de características (aquellas que salen de la superficie del cuerpo) se componen en el caso general de líneas rectas, a lo largo de las cuales todas las magnitudes permanecen constantes; sin embargo, estas líneas no son concurrentes.

Las propiedades del flujo descrito anteriormente son matemáticamente análogas a las de las ondas simples monodimensionales, en las que una familia de características es una familia de líneas rectas en el plano xt (ver §§ 94, 96, 97). De aquí que la clase de flujo en consideración ocupe el mismo lugar en la teoría del flujo bidimensional estacionario (supersónico) que las ondas simples en el flujo monodimensional no estacionario. Para tener en cuenta esta analogía, dichos flujos se denominan también *ondas simples*; en particular, la onda de rarefacción que corresponde al caso $f_2 \equiv 0$ se denomina una *onda simple centrada.*

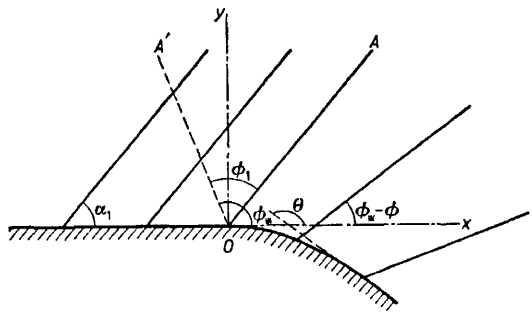

FIG. 98

Como en el caso no estacionario, una de las propiedades más importantes de las ondas simples estacionarias es que el flujo en cualquier región del plano xy, limitado por una región de flujo uniforme, es una onda simple (comparar § 97).

A continuación mostraremos cómo puede construirse una onda simple correspondiente al flujo alrededeor de un perfil dado. La figura 98 muestra el perfil en cuestión; a la izquierda del punto O es recto, pero a la derecha empieza a curvarse. En el flujo supersónico el efecto de la curvatura, como es natural, se propaga sólo aguas abajo de la característica OA que sale del punto O. De aquí que el flujo a la izquierda de esta característica sea uniforme; designaremos mediante el sufijo 1 las magnitudes que pertenecen a esta región. Todas las características en la misma son paralelas y forman un ángulo con el eje x, que es igual al ángulo de Mach $\alpha_1 = \operatorname{arcsen}(c_1/v_1)$.

En las fórmulas (101.12)-(101.15), el ángulo ϕ de las características se mide a partir de la línea sobre la cual $v = c = c_*$. Esto significa (comparar § 104) que la característica OA debe tener un valor de ϕ dado por

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

y el ángulo ϕ ha de medirse a partir de OA' (figura 98). El ángulo entre las características y el eje x es entonces $\phi_* - \phi$, en donde $\phi_* = \alpha_1 + \phi_1$. De acuerdo con las fórmulas (101.12)-(101.15), la velocidad y la presión vienen dadas en función de ϕ por

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\operatorname{sen}\theta, \tag{107.2}$$

$$v^2 = c_*{}^2\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\operatorname{sen}^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right], \tag{107.3}$$

$$\theta = \phi_* - \phi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\cot\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right), \tag{107.4}$$

$$p = p_* \cos^{2\gamma/(\gamma-1)} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi. \tag{107.5}$$

La ecuación de las características puede escribirse

$$y = x \operatorname{tg} (\phi_* - \phi) + F(\phi). \tag{107.6}$$

La función arbitraria $F(\phi)$ se determina del modo siguiente cuando se da la forma del perfil. Sea esta última $Y = Y(X)$, en donde X e Y son las coordenadas de los puntos sobre la misma. En la superficie, la velocidad del gas es tangencial, es decir,

$$\operatorname{tg} \theta = dY/dX. \tag{107.7}$$

La ecuación de la línea que pasa por el punto (X, Y) formando un ángulo $\phi_* - \phi$ con el eje x es

$$y - Y = (x - X) \operatorname{tg} (\phi_* - \phi).$$

Esta ecuación es la misma que (107.6) si ponemos

$$F(\phi) = Y - X \operatorname{tg} (\phi_* - \phi). \tag{107.8}$$

Partiendo de la ecuación dada $Y = Y(X)$ y de la ecuación (107.7), expresaremos la forma del perfil en ecuaciones paramétricas $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, siendo el parámetro la inclinación θ de la tangente. Sustituyendo θ en función de ϕ a partir de (107.4), obtenemos X e Y como funciones de ϕ; finalmente, sustituyendo estas expresiones en (107.8), obtenemos la función buscada $F(\phi)$.

En el flujo que rodea una superficie convexa, el ángulo θ entre el vector velocidad y el eje x disminuye aguas abajo (figura 98), y el ángulo $\phi_* - \phi$ entre la característica y el eje x disminuye también monótonamente (siempre entendemos que estamos hablando de la característica que sale de la superficie). Por esta razón las características no se cortan (en la región del flujo). Así pues, en la región aguas abajo de la característica OA (que es una discontinuidad débil), tenemos un flujo continuo y de rarefacción progresiva.

La situación es diferente en el flujo que rodea un perfil cóncavo. En este caso la inclinación θ de la tangente aumenta aguas abajo y, por tanto, lo mismo ocurre con la inclinación de la característica. En consecuencia, las características se cortan en la región de flujo. Sin embargo, en el caso de características diferentes no paralelas, todas las magnitudes (velocidad, presión, etc.) tienen valores diferentes. Así pues, todas estas magnitudes se convierten en multiformes en los puntos en donde se cortan las características, lo cual es físicamente imposible. Ya nos hemos encontrado con un fenómeno semejante en conexión con una onda de compresión simple monodimensional no estacionaria (§ 94). Como en este caso, ello significa que, en realidad,

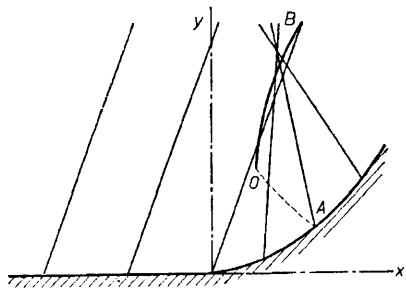

FIG. 99

se forma una onda de choque. La posición de la discontinuidad no puede determinarse completamente a partir de las soluciones que estamos considerando, puesto que se dedujo en la hipótesis de que no existían discontinuidades. El único resultado que puede obtenerse es el lugar donde empieza la onda de choque (el punto O en la figura 99, en donde se muestra el choque en forma de una línea continua OB). Dicho punto es el de intersección de las características cuya línea de corriente está más próxima a la superficie del cuerpo. En el caso de líneas de corriente que pasan por debajo de O (es decir, más próximas a la superficie) la solución es en todo punto uniforme; su comportamiento multiforme «empieza» en O. Las ecuaciones correspondientes a las coordenadas (x_0, y_0) de este punto pueden obtenerse del mismo modo que las ecuaciones correspondientes que determinan el tiempo y lugar de formación de la discontinuidad en una onda simple no estacionaria monodimensional. Si consideramos la inclinación de las características de una función de las coordenadas (x, y) de los puntos a través de los cuales pasan, entonces esta función resulta multiforme cuando x e y superan ciertos valores x_0, y_0. En § 94 la situación fue la misma en relación con la función $v(x, t)$, y así no necesitamos repetir los razonamientos utilizados allí, pero podemos escribir a continuación inmediatamente las ecuaciones

$$(\partial y/\partial\phi)_x = 0, \qquad (\partial^2 y/\partial\phi^2)_x = 0, \tag{107.9}$$

que determinan ahora el lugar de formación de la onda de choque. Matemáticamente se obtiene un punto angular de la envolvente de la familia de las características rectilíneas (ver § 96).

Por lo que se refiere al dominio de existencia de la onda simple, cuando se trata de un flujo en un perfil cóncavo, se extiende a lo largo de las líneas de corriente que pasan por encima del punto O hasta el lugar de intersección de estas líneas con la onda de choque. Las líneas de corriente que pasan por debajo de O no cortan la onda de choque en absoluto, pero a partir de ello no se puede obtener la conclusión de que la solución en cuestión sea válida en todos los puntos de esta línea de corriente. La razón es que la

onda de choque tiene un efecto perturbador incluso sobre el gas que fluye a lo largo de esta línea de corriente, y así altera el flujo que existiría en ausencia de la onda de choque. Sin embargo, por una propiedad del flujo supersónico, estas perturbaciones alcanzan únicamente al gas aguas abajo de la característica *OA* (de la segunda familia) que salen del punto en donde empieza la onda de choque. Así pues, la solución que estamos considerando es válida en todas partes a la izquierda de *AOB*. La propia línea *OA* es una discontinuidad débil. Vemos que no puede existir una onda de compresión simple continua (ausencia de onda de choque) en ningún punto del flujo que rodea la superficie cóncava que correspondería a la onda de rarefacción simple en el flujo que rodea una superficie convexa.

La onda de choque formada en el flujo que rodea un perfil cóncavo es un ejemplo de choque que «empieza» en un punto del interior de la corriente lejos de las paredes macizas o sólidas. En el punto en donde el choque empieza tiene ciertas propiedades generales que pueden señalarse aquí. En el propio punto la intensidad de la onda de choque es cero y cerca del punto es pequeña. Sin embargo, en una onda de choque débil las discontinuidades de entropía y de vorticidad son del tercer orden de magnitud y así la variación en el flujo al pasar a través del choque difiere de una variación isoentrópica de potencial continuo únicamente por magnitudes del tercer orden. De aquí se deduce que en las discontinuidades débiles que parten del punto en donde empieza la onda de choque, sólo pueden ser discontinuas las terceras derivadas de las diversas magnitudes. En general, existirán dos de estas discontinuidades: una discontinuidad débil que coincide con la característica y una discontinuidad tangencial débil que coincide con la línea de corriente (ver el final del § 89).

§ 108. Ecuación de Chaplygin: el problema general del flujo gaseoso bidimensional estacionario

Habiendo ya considerado las ondas simples estacionarias, estudiemos ahora el problema general de un flujo potencial plano estacionario pero arbitrario. Admitiremos que el flujo es isoentrópico y que no contiene ondas de choque.

Como fue demostrado en primer lugar por S. A. CHAPLYGIN en 1902, es posible reducir este problema a la resolución de una ecuación en derivadas parciales y lineales sencillas. Esto se obtiene mediante una transformación a unas nuevas variables independientes, las componentes de velocidad v_x, v_y; esta transformación suele denominarse la *transformación de la hodógrafa*, denominándose *plano de la hodógrafa* al plano $v_x v_y$ y *plano físico* al plano xy.

En el caso del flujo potencial podemos sustituir las ecuaciones de Euler por su primera integral, que es la ecuación de Bernoulli:

$$w + \tfrac{1}{2}v^2 = w_0. \qquad (108.1)$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0. \tag{108.2}$$

Como diferencial del potencial de velocidades ϕ tenemos $\mathrm{d}\phi = v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y$. Haremos la transformación que convierta las variables independientes x, y a las nuevas variables v_x, v_y mediante una transformación de Legendre, poniendo

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}(xv_x) - x\mathrm{d}v_x + \mathrm{d}(yv_y) - y\,\mathrm{d}v_y,$$

introduciendo la función

$$\Phi = -\phi + xv_x + yv_y, \tag{108.3}$$

y obteniendo

$$\mathrm{d}\Phi = x\,\mathrm{d}v_x + y\,\mathrm{d}v_y,$$

en donde Φ se considera como una función de v_x y v_y. De aquí que

$$x = \partial\Phi/\partial v_x, \qquad y = \partial\Phi/\partial v_y. \tag{108.4}$$

Sin embargo, es más conveniente para su empleo no utilizar las componentes cartesianas de la velocidad, sino su módulo v y el ángulo θ que forma con el eje x:

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{108.5}$$

La transformación apropiada de las derivadas da, en lugar de (108.4),

$$x = \cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad y = \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{108.6}$$

La relación existente entre el potencial ϕ y la función Φ viene dada por la fórmula sencilla

$$\phi = -\Phi + v\,\partial\Phi/\partial v. \tag{108.7}$$

Finalmente, con objeto de obtener la ecuación que determina la función $\Phi(v, \theta)$, debemos transformar la ecuación de continuidad (108.2) a las nuevas variables. Escribiendo las derivadas en forma de jacobianos:

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0,$$

multiplicando por $\partial(x, y)/\partial(v, \theta)$ y sustituyendo (108.5), tenemos

$$\frac{\partial(\rho v\cos\theta, y)}{\partial(v, \theta)} - \frac{\partial(\rho v\,\mathrm{sen}\,\theta, x)}{\partial(v, \theta)} = 0.$$

Para desarrollar estos jacobianos, debemos sustituir (108.6) para x e y. Además, como la entropía s es una constante determinada, si expresamos la den-

sidad en función de s y w y sustituimos $w = w_0 - v^2/2$, encontramos que la densidad puede escribirse en función de v únicamente: $\rho = \rho(v)$. Por tanto, y después de un cálculo simple, se obtiene la ecuación

$$\frac{d(\rho v)}{dv}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) + \rho v\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0.$$

De acuerdo con (80.5),

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

y así tenemos, finalmente, la *ecuación de Chaplygin* para la función $\Phi(v, \theta)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0. \qquad (108.8)$$

En esta expresión la velocidad del sonido es una función conocida $c(v)$, determinada por la ecuación del estado del gas junto con la ecuación de Bernoulli.

La ecuación (108.8), más la relación (108.6), resulta ser equivalente a las ecuaciones del movimiento. Así el problema de resolver las ecuaciones no lineales del movimiento se reduce a la resolución de una ecuación lineal para la función $\Phi(v, \theta)$. Es cierto que las condiciones límites en esta ecuación no son lineales y poseen la forma siguiente. En la superficie de un cuerpo, la velocidad del gas debe ser tangencial. Expresando la ecuación de la superficie en la forma paramétrica $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (como en § 107), y sustituyendo X e Y en lugar de x e y en (108.6), obtenemos dos ecuaciones que deben satisfacerse para todos los valores de θ; esto no es posible para toda función $\Phi(v, \theta)$. De hecho, la condición límite consiste en que ambas ecuaciones sean compatibles para todo valor de θ, es decir, que una de ella debe ser deducible de la otra.

Sin embargo, el que se satisfagan las condiciones finitas no asegura que la solución resultante de la ecuación de Chaplygin determine un flujo que sea realmente posible en todos los puntos del plano físico. También debe concluirse la siguiente condición: el jacobiano $\Delta \equiv \partial(x, y)/\partial(\theta, v)$ no debe ser nulo en ninguna parte, excepto en el caso trivial en que todas sus derivadas se anulen. Es fácil ver que, a no ser que se cumpla esta condición, la solución resulta compleja cuando pasamos a través de la línea (denominada *línea límite*) contenida en el plano xy y dada por la ecuación $\Delta = 0$.† Efectivamente, supongamos que $\Delta = 0$ en la línea $v = v_0(\theta)$, y supongamos que

† No existe ninguna objeción a pasar a través de puntos en donde Δ resulta infinito. Si $1/\Delta = 0$ sobre una cierta línea, esto simplemente significa que la correspondencia entre los planos xy y $v\theta$ deja de ser biunívoca: al recorrer el plano xy, cubrimos alguna parte del plano $v\theta$ dos o tres veces.

$(\partial y/\partial\theta)_v \neq 0$. Entonces tenemos

$$-\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,\theta)}\frac{\partial(v,\theta)}{\partial(v,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y = 0.$$

De aquí vemos que cerca de la línea límite v está determinada como una función de x (para un valor de y dado) por

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(\partial^2 x/\partial v^2)_y (v - v_0)^2,$$

y v resulta compleja sobre un lado u otro de la línea límite.†

Es fácil ver que una línea límite puede presentarse sólo en regiones de flujo supersónico. Un cálculo directo, utilizando las relaciones (108.6) y la ecuación (108.8), nos da

$$\Delta = \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right]. \qquad (108.9)$$

Es evidente que, para $v \leqslant c$, $\Delta > 0$ y Δ, puede resultar cero sólo si $v > c$.

La aparición de líneas límites en la solución de la ecuación de Chaplygin indica que bajo las condiciones dadas es imposible un flujo continuo a través de dicha región y entonces deben producirse ondas de choque. Sin embargo, debe resaltarse que la posición de estos choques no coincide con la de las líneas límite.

En § 107 estudiamos el caso particular de flujo supersónico bidimensional estacionario (ondas simples) que está caracterizado por el hecho de que la velocidad no es una función únicamente de su dirección: $v = v(\theta)$. Esta solución no puede obtenerse a partir de la ecuación de Chaplygin, puesto que $1/\Delta \equiv 0$, y la solución se «pierde» cuando se multiplica la ecuación de continuidad por el jacobiano en la transformación hacia el plano de la hodógrafa. La situación es exactamente análoga a la que se encuentra en la teoría del flujo monodimensional no estacionario. Son totalmente aplicables las notas hechas en § 98 respecto a la relación existente entre la onda simple y la integral general de la ecuación (98.2) a la relación existente entre la onda simple estacionaria y la integral general de la ecuación de Chaplygin.

El hecho de que el jacobiano Δ sea positivo en el flujo subsónico nos permite demostrar un teorema interesante debido a A. A. NIKOL'SKI y G. I. TAGANOV (1946). Tenemos idénticamente

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\theta,v)}{\partial(x,v)}\frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)},$$

† Este resultado evidentemente permanece válido incluso si se anula $(\partial^2 x/\partial v^2)_y$ al mismo tiempo que Δ, pero $(\partial x/\partial v)_y$ cambia de signo de nuevo para $v = v_0$, es decir, la diferencia $x - x_0$ es proporcional a una potencia incluso más elevada de $v - v_0$.

o sea,

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x . \tag{108.10}$$

En un flujo subsónico $\Delta > 0$, y vemos que las derivadas $(\partial\theta/\partial x)_v$ y $(\partial v/\partial y)_x$ tienen el mismo signo. Esto tiene un significado geométrico simple: si nos movemos a lo largo de una línea $v = \text{constante} \equiv v_0$, teniendo la región $v < v_0$ hacia la derecha, el ángulo aumenta monótonamente, es decir, el vector velocidad gira siempre en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Este resultado es válido, en particular, para la línea de transición entre flujo subsónico y supersónico, sobre la cual $v = c = c_*$.

En conclusión, podemos dar la ecuación de Chaplygin para un gas perfecto, escribiendo c explícitamente en función de v:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + v^2 \frac{1-(\gamma-1)v^2/(\gamma+1)c_*^2}{1-v^2/c_*^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0. \tag{108.11}$$

Esta ecuación tiene una familia de integrales particulares que se pueden expresar mediante funciones hipergeométricas.†

§ 109. Características de un flujo bidimensional estacionario

Ya se han estudiado en § 79 algunas propiedades generales de las características del flujo bidimensional estacionario (supersónico). Deduciremos ahora las ecuaciones que dan las características en función de una solución dada de las ecuaciones del movimiento.

En el flujo supersónico bidimensional estacionario existen, en general, tres familias de características. Todas las pequeñas perturbaciones, excepto las de entropía y vorticidad, se propagan a lo largo de dos de estas familias (que denominaremos las características C_+ y C_-); y las perturbaciones de entropía y vorticidad se propagan a lo largo de las características (C_0) de la tercera familia, que coinciden con las líneas de corriente. En el caso de un flujo dado, se conocen las líneas de corriente y el problema consiste en determinar las características que pertenecen a las dos primeras familias.

Las direcciones de las características C_+ y C_- que pasan a través de cada punto dentro del plano caen en lados opuestos de la línea de corriente que pasa por dicho punto, y forman con ella un ángulo igual al valor local del ángulo de Mach α (figura 41, § 79). Designaremos por m_0 la pendiente de la línea de corriente en un punto dado, y por m_+, m_- las pendientes de las características C_+, C_-. Entonces tenemos

$$\frac{m_+ - m_0}{1+m_0m_+} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{m_- - m_0}{1+m_0m_-} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

† Ver, por ejemplo, L. I. Sedov, *Two-dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics* (*Ploskie zadachi gidrodinamiki i aérodinamiki*), Moskow, 1950.

de aquí

$$m_{\pm} = \frac{m_0 \pm \operatorname{tg}\ \alpha}{1 \mp m_0\ \operatorname{tg}\ \alpha};$$

los signos superiores se relacionan en todos los puntos con C_+ y los inferiores con C_-. Sustituyendo $m_0 = v_y/v_x$, $\operatorname{tg}\alpha = c/\sqrt{(v^2 - c^2)}$ y simplificando, obtenemos la expresión siguiente para las pendientes de las características:

$$m_{\pm} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{v_x v_y \pm c\sqrt{(v^2 - c^2)}}{v_x^2 - c^2}. \tag{109.1}$$

Si se conoce la distribución de velocidades, ésta es una ecuación diferencial que determina las características C_+ y C_-.†

Además de las características en el plano xy, podemos considerar aquéllas que existen en el plano de la hodógrafa, que son especialmente interesantes en el estudio del flujo potencial isoentrópico; consideramos este caso en lo que sigue. Matemáticamente estas características corresponden a la ecuación de Chaplygin (108.8), que son del tipo hiperbólico para $v > c$. Siguiendo el método general, que es familiar en física matemática (ver § 96), formamos, a partir de los coeficientes, la ecuación de las características:

$$dv^2 + d\theta^2 v^2/(1 - v^2/c^2) = 0,$$

o sea,

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_{\pm} = \pm\frac{1}{v}\sqrt{\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)}. \tag{109.2}$$

Las características dadas por esta ecuación no dependen de la solución particular de la ecuación de Chaplygin considerada, ya que los coeficientes de esta ecuación son independientes de Φ. Las características en el plano de la hodógrafa son una transformación de las características C_+ y C_- en el plano físico, y las denominaremos, respectivamente, características Γ_+ y Γ_-, de acuerdo con los signos que aparecen en (109.2).

La integración de la ecuación (109.2) da unas relaciones de la forma $J_+(v, \theta) = \text{constante}$, $J_-(v, \theta) = \text{constante}$. Las funciones J_+ y J_- son magnitudes que permanecen constantes a lo largo de las características C_+ y C_- (es decir, son invariantes de Riemann). En el caso de un gas perfecto, la ecuación (109.2) puede integrarse explícitamente. Sin embargo, no es necesario realizar los cálculos, puesto que el resultado puede verse a partir de las fórmulas (107.3) y (107.4). En efecto, de acuerdo con las propiedades

† La ecuación (109.1) determina también las características para flujo estacionario con simetría axial si se sustituyen v_y e y por v_r y r, siendo r la coordenada cilíndrica (la distancia al eje de simetría, que es el eje x); resulta evidente que no se altera la deducción si consideramos, en lugar del plano xy, un plano xr que pase por el eje de simetría.

generales de las ondas simples (ver § 97), la dependencia de v respecto a θ en el caso de una onda simple, viene dada por la condición de que uno de los invariantes de Riemann sea constante en todo el espacio. La constante arbitraria en las fórmulas (107.3) y en (107.4) es ϕ_*; eliminando el parámetro ϕ de estas fórmulas, obtenemos

$$J_\pm = \theta \pm \left\{ \operatorname{arcsen} \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(\gamma+1)\left(1 - \frac{c_*^2}{v^2}\right)\right]} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arcsen} \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\left(\frac{v^2}{c_*^2} - 1\right)\right]} \right\}. \qquad (109.3)$$

Las características en el plano de la hodógrafa son una familia de epicicloides, que ocupan el espacio situado entre dos circunferencias de radios $v = c_*$ y $v = \sqrt{[(\gamma+1)/(\gamma-1)]}c_*$ (figura 100).

En el caso del flujo potencial isoentrópico, las características Γ_+, Γ_- tienen la propiedad importante siguiente: las familias Γ_+, Γ_- son ortogonales a las familias C_-, C_+, respectivamente (se supone que los ejes coordenados de x e y se transforman paralelamente a los correspondientes a v_x y v_y).†

Para demostrar esta propiedad, partiremos de la ecuación (106.3) de un flujo potencial bidimensional, que es de la forma

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \qquad (109.4)$$

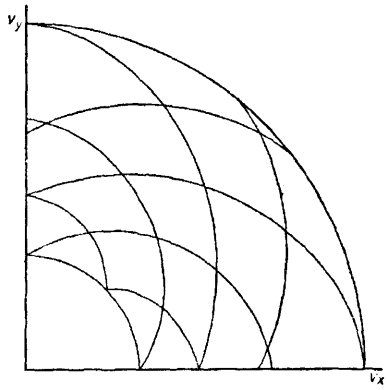

FIG. 100

† Esto no se aplica a las características del flujo asimétrico en el plano xr.

sin término independiente. Las pendientes $m_{\pm}$ de las características C_+ son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Consideremos la expresión $dv_x{}^+dx^- + dv_y{}^+dy^-$, en la cual las diferenciales de la velocidad se toman a lo largo de las características Γ_+, y las diferenciales de las coordenadas a lo largo de C_-. Tenemos, idénticamente,

$$dv_x{}^+dx^- + dv_y{}^+dy^- = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^+dx^- + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(dx^+dy^- + dx^-dy^+) + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^+dy^-.$$

Dividiendo por dx^+dx^-, obtenemos como coeficiente de $\partial^2\phi/\partial x\partial y$ y $\partial^2\phi/\partial y^2$, respectivamente, $m_+ + m_- = 2B/A$ y $m_+m_- = C/A$. Resulta, entonces, evidente que la expresión es cero, según (109.4). Así pues,

$$dv_x{}^+dx^- + dv_y{}^+dy^- = d\mathbf{v}^+ \cdot d\mathbf{r}^- = 0.$$

Análogamente, $d\mathbf{v}^- \cdot d\mathbf{r}^+ = 0$. Estas ecuaciones son equivalentes al resultado indicado.

§ 110. Ecuación de Euler-Tricomi. Flujo transónico

La investigación de las propiedades del flujo que se obtienen como resultado de la transición entre el flujo subsónico y supersónico tiene un interés fundamental. Los flujos estacionarios en los que se produce la transición se denominan *flujos mixtos* o *transónicos*, y en la superficie en donde se produce la transición se denomina *superficie transicional* o *sónica*.

La ecuación de Chaplygin tiene un interés particular al estudiar el flujo cerca de la transición, puesto que se ve allí muy simplificada. En el límite en donde se produce la transición $v = c = c_*$, y cerca de la misma (en la región transónica) las diferencias $v - c$ y $v - c_*$ son pequeñas; están relacionadas por (106.8):

$$(v/c) - 1 = \alpha_*[(v/c_*) - 1].$$

Efectuemos la simplificación correspondiente en la ecuación de Chaplygin. El tercer término de la ecuación (108.8) es pequeño en comparación con el segundo, que contiene en el denominador a la expresión $1 - v^2/c^2$. En el segundo término podemos poner aproximadamente

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \approx \frac{c_*{}^2}{2(1 - v/c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v/c_*)}.$$

Finalmente, sustituyendo la velocidad v por una nueva variable

$$\eta = (2\alpha_*)^{\frac{1}{2}}(v - c_*)/c_*, \tag{110.1}$$

obtenemos la ecuación buscada en la forma

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{110.2}$$

Una ecuación de esta forma se denomina en física matemática *la ecuación de Euler-Tricomi.*† En el semiplano $\eta > 0$ es hiperbólica, pero en $\eta < 0$ es elíptica. Estudiaremos aquí algunas propiedades matemáticas de esta ecuación que son importantes en conexión con diversos problemas físicos.

Las características de la ecuación (110.2) vienen dadas por la ecuación $\eta d\eta^2 - d\theta^2 = 0$, que tiene la integral general

$$\theta \pm \tfrac{2}{3}\eta^{\frac{3}{2}} = C, \tag{110.3}$$

siendo C una constante arbitraria. Esta ecuación representa una familia de curvas en el plano $\eta\theta$, que son ramas de parábolas semicúbicas en el semiplano derecho con vértices en el eje θ (figura 101).

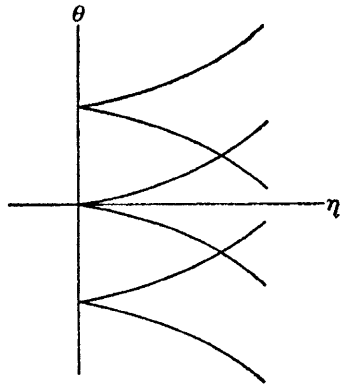

FIG. 101

Al estudiar el flujo en una región‡ pequeña del espacio, en donde la dirección de la velocidad del gas varía sólo ligeramente, podemos siempre tomar la dirección del eje x de forma tal que el ángulo θ medido a partir del mismo

† La aplicación de esta ecuación al problema considerado aquí se debe a F. I. FRANKL' (1945). La teoría matemática de la ecuación (110.2) ha sido dada por F. TRICOMI, Linear Equations of the Mixed Type (*Sulle equazioni lineari ... di tipo misto*), *Memorie della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, classe di scienze fisiche*, ser. 5, **14**, 133, 1922.

‡ Como es natural, esta frase no debe tomarse literalmente. La región considerada puede estar en la proximidad del punto en el infinito, es decir, la región a distancias grandes del cuerpo.

sea pequeño en toda la región considerada. Las ecuaciones (108.6) que determinan las coordenadas x, y a partir de la función $\Phi(\eta, \theta)$ se simplifican entonces mucho también:† $x = (2\alpha_*)^{1/3}\partial\Phi/\partial\eta$, $y = \partial\Phi/\partial\theta$. Con objeto de evitar la aparición del factor $(2\alpha_*)^{1/3}$, sustituiremos la coordenada x por $x(2\alpha_*)^{-1/3}$, y denominaremos a esta última magnitud x. Entonces

$$x = \partial\Phi/\partial\eta, \qquad y = \partial\Phi/\partial\theta. \tag{110.4}$$

Es interesante señalar que, puesto que resulta relacionada de un modo tan sencillo con Φ, la función $y(\eta, \theta)$ [pero no $x(\eta, \theta)$] también satisface la ecuación de Euler-Tricomi. Utilizando este hecho podemos escribir el jacobiano de la transformación desde el plano físico al plano de la hodógrafa como

$$\Delta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\eta)} = \Phi_{\eta\theta}{}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - \eta\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2. \tag{110.5}$$

Como ya se ha mencionado, la ecuación de Euler-Tricomi ha de aplicarse normalmente para estudiar las propiedades de la solución cerca del origen en el plano $\eta\theta$. En casos de interés físico el origen es un punto singular de la solución. Por esta razón se le asigna un significado especial a la familia de integrales particulares de la ecuación de Euler-Tricomi que posee ciertas propiedades de homogeneidad. Estas soluciones son homogéneas en las variables θ^2 y η^3; dichas soluciones deben existir, puesto que la transformación $\theta^2 \to a\theta^2$, $\eta^3 \to a\eta^3$ deja sin modificar la ecuación (110.2). Buscaremos estas soluciones en la forma $\Phi = \theta^{2k} f(\xi)$, $\xi = 1 - 4\eta^3/9\theta^2$, en donde k es una constante, que es el grado de homogeneidad de la función Φ respecto a la transformación mencionada. Hemos tomado la variable ξ de modo que se anule en las características que pasan por el punto $\eta = \theta = 0$. Haciendo la sustitución anterior obtenemos para la función $f(\xi)$ la ecuación

$$\xi(1-\xi)f'' + [\tfrac{5}{6} - 2k - \xi(\tfrac{3}{2} - 2k)]f' - k(k - \tfrac{1}{2})f = 0.$$

Esta ecuación es hipergeométrica. Utilizando las expresiones bien conocidas para las dos integrales independientes de esta ecuación, se encuentra que la solución buscada es (para $2k + 1/6$ no enteros):

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k, \quad -k+\tfrac{1}{2}; \quad -2k+\tfrac{5}{6}; \quad 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + B\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+1/6} F\left(k+\tfrac{1}{6}, \quad k+\tfrac{2}{3}; \quad 2k+\tfrac{7}{6}; \quad 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right]. \tag{110.6}$$

† Omitimos un factor $1/c_*$ en los segundos miembros; esto significa simplemente que se sustituye Φ por $c_*\Phi$, lo cual no afecta a la ecuación (110.2) y, por tanto, es siempre permisible.

Utilizando las relaciones existentes entre las funciones hipergeométricas de argumentos z, $1/z$, $1-z$, $1/(1-z)$ y $z/(1-z)$, podemos poner también esta solución en otras cinco formas diferentes, las cuales se necesitan todas en distintos problemas. Daremos dos de ellas:

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\tfrac{1}{2};\ \tfrac{2}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)+\right.$$
$$\left.+B\frac{\eta}{\theta^{2/3}}F\left(-k+\tfrac{1}{3},\ -k+\tfrac{5}{6};\ \tfrac{4}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right], \qquad (110.7)$$

$$\Phi_k = \eta^{3k}\left[AF\left(-k,\ -k+\tfrac{1}{3};\ \tfrac{1}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)+\right.$$
$$\left.+B\frac{\theta}{\eta^{3/2}}F\left(-k+\tfrac{1}{2},\ -k+\tfrac{5}{6};\ \tfrac{3}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)\right]; \qquad (110.8)$$

como es natural, las constantes A y B en las fórmulas (110.6)-(110.8) no son iguales. Estas expresiones dan origen a la siguiente propiedad importante de las funciones Φ_k, que no es evidente a partir de (110.6). Las líneas $\eta = 0$ y $\theta = 0$ no son líneas singulares (se ve a partir de (110.7) en las proximidades de $\eta = 0$, Φ_k puede desarrollarse en potencias enteras de η, y a partir de (110.8) es cierto lo mismo para θ). También se ve a partir de la expresión (110.6) que, por otra parte, las características son líneas singulares de la integral homogénea Φ_k general (es decir, que contiene dos constantes A y B) de la ecuación de Euler-Tricomi: si $2k + 1/6$ no es un entero, el factor $(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}$ tiene puntos ramificados, mientras que si $2k + 1/6$ es un entero, uno de los términos de (110.6) carece de significado† (o degenera en el otro término si $2k + 1/6 = 0$), y debe sustituirse por la segunda solución independiente de la ecuación hipergeométrica, que en este caso tiene una singularidad logarítmica.

Las siguientes relaciones resultan ser válidas entre las integrales Φ_k con diferentes valores de k:

$$\Phi_k = \Phi_{-k-1/6}(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}, \qquad (110.9)$$

$$\Phi_{k-1/2} = \partial\Phi_k/\partial\theta. \qquad (110.10)$$

La primera se deduce directamente de (110.6) y la segunda a partir del hecho de que $\partial\Phi_k/\partial\theta$ satisface la ecuación de Euler-Tricomi, y su grado de homogeneidad es el de $\Phi_{k-1/2}$. En estas fórmulas Φ_k significa, como es natural, la expresión general, con dos constantes arbitrarias.

Al investigar la solución cerca del punto $\eta = \theta = 0$, tenemos que seguir su variación a lo largo de un contorno que rodee este punto. Por ejemplo,

† Recordemos que la serie $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ carece de significado para $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$

supongamos que la función Φ_k (110.6) representa la solución en el punto A cerca de la característica $\theta = 2/3\eta^{3/2}$ (figura 102), y supongamos que se busca la forma de la solución cerca de la característica $\theta = -2/3\eta^{3/2}$ (en el punto B). El paso desde A a B exige cruzar el eje de abscisas, y $\theta = 0$ es una línea singular de las funciones hipergeométricas en la expresión (110.6), de modo que su argumento allí es infinito. Por consiguiente, con objeto de pasar de A a B es necesario transformar las funciones hipergeométricas en funciones del argumento recíproco $9\theta^2/(9\theta^2 - 4\eta^3)$, en el cual $\theta = 0$ no es una singularidad, y luego cambiar el signo de θ, volviendo finalmente al argumento original repitiendo la transformación. De este modo obtenemos las siguientes fórmulas de transformación para las funciones que aparecen en (110.6):

$$F_1 \to \frac{F_1}{2\operatorname{sen}(2k+\frac{1}{6})\pi} + F_2 \cdot 2^{-4k-1/3} \frac{\Gamma(-2k-\frac{1}{6})\Gamma(-2k+\frac{5}{6})}{\Gamma(-2k)\Gamma(-2k+\frac{2}{3})},$$

$$F_2 \to \frac{-F_2}{2\operatorname{sen}(2k+\frac{1}{6})\pi} + F_1 \cdot 2^{4k+1/3} \frac{\Gamma(2k+\frac{1}{6})\Gamma(2k+\frac{7}{6})}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+\frac{1}{3})}, \tag{110.11}$$

en donde F_1 y F_2 significan

$$F_1 = |\theta|^{2k} F\left(-k, \quad -k+\tfrac{1}{2}; \quad -2k+\tfrac{5}{6}; \quad 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),$$

$$F_2 = |\theta|^{2k}\left|1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+1/6} F\left(k+\tfrac{1}{6}, \quad k+\tfrac{2}{3}; \quad 2k+\tfrac{7}{6}; \quad 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \tag{110.12}$$

en las cuales se toman los módulos de θ y $1 - 4\eta^3/9\theta^2$ en los coeficientes de las funciones hipergeométricas.

Análogamente podemos obtener fórmulas de transformación para el paso de A' a B' (figura 102) alrededor del origen, pero en sentido opuesto. Los cálculos son más complicados, puesto que hemos de pasar a través de tres singularidades de la función hipergeométrica (una con $\theta = 0$ y dos con $\eta = 0$; recordemos que las singularidades de una función hipergeométrica con argumento z son $z = 1$ y $z = \infty$). Las fórmulas finales son

$$F_1 \to -\frac{\operatorname{sen}(4k-\frac{1}{6})\pi}{\operatorname{sen}(2k+\frac{1}{6})\pi} F_1 + F_2 \cdot 2^{-4k+2/3} \cos(2k+\tfrac{1}{6})\pi \frac{\Gamma(-2k-\frac{1}{6})\Gamma(-2k+\frac{5}{6})}{\Gamma(-2k)\Gamma(-2k+\frac{2}{3})},$$

$$F_2 \to \frac{\operatorname{sen}(4k-\frac{1}{6})\pi}{\operatorname{sen}(2k+\frac{1}{6})\pi} F_2 + F_1 \cdot 2^{4k+4/3} \cos(2k+\tfrac{1}{6})\pi \frac{\Gamma(2k+\frac{1}{6})\Gamma(2k+\frac{7}{6})}{\Gamma(2k+1)\Gamma(2k+\frac{1}{3})}. \tag{110.13}$$

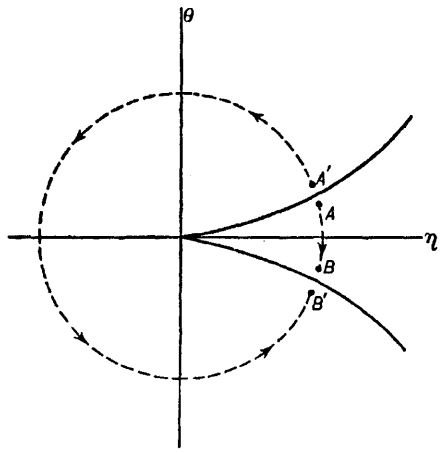

FIG. 102

Igual que esta familia de soluciones homogéneas, existen, como es natural, otras familias de integrales particulares de la ecuación de Euler-Tricomi. Podemos mencionar ahora aquella familia que resulta de un desarrollo en serie de Fourier en función de θ. Si buscamos una expresión de Φ en la forma

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta)e^{\pm i\nu\theta}, \tag{110.14}$$

siendo ν una constante arbitraria, obtenemos para la función g_ν la ecuación $g_\nu'' + \nu^2\eta g_\nu = 0$. Esta es la ecuación correspondiente a la función de Airy; su integral general es

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta}\,Z_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}\nu\eta^{3/2}), \tag{110.15}$$

en donde $Z_{1/3}$ es una combinación lineal arbitraria de las funciones de Bessel de orden 1/3.

Finalmente, resulta útil recordar que la integral general de la ecuación de Euler-Tricomi puede escribirse

$$\Phi = \int_{C_z} f(\zeta)\mathrm{d}z, \qquad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \tag{110.16}$$

en donde $f(\zeta)$ es una función arbitraria y la integración en el campo complejo se realiza a lo largo de un contorno cualquiera C_z en cuyos extremos la derivada $f'(\zeta)$ tenga valores iguales. Mediante una sustitución directa de

(110.16) en la ecuación de Euler-Tricomi se tiene

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 9\int_{C_z}(z^2-\eta^2)f''(\zeta)\mathrm{d}z = 3\int_{C_\zeta} f''(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= 3[f'(\zeta)]c_\zeta = 0,$$

es decir, se satisface la ecuación.

§ 111. Soluciones de la ecuación de Euler-Tricomi cerca de puntos no singulares de la superficie sónica

Busquemos ahora aquellas soluciones Φ_k que corresponden a casos en los que el flujo gaseoso carece de singularidades físicas (discontinuidades débiles u ondas de choque) cerca de la transición. Para ello resulta más conveniente partir, no de la propia ecuación de Euler-Tricomi, sino de la ecuación correspondiente al potencial de velocidades en el plano físico. Esta ecuación se ha deducido en § 106; en el caso del flujo bidimensional, la ecuación (106.10) se transforma, previa la sustitución $x \to x(2a_*)^{1/3}$, en

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}. \tag{111.1}$$

Recuérdese que se define el potencial ϕ en esta ecuación, de modo que sus derivadas respecto a las coordenadas dan la velocidad de acuerdo con las ecuaciones

$$\partial\phi/\partial x = \eta, \qquad \partial\phi/\partial y = \theta. \tag{111.2}$$

Podemos señalar también que puede obtenerse directamente la ecuación de Euler-Tricomi a partir de la ecuación (111.1) cambiando las variables independientes θ, η mediante una transformación de Legendre, con $\Phi = -\phi + x\eta + y\theta$, o sea,

$$\phi = -\Phi + \eta\,\partial\Phi/\partial\eta + \theta\,\partial\Phi/\partial\theta. \tag{111.3}$$

Tomando el origen del plano xy en el punto de la línea de transición, cuyas proximidades estamos investigando, desarrollaremos ϕ en potencias de x e y. En el caso general, el primer término de un desarrollo que satisface la ecuación (111.1) es

$$\phi = xy/a. \tag{111.4}$$

En este caso $\theta = x/a$, $\eta = y/a$, de modo que

$$\Phi = a\theta\eta. \tag{111.5}$$

Resulta evidente, a partir del grado de homogeneidad de esta función, que corresponde a una de las funciones $\Phi_{5/6}$; este término es el segundo de la expresión (110.7), en la cual la función hipergeométrica con $k = 5/6$ se reduce a 1 simplemente: $\eta\theta F(-1/2, 0; 4/3; 4\eta^3/9\theta^2) = \eta\theta$.

Si deseamos hallar la ecuación de la línea de transición en el plano físico, no basta con el primer término del desarrollo. El término siguiente es de grado 1, es decir, corresponde a una de las funciones Φ_1, a saber, el primer término de la expresión (110.7), que se reduce a un polinomio para $k = 1$:

$$\theta^2 F(-1, \quad -\tfrac{1}{2}; \quad \tfrac{2}{3}; \quad 4\eta^3/9\theta^2) = \theta^2 + \tfrac{1}{3}\eta^3.$$

Así pues, los dos primeros términos del desarrollo de Φ son

$$\Phi = a\eta\theta + b(\theta^2 + \tfrac{1}{3}\eta^3). \tag{111.6}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} x &= a\theta + b\eta^2, \\ y &= a\eta + 2b\theta. \end{aligned} \tag{111.7}$$

La línea de transición ($\eta = 0$) es la recta $y = 2bx/a$.

Para hallar la ecuación de las características en el plano físico, sólo necesitamos el primer término del desarrollo. Sustituyendo $\theta = x/a$, $\eta = y/a$ en la ecuación de las características de la hodógrafa $\theta = \pm 2/3\eta^{3/2}$, obtenemos $x = \pm 2/3y^{3/2}/\sqrt{a}$, es decir, de nuevo dos ramas de una parábola semicúbica con un vértice en la línea de transición. Esta propiedad de las características resulta también evidente del siguiente razonamiento simple. En los puntos de la línea de transición, el ángulo de Mach es $\pi/2$. Esto significa que coinciden las tangentes a las características de las dos familias, de modo que existe un vértice (figura 103). Las líneas de corriente cortan a la línea de

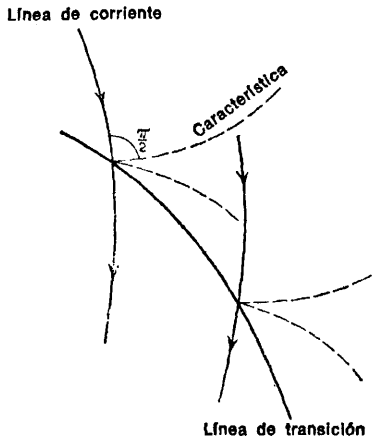

FIG. 103

transición perpendicularmente a las características y no poseen allí ninguna singularidad.

La solución (111.6) no es aplicable en el caso excepcional en que la línea de corriente sea perpendicular a la línea de transición en el punto considerado.† Cerca de dicho punto el flujo es evidentemente simétrico respecto al eje x. Este caso requiere una consideración especial, que ha sido examinada por F. I. FRANKL y S. V. FAL'KOVICH (1945).

La simetría del flujo significa que, si se cambia el signo de y, la velocidad v_y cambia de signo mientras v_x permanece sin variar. Es decir, el potencial ϕ debe ser una función par de y y el potencial Φ una función par de θ. Por consiguiente, los primeros términos del desarrollo de ϕ en este caso tienen la forma

$$\phi = \tfrac{1}{2}ax^2 + \tfrac{1}{2}a^2xy^2 + \tfrac{1}{24}a^3y^4; \tag{111.8}$$

el orden relativo de magnitud de x e y no se conoce *a priori*, de modo que los tres términos pueden ser todos del mismo orden. De aquí que se encuentren las siguientes fórmulas para la transformación desde el plano físico al plano de la hodógrafa:

$$\begin{aligned} \eta &= ax + \tfrac{1}{2}a^2y^2, \\ \theta &= a^2xy + \tfrac{1}{8}a^3y^3. \end{aligned} \tag{111.9}$$

Sin resolver explícitamente estas ecuaciones para x e y, podemos ver fácilmente que el grado de la función $y(\theta, \eta)$ es 1/6. De aquí que la función correspondiente Φ tenga $k = 1/6 + 1/2 = 2/3$, es decir, es un caso particular de la integral general $\Phi_{2/3}$.

Eliminando x de las ecuaciones (111.9), obtenemos una ecuación cúbica para la función $y(\theta, \eta)$:

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \tag{111.10}$$

En el caso $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$, es decir, a través de toda la región a la izquierda de las características de la hodógrafa que pasan por el punto $\eta = \theta = 0$ (incluyendo la totalidad de la región subsónica $\eta < 0$; figura 104), esta ecuación tiene sólo una raíz real, que debe ser la función $y(\theta, \eta)$. En la región a la derecha de las características, las tres raíces son reales y debemos tomar aquélla que sea la continuación de la raíz real en la región de la izquierda.

Las características en el plano físico (que pasan por el origen) se obtienen sustituyendo las expresiones (111.9) en la ecuación $4\eta^3 = 9\theta^2$. Esto nos da dos parábolas:

$$\begin{aligned} &\text{las características 23 y 56:} \quad x = -ay^2/4 \\ &\text{las características 34 y 45:} \quad x = ay^2/2 \end{aligned} \tag{111.11}$$

† Esto correspondería al caso $a = 0$ en (111.6); la solución cesa entonces de ser válida, puesto que el jacobiano Δ se anula en la línea $\eta = 0$.

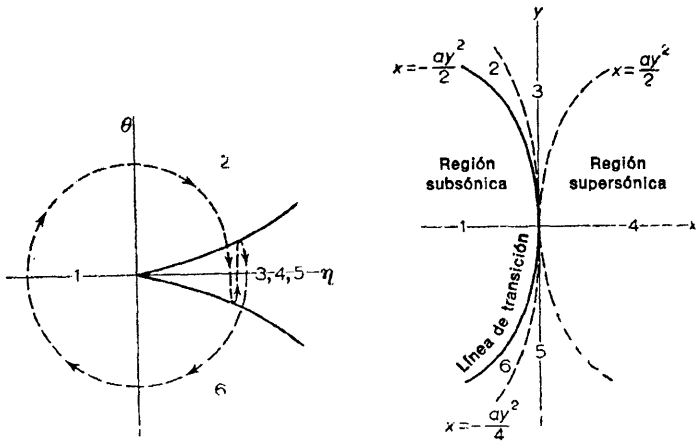

FIG. 104

Los números muestran que se encuentran en el plano físico dos regiones separadas por la característica en cuestión. La línea de transición ($\eta = 0$ en el plano de la hodógrafa) es la parábola $x = -ay^2/2$ en el plano físico (figura 104). Podemos observar la propiedad siguiente del punto donde corta la línea de transición al eje de simetría: salen de este punto cuatro ramas de características, mientras que sólo dos abandonan cualquier otro punto de la línea de transición.

La figura 104 muestra mediante los mismos números las regiones del plano de la hodógrafa que corresponden a las diversas regiones del espacio. Esta correspondencia no es biunívoca;† cuando en el plano físico rodeamos completamente el origen, la región entre las dos características en el plano de la hodógrafa se ve cubierto tres veces, como se indica mediante la línea de trazos de la figura 104, que se ve «reflejada» dos veces en las características.

Como la propia función $y(\theta, \eta)$ satisface la ecuación de Euler-Tricomi, debe poder obtenerse a partir de la integral general $\Phi_{1/6}$. Cerca de la característica 23 en el plano físico, es

$$y = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3\theta}{2}}F\left(-\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{8};\ \tfrac{1}{2};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right); \qquad (111.12)$$

el primer término de (110.6) carece de singularidad sobre esta característica. Continuándola analíticamente hasta la proximidad de la característica 56

† De acuerdo con el hecho de que $\Delta = \infty$ sobre la característica $x = ay^2/2$ en el plano físico; ver la primera nota a pie de página en § 108.

[mediante un trayecto que atraviese la región subsónica 1, es decir, mediante la fórmula (110.13)], obtenemos allí la misma función. Sin embargo, cerca de las características 34 y 45, $y(\theta, \eta)$ viene dada por combinaciones lineales de dicha función, y

$$\theta^{1/3}\sqrt{\left(\frac{4\eta^3}{9\theta^2}-1\right)}F\left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{5}{6};\ \tfrac{3}{2};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \tag{111.13}$$

es decir, el segundo término de (110.6). Se obtienen estas combinaciones mediante continuación analítica, utilizando las fórmulas (110.11); ahora deberemos recordar que la raíz cuadrada de (111.13) cambia de signo a cada «reflexión» de una característica de una hodógrafa.

Matemáticamente, estos resultados demuestran que las funciones $\Phi_{1/6}$ son combinaciones lineales de las raíces de la ecuación cúbica

$$f^3-3\eta f+3\theta = 0, \tag{111.14}$$

es decir, son funciones algebraicas.† Lo mismo que $\Phi_{1/6}$ todas las Φ_k con

$$k = \tfrac{1}{6} \pm \tfrac{1}{2}n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{111.15}$$

se reducen a funciones algebraicas; se obtienen a partir de $\Phi_{1/6}$, de acuerdo con las fórmulas (110.9) y (110.10), mediante derivaciones sucesivas, hecho que ha señalado F. I. FRANKL (1947).

Las funciones Φ_k con

$$k = \pm\tfrac{1}{2}n, \qquad k = \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{2}n, \tag{111.16}$$

en las que la función hipergeométrica se reduce a un polinomio,‡ también se reducen a funciones algebraicas; por ejemplo, para $k = n/2$ tenemos el primer término de la expresión (110.6), y para $k = -n/2$ el segundo término.

Estas tres familias de funciones algebraicas Φ_k incluyen en particular todas las funciones que pueden ser potenciales Φ correspondientes a flujos que no poseen ninguna singularidad en el plano físico. En dichos flujos, todos los términos del desarrollo de Φ cerca de un punto asimétrico en la línea de transición [cuyos dos primeros términos vienen dados por la fórmula (111.6)] deben tener, o bien, $k = 5/6 + n/2$, o bien, $k = 1 + n/2$. Sin embargo, el desarrollo de Φ cerca de un punto simétrico, que empieza con un término con $k = 2/3$, puede contener también funciones con $k = 2/3 + n/2$.

† No es conveniente en la práctica utilizar las fórmulas explícitas de estas ecuaciones, que se obtienen a partir de (111.14) mediante la fórmula de Cardan.

‡ Aquí debe recordarse que $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ se reduce a un polinomio si α (o β) es tal que $\alpha = -n$ o bien $\gamma - \alpha = -n$.

§ 112. Flujo a la velocidad del sonido

La forma simplificada de la ecuación de Chapligyn (es decir, la ecuación de Euler-Tricomi) tiene una importancia fundamental en la dinámica de los gases en el caso de flujo estacionario alrededor de los cuerpos, puesto que debe utilizarse para estudiar las propiedades cualitativas básicas de dicho flujo. Entre ellas deben incluirse, en primer lugar, los problemas relativos a la formación de ondas de choque. Por ejemplo, si se forma una onda de choque en flujo subsónico (en una región supersónica local adjunta a la superficie del cuerpo†), debe terminar a una distancia finita del cuerpo y entonces se plantea el problema de encontrar las propiedades de su punto terminal (ver § 113). Otro problema semejante es el de las propiedades de una onda de choque que acaba de formarse cerca de su intersección con la superficie. En ambos casos la onda de choque es débil, es decir, está en la región transónica y, por ello, su análisis debe realizarse mediante la ecuación de Euler-Tricomi.‡

Estudiaremos ahora otro problema de importancia teórica, el de la naturaleza del flujo bidimensional estacionario que rodea a un cuerpo cuando la velocidad de la corriente incidente es exactamente igual a la velocidad del sonido. Veremos, en particular, que una onda de choque debe extenderse desde la superficie del cuerpo hasta el infinito. A partir de ello, podemos sacar la importante conclusión de que la onda de choque debe aparecer primero para un número de Mach M_∞ que es ciertamente menor que la unidad.

Para ello, consideremos un flujo bidimensional que rodea un cuerpo («ala») de envergadura o longitud infinita y sección recta arbitraria (no necesariamente simétrica). Ahora estamos interesados en el esquema del flujo a distancias del cuerpo que son grandes en comparación con sus dimensiones. Por conveniencia describiremos, en primer lugar, los resultados de una manera cualitativa y después daremos el análisis cuantitativo.

En la figura 105, AB y $A'B'$ son líneas de transición, de modo que la región subsónica yace a su izquierda (aguas arriba); la flecha muestra la dirección de la corriente principal, que tomaremos como eje x, con el origen en un punto cualquiera cerca del cuerpo. A cierta distancia de la línea de transición, tenemos ondas de choque que salen del cuerpo (EF y $E'F'$ en la figura 105). Resulta que las características que abandonan el cuerpo (entre la línea de transición y la onda de choque) pueden dividirse en dos grupos.

† El menor número de Mach, $M_\infty < 1$ de la corriente principal para el cual el valor local de M en cualquier punto supera a la unidad, se denomina a veces *número de Mach crítico.*

‡ Debe recordarse que, en una onda de choque débil, las variaciones de la entropía y de la vorticidad son de orden inferior. Por tanto, en primera aproximación, se puede suponer el flujo potencial isoentrópico en ambos lados de la discontinuidad.

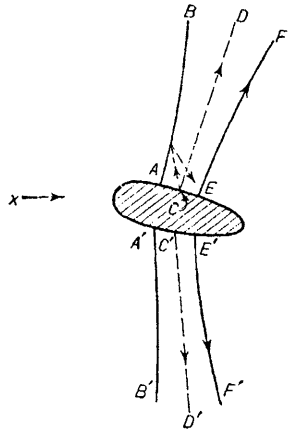

FIG. 105

Las características del primer grupo se encuentran con la línea de transición y terminan allí (es decir, son «reflejadas» en ella como características que llegan al cuerpo; la figura 105 muestra una de estas características). Las características del segundo grupo terminan en la onda de choque. Los dos grupos están separados por características límites, que son las únicas que llegan hasta el infinito y no se encuentran con la línea de transición ni con la onda de choque (*CD* y *C'D'* en la figura 105). Como las perturbaciones (producidas, por ejemplo, por un cambio en la forma del cuerpo) que se propagan a partir del cuerpo a lo largo de características del primer grupo alcanzan la frontera de la región subsónica, es evidente que la parte de la región supersónica que está comprendida entre la línea de transición y las características limitadoras influyen en la región subsónica, pero el flujo a la derecha de las características limitadoras no tiene efecto sobre el flujo a la izquierda: el flujo a la izquierda no resulta afectado por una perturbación del flujo a la derecha (como, por ejemplo, una modificación en el perfil a la derecha de *C* o *C'*). El flujo detrás de la onda de choque no tiene, como ya sabemos, ninguna influencia sobre el flujo delante de él. Así pues, la totalidad del flujo puede dividirse en tres partes (a la izquierda de *DCC'D'*, entre *DCC'D'* y *FEE'F'*, y a la derecha de *FEE'F'*), de tal modo que el flujo en la segunda parte no tiene ningún efecto sobre el de la primera y el flujo en la tercera parte no influye sobre el de la segunda.

A continuación, daremos una demostración cuantitativa del flujo, cuyo esquema acabamos de describir.

El origen del plano de la hodógrafa ($\theta = \eta = 0$) corresponde a una región infinitamente distante del plano físico y las características de la hodógrafa que salen del origen corresponden a las características límites *CD* y *C'D'*.

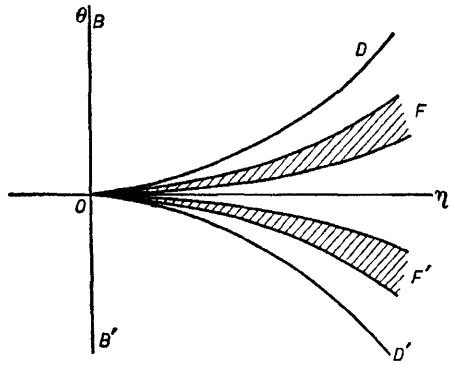

FIG. 106

La figura 106 muestra la zona próxima al origen, correspondiéndose las letras con las de la figura 105. La onda de choque corresponde, no a una línea, sino a dos líneas en el plano de la hodógrafa (que corresponden al flujo gaseoso a ambos lados de la discontinuidad); la región comprendida entre ambas líneas (sombreada en la figura 106) no corresponde a ninguna parte del plano físico.

En primer lugar, debemos encontrar cuál de las integrales generales Φ_k corresponde a este caso. Si $\Phi(\eta, \theta)$ es de grado k, entonces las funciones $x = \partial\Phi/\partial\eta$ e $y = \partial\Phi/\partial\theta$ son homogéneas y de grado $k - 1/3$ y $k - 1/2$, respectivamente. Cuando θ y η tiendan a cero deberemos, en general, alcanzar el infinito en el plano físico (x e y tienden a infinito). Es evidente que deberemos tener $k < 1/3$, para que esto sea así. Sin embargo, las características límites en el plano físico no necesitan estar totalmente en el infinito, es decir, $y = \pm\infty$ no es necesario que se cumpla en todos los puntos sobre la curva $9\theta^2 = 4\eta^3$. En este caso (para $2k + 1/6 < 5/6$), el segundo término entre corchetes de la ecuación (110.6) debe ser cero. Así pues, la función $\Phi(\eta, \theta)$ debe venir dada por el primer término de (110.6):

$$\Phi = A\theta^{2k}F\left(-k, \quad -k+\tfrac{1}{2}; \quad -2k+\tfrac{5}{6}; \quad 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \tag{112.1}$$

La función $y(\theta, \eta)$ (que también satisface la ecuación de Euler-Tricomi) es de la misma forma, pero con $k - 1/2$ en lugar de k.

Si la expresión (112.1) es válida cerca (por ejemplo) de la característica superior ($\theta = +2/3\eta^{3/2}$), sin embargo, ya no será válida cerca de la característica inferior ($\theta = -2/3\eta^{3/2}$) para un valor arbitrario de $k < 1/3$. Por tanto, debemos exigir también que se mantenga la forma (112.1) de la función $\Phi(\theta, \eta)$ al rodear el origen del plano de la hodógrafa desde una característica a la otra a través del semiplano $\eta < 0$ (el trayecto $A'B'$ en la figura 102). Este tra-

área en las caras opuestas del plano xy. Así pues,

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \frac{\phi_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{[(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}} + \\ + \frac{1}{2\pi c}\int\int \frac{\phi_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\sqrt{[(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}},$$

en donde la integración se extiende a una circunferencia centrada en O, de radio ct. Si ϕ_0 y ϕ_0 son nulas excepto en una región finita C en el plano xy (o más exactamente, excepto en una región cilíndrica con sus generatrices paralelas al eje z), las oscilaciones en el punto O (figura 34) empiezan en el tiempo $t = d/c$, siendo d la distancia mínima de O a un punto dentro de la región. Sin embargo, después de este tiempo, la circunferencia de radio $ct > d$ centrada en O encerrará siempre parte o la totalidad de la región C, y ϕ tenderá únicamente asintóticamente a cero. Así pues, a diferencia de las ondas tridimensionales, las ondas bidimensionales consideradas aquí tienen un frente delantero pero no un frente trasero (comparar con § 70).

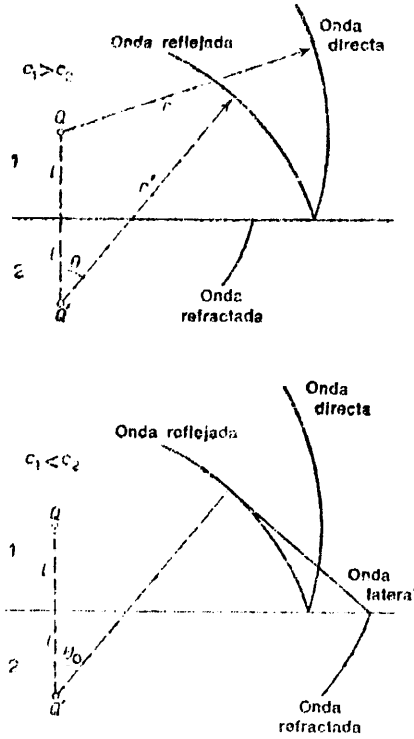

FIG. 35

Ahora veremos cómo pueden calcularse los coeficientes de estas fórmulas. El valor $k = -1/3$ es uno de aquellos para los cuales Φ_k se reduce a una función algebraica (ver § 111). La integral particular que determina Φ en el caso presente puede escribirse como $\Phi = \frac{1}{2}a_1\,\partial f/\partial\theta$, siendo a_1 una constante arbitraria positiva y f la raíz de la ecuación cúbica

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0 \tag{112.5}$$

que es la raíz real para $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$. De aquí que

$$\Phi = \tfrac{1}{2}a_1\,\partial f/\partial\theta = -a_1/2(f^2 - \eta), \tag{112.6}$$

y tenemos para las coordenadas

$$\left.\begin{aligned} x &= \partial\Phi/\partial\eta = \tfrac{1}{2}a_1(f^2+\eta)/(f^2-\eta)^3, \\ y &= \partial\Phi/\partial\theta = -a_1 f/(f^2-\eta)^3. \end{aligned}\right\} \tag{112.7}$$

Estas fórmulas pueden ponerse en una forma paramétrica conveniente utilizando como parámetro $s = f^2/(f^2 - \eta)$. Entonces

$$\left.\begin{aligned} x/y^{4/5} &= a_1^{1/5}(2s-1)/2s^{2/5}, \\ \eta y^{2/5} &= a_1^{2/5}s^{1/5}(s-1), \\ \theta y^{3/5} &= \tfrac{1}{3}a_1^{3/5}s^{4/5}(3-2s), \end{aligned}\right\} \tag{112.8}$$

que dan, en forma paramétrica, η y θ como funciones de las coordenadas. El parámetro s toma valores positivos desde cero hacia arriba ($s = 0$ corresponde a $x = -\infty$, es decir, a la corriente incidente desde el infinito). En particular, el valor $s = 1/2$ corresponde a $x = 0$, es decir, da la distribución de velocidades para valores grandes de y en un plano perpendicular al eje x y que pasa cerca del cuerpo. El valor $s = 1$ corresponde a la línea de transición ($\eta = 0$) y $s = 4/3$, como puede verse fácilmente, a la característica límite. El valor de la constante a_1 depende de la forma real del cuerpo y sólo puede determinarse a partir de una solución exacta del problema en todo el espacio.

Las fórmulas (112.8) se relacionan únicamente con la región delante de la onda de choque. Puede verse del modo siguiente la necesidad de que aparezca la onda de choque. Un cálculo sencillo a partir de la fórmula (110.5) da la expresión $a_1^2(4f^2 - \eta)/(f^2 - \eta)^3$ para el jacobiano Δ. Es fácil ver que $\Delta > 0$ (y no se anula) sobre las características y en todos los puntos situados a su izquierda, lo que corresponde a la región aguas arriba de las características límites en el plano físico. Sin embargo, a la derecha de las características Δ resulta ser cero y, por tanto, debe aparecer en esta región una onda de choque.

Las condiciones límites en la onda de choque que deben ser satisfechas por la solución de la ecuación de Euler-Tricomi son las siguientes. Sean

θ_1, η_1 y θ_2, η_2 los valores de θ y η en ambos lados de la discontinuidad. En primer lugar deben corresponder a la misma curva en el plano físico, es decir,

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \qquad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \tag{112.9}$$

A continuación, la condición de que la componente tangencial de la velocidad en la discontinuidad sea continua (es decir, que las derivadas del potencial ϕ a lo largo de la discontinuidad sean continuas) es equivalente a la condición de que el propio potencial sea continuo:

$$\phi(\theta_1, \eta_1) = \phi(\theta_2, \eta_2); \tag{112.10}$$

el potencial ϕ se determina a partir de la función Φ mediante (111.3). Finalmente, puede obtenerse otra condición a partir de la forma límite de la ecuación (86.6) de la polar del choque, que da una relación entre las componentes de la velocidad a ambos lados de la discontinuidad. Sustituyendo el ángulo χ en (86.6) por $\theta_2 - \theta_1$, y poniendo η_1, η_2 en lugar de v_1, v_2, obtenemos la relación

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2(\eta_2 + \eta_1). \tag{112.11}$$

En el caso presente, la solución de la ecuación de Euler-Tricomi detrás de la onda de choque (la región entre OF y OF' en el plano de la hodógrafa, figura 106) es de la misma forma que (112.5), (112.6), pero como es natural con una constante diferente (que denominaremos $-a_2$) en lugar de a_1. Las cuatro ecuaciones simultáneas (112.9)-(112.11) determinan el cociente a_2/a_1 y relacionan entre sí las magnitudes η_1, θ_1, η_2, θ_2. La solución de estas ecuaciones es bastante complicada; se obtienen los siguientes resultados. La onda de choque corresponde al valor $s = 1/6(5\sqrt{3} + 8) = 2{,}78$ del parámetro s de la fórmula (112.8), que da la forma del choque y la distribución de velocidades en la parte delantera de la discontinuidad. En la región detrás del choque (aguas abajo), el coeficiente $-a_2$ es negativo, y $f^2/(f^2 - \eta)$ toma valores negativos. Utilizando como parámetro la magnitud positiva $s = f^2/(\eta - f^2)$, tenemos, en lugar de (112.8), las fórmulas

$$\begin{gathered} x/y^{4/5} = a_2{}^{1/5}(2s+1)/2s^{2/5}, \qquad \eta y^{2/5} = a_2{}^{2/5}s^{1/5}(s+1), \\ \theta y^{3/5} = -\tfrac{1}{3}a_2{}^{3/5}s^{4/5}(2s+3), \end{gathered} \tag{112.12}$$

en donde

$$a_2/a_1 = (9\sqrt{3}+1)/(9\sqrt{3}-1) = 1{\cdot}14,$$

y s toma valores desde $1/6(5\sqrt{3} - 8) = 0{,}11$ sobre la onda de choque hasta cero a una distancia infinita aguas abajo.

La figura 107 muestra los gráficos de $\eta y^{2/5}$ y $\theta y^{3/5}$ como funciones de $xy^{-4/5}$,

calculadas a partir de las fórmulas (112.8) y (112.12) (tomándose la constante a_1 arbitrariamente como la unidad).

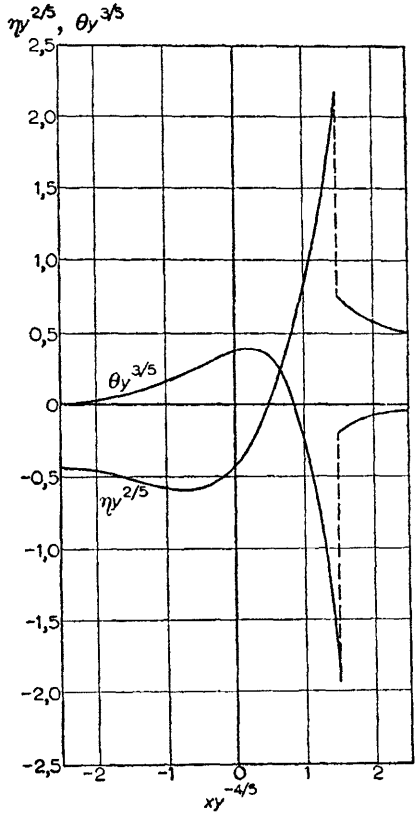

FIG. 107

§ 113. Intersección de las discontinuidades con la línea de transición

Como ejemplo adicional del estudio e investigación de las propiedades del flujo transónico mediante la ecuación de Euler-Tricomi, consideremos la reflexión de una discontinuidad débil en la línea de transición (L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, 1954).

Admitiremos que la discontinuidad débil incidente sobre la línea de transición (que alcanza el punto de intersección) es del tipo ordinario, formada (por ejemplo) por el flujo que pasa rodeando un ángulo agudo, es decir, de forma que las primeras derivadas espaciales de la velocidad son discontinuas en ella. Entonces se «refleja» en la línea de transición como otra dis-

continuidad débil, cuya naturaleza, sin embargo, es desconocida *a priori* y debe determinarse analizando el flujo cerca del punto de intersección. Tomaremos este punto como origen en el plano xy, de forma que el eje x tenga la dirección y sentido de la velocidad allí, de modo que corresponda también al origen en el plano de la hodógrafa.

Las discontinuidades débiles coinciden con las características, como sabemos. Supongamos que la característica Oa en el plano de la hodógrafa (figura 108a) corresponde a la discontinuidad incidente. Como las coordenadas x, y son continuas en la discontinuidad, las primeras derivadas Φ_η, Φ_θ deben ser también continuas. Por otra parte, las segundas derivadas de Φ pueden expresarse en función de las primeras derivadas espaciales de la velocidad y, por consiguiente, deben ser discontinuas. Si para designar las discontinuidades de las magnitudes las encerramos entre corchetes, tendremos, por tanto,

$$\text{sobre } Oa \quad [\Phi_\eta] = [\Phi_\theta] = 0; \quad [\Phi_{\theta\theta}], \quad [\Phi_{\theta\eta}], \quad [\Phi_{\eta\eta}] \neq 0. \tag{113.1}$$

Las propias funciones Φ en las regiones 1 y 2 a cada lado de la característica Oa no deben poseer singularidades sobre la característica. Puede construirse una solución de este tipo a partir del segundo miembro de (110.6) con $k = 11/12$, que es proporcional al cuadrado de la diferencia $1 - 4\eta^3/9\theta^2$ (la otra solución independiente $\Phi_{11/12}$ tiene una singularidad en la característica; ver más adelante). Las primeras derivadas de esta función se anulan en la característica y las segundas derivadas son finitas. Además, Φ puede incluir aquellas soluciones particulares de la ecuación de Euler-Tricomi que no den singularidades del flujo en el espacio físico. La solución de esta clase que tiene el menor grado en θ y η es $\eta\theta$ (§ 111). Así pues, busquemos Φ cerca de la característica Oa a cada lado de la misma en las formas:

$$\begin{aligned} &\text{en región 1,} \quad \Phi = -A\eta\theta - \pi B\zeta^2\theta^{11/6} F(\tfrac{1}{12}\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{12}\tfrac{9}{2}; 3; \zeta), \\ &\text{en región 2,} \quad \Phi = -A\eta\theta - \pi C\zeta^2\theta^{11/6} F(\tfrac{1}{12}\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{12}\tfrac{9}{2}; 3; \zeta), \end{aligned} \tag{113.2}$$

en donde A, B, C son constantes (que demostraremos que son positivas), y $\zeta \equiv 1 - 4\eta^3/9\theta^2$; en las características, $\zeta = 0$.

Una segunda característica en el plano de la hodógrafa (Ob en la figura 108a) corresponde a la discontinuidad débil reflejada en la línea de transición. Se obtiene la forma de la función Φ cerca de esta característica mediante la continuación analítica de las funciones (113.2), utilizando (110.11)-(110.13). Para $k = 11/12$, sin embargo, la función F_1 carece de significado y, por tanto, no podemos utilizar directamente estas fórmulas. En lugar de ello, debemos poner primero $k = (11/12) + \epsilon$, y luego hacer tender ϵ a cero. Aparecen entonces términos logarítmicos de acuerdo con la teoría general de las funciones hipergeométricas.

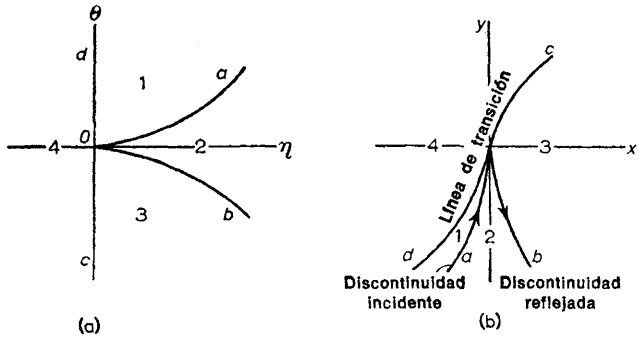

FIG. 108

El cálculo con (110.13) da la expresión siguiente para la función Φ en la región 3 cerca de la característica *Ob* (retemos los términos hasta el segundo orden en ζ):

$$\Phi = -A\theta\eta + B(-\theta)^{11/6}\{\zeta^2 \log|\zeta| - 108 + 41{\cdot}1\zeta + 4{\cdot}86\zeta^2\}; \qquad (113.3)$$

a la hora de determinar la naturaleza de la singularidad en la distribución de velocidades en la discontinuidad reflejada, sólo tiene realmente importancia el término logarítmico (ver más adelante).

Una transformación semejante [utilizando la fórmula (110.11)] de la función Φ en la región 1 desde la proximidad de la característica *Oa* a la de la *Ob* da una expresión análoga a (113.3), con $C/2$ en lugar de B. Por tanto, la condición de que las coordenadas x e y sean continuas en la característica da

$$C = 2B. \qquad (113.4)$$

A continuación, debemos comprobar que el jacobiano Δ (110.5) es positivo, puesto que no debe anularse. Cerca de la característica *Oa*, Δ puede calcularse a partir de las funciones (113.2) y se ve fácilmente que es positivo; el término principal de Δ es A^2. Cerca de la característica *Ob*, un cálculo empleando (113.3) da como término principal en Δ

$$\Delta = -16(3/2)^{1/6} AB\eta^{1/4} \log|\zeta|.$$

Cuando tendemos hacia la característica, el logaritmo tiende a $-\infty$. Por tanto, la condición $\Delta > 0$ da $AB > 0$, es decir, A y B deben tener el mismo signo.

Finalmente, para determinar la forma de la línea de transición, necesitamos una expresión para Φ cerca de las dos mitades superior e inferior del eje $\eta = 0$. Se obtiene una expresión válida cerca de la mitad superior, transformando simplemente la función hipergeométrica en Φ (113.2) en funciones hipergeométricas de argumento $1 - \zeta = 4\eta^3/9\theta^2$, que se anulan para $\eta = 0$.

Al calcular los valores numéricos de los coeficientes de esta transformación y si se retienen sólo los términos de grado más bajo en η, se obtiene

$$\Phi = -A\eta\theta - 18{,}6B\theta^{11/6}. \tag{113.5}$$

Una continuación analítica dentro de la región cercana a la mitad inferior del eje da

$$\Phi = -A\eta\theta - 18{,}6\sqrt{3}B(-\theta)^{11/6}; \tag{113.6}$$

los cálculos son semejantes a los utilizados en la obtención de las fórmulas de transformación (110.13).

Podemos ahora determinar la forma de todas las líneas que estamos considerando. En las características tenemos, omitiendo términos de orden superior, $x = \Phi_\eta = -A\theta$, $y = \Phi_\theta = -A\eta$. Supondremos arbitrariamente que la característica superior ($\theta > 0$) corresponde a la discontinuidad débil que alcanza a la intersección. Como la velocidad del gas tiene el sentido positivo del eje de las x, esta discontinuidad es la única que alcanza la intersección si está comprendida en el semiplano $x < 0$. De aquí se deduce que la constante A y, por tanto, también la constante B, debe ser positiva. La ecuación de la línea de discontinuidad en el plano físico es

$$x = -\tfrac{2}{3}A^{-1/2}(-y)^{3/2}. \tag{113.7}$$

La discontinuidad «reflejada», que corresponde a la característica inferior, viene dada por la ecuación

$$x = \tfrac{2}{3}A^{-1/2}(-y)^{3/2}, \tag{113.8}$$

es decir, las dos discontinuidades son las ramas de una parábola semicúbica con un vértice en la línea de transición (figura 108b, en la cual están marcadas las líneas y regiones en correspondencia con las de la figura 108a).

Se obtiene la ecuación de la línea de la transición a partir de las funciones (113.5) y (113.6). Efectuando la derivación respecto a η y θ, y poniendo luego $\eta = 0$, obtenemos de (113.5) la ecuación de la parte para la cual $\theta > 0$: $x = -A\theta$, $y = -11/6 \cdot 19{,}6B\theta^{5/6}$; de aquí que

$$y = -36{,}0B(-x/A)^{5/6}. \tag{113.9}$$

Esta es la parte inferior de la línea de transición en la figura 108b. Análogamente, obtenemos a partir de (113.6) la ecuación de la parte superior de esta línea:

$$y = \sqrt{3} \cdot 36{,}0B(x/A)^{5/6}. \tag{113.10}$$

Así pues, ambas discontinuidades y ambas ramas de la línea de transición tienen una tangente común (el eje y) en el punto de intersección O. Cerca

de este punto las dos ramas de la línea de transición están en lados opuestos del eje y.

En la discontinuidad que alcanza O, las derivadas espaciales de la velocidad son discontinuas; como magnitud característica podemos considerar la discontinuidad de la derivada $(\partial\eta/\partial x)_y$. Utilizando el hecho de que

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(\eta, \theta)} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = -\frac{\Phi_{\theta\theta}}{\Delta}$$

y las fórmulas (113.2), (113.4), obtenemos

$$[(\partial\eta/\partial x)_y]_2^1 = 26{,}9B\eta^{-1/4}/A^2 = 29{,}9B)-y)^{-1/4}/A^{7/4}. \qquad (113.11)$$

Así pues, la discontinuidad aumenta como $|y|^{-1/4}$ cuando nos acercamos al punto de intersección.

En la discontinuidad débil reflejada, las derivadas de la velocidad no son discontinuas, pero la distribución de velocidades tiene una singularidad muy curiosa. Calculando las coordenadas $x = \Phi_\eta$ e $y = \Phi_\theta$ como funciones de η, θ a partir de (113.3) (conservando sólo el primer término en el corchete), podemos poner la dependencia de η con x para un valor dado de y cerca de la discontinuidad reflejada en la forma paramétrica

$$\eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{(A|y|)}} - \frac{1}{6A}|y|\zeta,$$

$$x - x_0 = \frac{1}{3\sqrt{A}}|y|^{3/2}\zeta - 5{,}7\frac{B|y|^{7/4}}{A^{7/4}}\zeta \log|\zeta|, \qquad (113.12)$$

en donde ζ es el parámetro y $x_0 = x_0(y)$ es la ecuación de la discontinuidad en el plano físico.

También puede utilizarse la ecuación de Euler-Tricomi en el problema de si puede terminar una onda de choque en su intersección con la línea de transición (el punto O en la figura 109a, que la onda de choque alcanza†). Cerca de dicho punto la onda de choque es débil, es decir, el flujo es transónico. Sin embargo, la ecuación de Euler-Tricomi aparentemente no tiene ninguna solución que pueda describir un flujo de este tipo y satisfacer todas las condiciones necesarias en el choque. Ni, aparentemente, existen soluciones que correspondan a la terminación de la onda de choque y de la línea

† El «origen» de la onda de choque puede estar en un punto cualquiera en un flujo supersónico y sus propiedades pueden investigarse sin ninguna dificultad especial; ver el final del § 107.

de transición en su punto de intersección (figura 109b; la onda de choque no alcanza entonces literalmente el punto *O*, puesto que el flujo en un lado del mismo es subsónico). Esto significa que la onda de choque debe ir hasta el infinito o (si se formó en una región supersónica local; ver el principio de § 112) debe curvarse como se ve en la figura 109c, de modo que esté «saliendo» respecto a sus propios dos extremos. La línea de transición puede terminar en un punto de la intersección con una onda de choque, pero la intensidad de esta última no se anula allí.

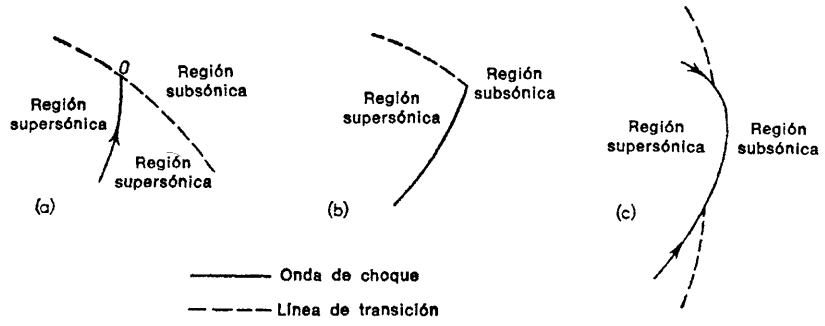

FIG. 109

CAPÍTULO XIII

FLUJO QUE RODEA A CUERPOS FINITOS

§ 114. Formación de ondas de choque en flujo supersónico que rodea a los cuerpos

Razonamientos sencillos demuestran que, en el flujo supersónico que rodea un cuerpo de forma arbitraria, debe formarse una onda de choque delante del cuerpo. Las perturbaciones del flujo supersónico producidas por la presencia del cuerpo se propagan sólo aguas abajo. De aquí que una corriente supersónica uniforme incidente sobre el cuerpo deberá carecer de perturbaciones, por lo menos hasta el frente delantero del cuerpo. La componente normal de la velocidad del gas deberá entonces ser no nula en la superficie que se encuentra allí, en contradicción con la condición límite necesaria. La resolución de esta dificultad puede estar sólo en la presencia de una onda de choque, como resultado de la cual resultará subsónico el flujo del gas entre éste y el frente o borde delantero del cuerpo.

Así pues, se forma una onda de choque delante del cuerpo cuando el flujo incidente es supersónico y este choque, en general, no toca el cuerpo; suele denominarse *onda de proa*. Delante de la onda de choque el flujo es uniforme; detrás del mismo, el flujo se ve modificado y se desvía rodeando el cuerpo (figura 110a). La superficie de la onda de choque se extiende hasta el infinito y a grandes distancias del cuerpo, en donde el choque es débil, corta a las líneas de corrientes incidentes formando un ángulo que se aproxima al ángulo de Mach.

La onda de choque puede tocar al cuerpo sólo cuando el frente delantero de este último es puntiagudo. Entonces la superficie de discontinuidad tiene un punto en el mismo lugar (figura 110b); debe recordarse que en el flujo asimétrico parte de esta superficie puede ser una discontinuidad débil.

Sin embargo, en el caso de un cuerpo de una forma dada, este tipo de esquema de flujo es sólo posible para velocidades que superen cierto límite; a velocidades inferiores, la onda de choque se «destaca» del frente delantero del cuerpo (ver §§ 104, 105), incluso aunque este último sea puntiagudo.

Consideremos el flujo supersónico que rodea un sólido de revolución (en una dirección paralela a su eje) y determinemos la presión del gas en el

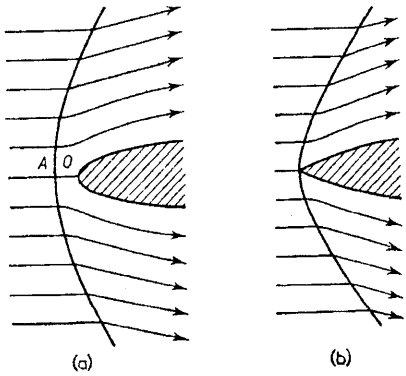

FIG. 110

extremo redondeado delantero del cuerpo (punto de estancamiento O de la figura 110a). A partir de la simetría resulta evidente que la línea de corriente que termina en O corta en ángulo recto a la onda de choque, de modo que la componente de la velocidad en A normal a la superficie de discontinuidad es la misma que la velocidad total. Los valores de las magnitudes en la corriente incidente se designarán, como es lo usual, por el sufijo o subíndice 1, y los valores detrás de la onda de choque en el punto A por el subíndice 2. Los últimos pueden determinarse de una vez mediante las fórmulas (85.7) y (85.8):

$$p_2 = p_1[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]/(\gamma + 1),$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1}, \qquad \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}.$$

La presión p_0 en el punto O (en donde la velocidad del gas es $v = 0$) puede obtenerse ahora mediante las fórmulas que dan la variación de las magnitudes a lo largo de una línea de corriente. Tenemos (ver § 80, problema)

$$p_0 = p_2\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{v_2^2}{c_2^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)},$$

y un cálculo sencillo da

$$p_0 = p_1\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{M_1^2}{[\gamma - (\gamma - 1)/2M_1^2]^{1/(\gamma-1)}}. \tag{114.1}$$

Esta expresión determina la presión en el extremo delantero para un flujo incidente supersónico ($M_1 > 1$).

Para comparación, daremos la fórmula correspondiente a la presión en el

punto de estancamiento obtenida para un retardo adiabático continuo del gas, sin onda de choque (como sería lo correcto en el caso de un flujo incidente subsónico):

$$p_0 = p_1[1+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2]^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{114.2}$$

Para $\mathrm{M}_1 = 1$ las dos fórmulas dan el mismo valor de p_0, pero para $\mathrm{M}_1 > 1$ la presión dada por la fórmula (114.2) es siempre mayor que la presión verdadera p_0 dada por la fórmula (114.1).†

En el límite de velocidades muy grandes ($\mathrm{M}_1 \gg 1$), la fórmula (114.1) da

$$p_0 = p_1\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \gamma^{-1/(\gamma-1)}\mathrm{M}_1^2, \tag{114.3}$$

es decir, la presión p_0 es proporcional al cuadrado de la velocidad incidente. A partir de este resultado se puede obtener la conclusión de que la fuerza de arrastre total que actúa sobre el cuerpo a velocidades grandes comparadas con la del sonido es proporcional al cuadrado de la velocidad. Debe señalarse que este resultado coincide con la ley que rige la fuerza de arrastre que actúa a velocidades pequeñas en comparación con la del sonido, pero todavía suficientemente grandes como para que resulte elevado el número de Reynolds (ver § 45).

No se ha realizado aún ningún estudio o investigación acerca de las propiedades básicas del flujo supersónico que rodea a cuerpos de forma arbitraria. Además de que sabemos que deben formarse ondas de choque, podemos decir también que deben existir dos ondas de choque sucesivas a distancias grandes del cuerpo (L. LANDAU, 1945). Puesto que las perturbaciones producidas por el cuerpo a distancias elevadas son pequeñas, pueden considerarse, por lo tanto, como una onda sonora cilíndrica que sale del eje x (y que pasa a través del cuerpo paralelamente a la dirección del flujo); considerando, como es lo normal, el flujo en un sistema coordenado en el que el cuerpo está en reposo, tendremos una onda en la que el tiempo se representa por x/v_1 y la velocidad de propagación por $c_1/\sqrt{(\mathrm{M}_1^2-1)}$ (ver § 115). Por consiguiente, podemos aplicar inmediatamente los resultados obtenidos en § 95 para una onda cilíndrica a distancias grandes de la fuente o foco. Así se llega al siguiente esquema de ondas de choque lejos del cuerpo: en el primer choque, la presión aumenta discontinuamente, de modo que detrás

† Esto es cierto en general y no depende de la hipótesis de gas perfecto. Efectivamente, cuando se encuentra presente una onda de choque, la entropía del gas en el punto O es s_0 mayor que s_1, mientras que si estuviera ausente la onda de choque s_0 sería igual a s_1. La entalpía es, en cualquier caso, $w_0 = w_1 + v_1^2/2$, puesto que la cantidad $w + v^2/2$ resulta invariante cuando una línea de corriente corta a una discontinuidad de compresión normal. A partir de la identidad termodinámica $\mathrm{d}w = T\mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\rho$ se deduce, por tanto, que la derivada $(\partial p/\partial s)_w = -\rho T < 0$, es decir, un aumento de entropía cuando w permanece constante lleva consigo una disminución de presión, y a partir de aquí se obtiene la conclusión mencionada.

de ella existe una condensación; luego sigue una región en la que gradualmente disminuye la presión hasta convertirse en una rarefacción, después de la cual aumenta la presión de nuevo discontinuamente en el segundo choque. La intensidad del choque delantero disminuye proporcionalmente a $r^{-3/4}$, siendo r la distancia al cuerpo, mientras que la distancia entre los dos choques aumenta proporcionalmente a $r^{1/4}$.

Examinemos a continuación la aparición y desarrollo de las ondas de choque cuando aumenta gradualmente el número M_1. En primer lugar aparece una región supersónica para cierto valor de M_1 menor que la unidad, como una región adjunta a la superficie del cuerpo. Por lo menos se presenta en esta región una onda de choque. Sin embargo, no se sabe si esta onda debe aparecer tan pronto como se forma la región supersónica o si se presenta para algún valor de M_1 más alto (pero todavía menor que la unidad). También se desconoce si la onda de choque abandona la superficie del cuerpo cuando se forma por primera vez (y es aún muy débil) o empieza a alguna distancia. Como es natural, en el límite de la zona supersónica la onda de choque se extingue; todavía no se ha llevado a cabo ninguna investigación de las propiedades de la onda de choque cerca del punto en donde se extingue (como ya se mencionó al principio del § 112).

Cuando M_1 aumenta, la región supersónica se expansiona y aumenta la longitud de la onda de choque; para $M_1 = 1$ alcanza el infinito. Esta onda de choque es aquélla cuya existencia se ha demostrado para $M_1 = 1$ en § 112 (para el caso bidimensional); se sigue también que la onda de choque debe aparecer primeramente para $M_1 < 1$.

Tan pronto como M_1 supera a la unidad, aparece otra onda de choque, la onda de proa, que intersecta a la totalidad de la corriente gaseosa incidente de anchura infinita. Cuando M_1 es exactamente la unidad, el flujo delante del cuerpo es totalmente subsónico (§ 112). Para $M_1 > 1$, pero arbitrariamente cerca de la unidad; por consiguiente, la parte supersónica de la corriente incidente y, en consecuencia, la onda de proa, están arbitrariamente lejos delante del cuerpo. Cuando M_1 aumenta aún más, la onda de proa se acerca gradualmente al cuerpo.

§ 115. Flujo supersónico que rodea a un cuerpo puntiagudo

La forma que debe poseer un cuerpo para ser aerodinámico en flujo supersónico, es decir, adaptarse a las líneas de corriente, de modo que esté sometido a una fuerza de arrastre o resistencia lo más pequeña posible, es muy diferente de la forma correspondiente en el caso del flujo subsónico. Podemos recordar que en este último caso los cuerpos aerodinámicos eran aquellos que tenían forma alargada, con la parte delantera redondeada, mientras que la trasera terminaba en punta. Sin embargo, en el flujo super-

sónico que rodease tal cuerpo se formaría una onda de choque muy intensa delante de él, dando origen a un notable incremento de la resistencia o arrastre. Por consiguiente, en el caso supersónico un cuerpo aerodinámico largo debe tener ambos extremos en forma puntiaguda, debiendo ser pequeño el ángulo de dichas puntas; si el cuerpo está inclinado respecto a la dirección del flujo, también deberá ser pequeño el ángulo entre ellos (ángulo de ataque).

En el flujo supersónico que rodea a un cuerpo de esta forma, la velocidad del gas es en todo punto muy diferente en valor o dirección de la velocidad incidente, incluso cerca del cuerpo, y las ondas de choque formadas son débiles; la intensidad de la onda de proa disminuye cuando lo hace el ángulo de la parte delantera del cuerpo. Lejos del mismo, el flujo gaseoso se compone de ondas sonoras salientes. Puede considerarse que la parte principal del arrastre se debe a la conversión de energía cinética del cuerpo móvil en la energía de las ondas sonoras que emite. Este arrastre, que se produce sólo en el flujo supersónico, se denomina *arrastre o resistencia de onda*;† puede calcularse de una forma general que es válida para un cuerpo de sección recta cualquiera (T. VON KÁRMÁN, 1936).

La naturaleza del flujo que acabamos de describir hace posible utilizar la ecuación linealizada (106.4) para el potencial:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0, \tag{115.1}$$

en donde para mayor brevedad hemos introducido la constante positiva

$$\beta^2 = (v_1{}^2 - c_1{}^2)/c_1{}^2; \tag{115.2}$$

el eje x tiene la dirección del flujo, el subíndice 1 designa magnitudes que pertenecen a la corriente incidente y $1/\beta$ es exactamente la tangente del ángulo de Mach.

La ecuación (115.1) es formalmente idéntica a la ecuación de ondas bidimensional, representando x/v_1 el tiempo y v_1/β la velocidad de propagación de las ondas. Esto no es accidental; el significado físico consiste en que el gas lejos del cuerpo posee un flujo que se compone, como ya hemos mencionado, de ondas sonoras salientes «emitidas» por el cuerpo. Si se considera el gas en el infinito como estando en reposo, mientras que es el cuerpo el que está en movimiento, la sección recta del cuerpo en un punto determinado del espacio variará con el tiempo y la distancia a la que se habrá propagado la perturbación en el instante t (es decir, la distancia hasta el cono de Mach) aumentará proporcionalmente con $v_1 t/b$. Así pues, tendremos

† Se obtiene el arrastre total sumando al arrastre de onda las fuerzas debidas al rozamiento y a la separación en la parte trasera del cuerpo.

una emisión bidimensional de sonido (que se propaga con la velocidad v_1/b) por el perfil variable.

Utilizando como guía esta «analogía sónica», podemos escribir inmediatamente a continuación la expresión buscada para el potencial de velocidades del gas, utilizando la fórmula (73.15) para el potencial de las ondas sonoras cilíndricas emitidas por un foco o fuente (a distancias grandes en comparación con la propia dimensión del foco) y sustituyendo ct por x/β.

Sea $S(x)$ el área de la sección recta del cuerpo en un plano perpendicular a la dirección del flujo (el eje x), y l la longitud del cuerpo en dicha dirección; tomemos el origen en el extremo delantero del cuerpo. Entonces

$$\phi(x,r) = -\frac{v_1}{2\pi}\int_0^{x-\beta r}\frac{S'(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{[(x-\xi)^2-\beta^2r^2]}}; \tag{115.3}$$

se toma el límite inferior como cero, puesto que $S(x) \equiv 0$ para $x < 0$ (y para $x > l$).

Así pues, hemos determinado completamente el flujo del gas a distancias r del eje que sean grandes en comparación con el espesor del cuerpo.† Como es natural, las perturbaciones que abandonan el cuerpo en un flujo supersónico se propagan sólo dentro de la región detrás del cono $x - \beta r = 0$, cuyo vértice está en el extremo delantero del cuerpo; delante de este cono tenemos simplemente $\phi = 0$ (flujo uniforme). Entre los conos $x - \beta r = 0$ y $x - \beta r = l$, el potencial está determinado por la fórmula (115.3); detrás de este último cono (cuyo vértice está en el extremo trasero del cuerpo) el límite superior de la integral en (115.3) es evidentemente la constante l. En la aproximación considerada ambos conos son discontinuidades débiles; en realidad, son ondas de choque débiles.

La fuerza de rozamiento o arrastre que actúa sobre el cuerpo es precisamente la componente x del impulso transportado por las ondas sonoras por unidad de tiempo. Tomemos una superficie cilíndrica de radio r grande y eje situado a lo largo del eje x. La componente x de la densidad de flujo del impulso a través de esta superficie es $\Pi_{xr} = \rho v_r(v_x + v_1) \cong \rho_1(\partial\phi/\partial r)(v_1 + \partial\phi/\partial x)$. Al integrar respecto a toda la superficie, el primer término da cero, puesto que la integral de ρv_r es el flujo de masa total que atraviesa la superficie, que es cero. Así pues,

$$F_x = -2\pi r\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_{xr}\,\mathrm{d}x = -2\pi r\rho_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x. \tag{115.4}$$

† En el caso de un flujo axial que rodea un cuerpo con simetría axial, es válida la fórmula (115.3) para todo valor de r hasta la superficie del cuerpo. En particular, podemos deducir a partir de ella la fórmula (105.6) correspondiente al flujo que rodea a un cono estrecho.

A distancias grandes (en la «región de ondas»), las derivadas del potencial pueden calcularse como en § 73 [ver fórmula (73.17)], y tenemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2r}}\int_0^{x-\beta r}\frac{S''(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(x-\xi-\beta r)}}.$$

Esta expresión se sustituye en (115.4) y la integral al cuadrado se escribe como una integral doble; poniendo por brevedad $x-\beta r = X$, obtenemos

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^X\int_0^X \frac{S''(\xi_1)S''(\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}X}{\sqrt{[(X-\xi_1)(X-\xi_2)]}}.$$

Puede efectuarse la integración respecto a X; después de cambiar el orden de integración, la integral se extiende desde el valor de ξ_1 o ξ_2 que sea mayor hasta el infinito. En primer lugar, tomaremos como límite superior una cantidad grande pero finita L, que posteriormente haremos tender a infinito. Así

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi}\int_0^l\int_0^{\xi_2} S''(\xi_1)S''(\xi_2)[\log(\xi_2-\xi_1)-\log 4L]\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2.$$

La integral del término que contiene el factor constante $\log 4L$ es nula, puesto que no sólo se anula el área $S(x)$, sino también su derivada $S'(x)$ en los extremos puntiagudos del cuerpo. Por consiguiente, tenemos

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi}\int_0^l\int_0^{\xi_2} S''(\xi_1)S''(\xi_2)\log(\xi_2-\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

o sea,

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi}\int_0^l\int_0^l S''(\xi_1)S''(\xi_2)\log|\xi_2-\xi_1|\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2. \qquad (115.5)$$

Esta es la fórmula requerida para el arrastre por la onda de un cuerpo delgado terminado en punta.† El orden de magnitud de la integral es $(S/l^2)^2 l^2$, siendo S el área de cierta sección recta del cuerpo. De aquí que $F_x \sim \rho_1 v_1^2 S^2/l^2$. El coeficiente de arrastre para un cuerpo alargado puede definirse de modo convencional, en función del cuadrado de la longitud, como $C_x = F_x/\rho_1 v_1^2 l^2/2$. Entonces, en este caso

$$C_x \sim S^2/l^4; \qquad (115.6)$$

es proporcional al cuadrado del área de la sección recta.

† El empuje ascensional (en el caso de un cuerpo que no posea simetria axial o de ángulo de ataque no nulo) es cero en la aproximación que estamos considerando aquí.

Podemos señalar la analogía formal completa que existe entre la fórmula (115.5) y la fórmula (47.4) correspondiente al arrastre inducido sobre un ala delgada; la función $\Gamma(z)$ en (47.4) se ha sustituido aquí por la función $v_1 S'(x)$. Podemos tener en cuenta esta analogía y utilizar el método descrito al final del § 47 para calcular la integral en (115.5).

También debe señalarse que el arrastre por onda dado por la fórmula (115.5) resulta invariable si se invierte el sentido del flujo: la integral es independiente del sentido en que se extiende el cuerpo. Esta propiedad de la fuerza de arrastre es característica de la teoría lineal.†

Finalmente, estudiaremos el margen de aplicación de esta fórmula. Este tema puede enfocarse del modo siguiente. La amplitud de oscilación de las partículas del gas en las ondas sonoras «emitidas» por el cuerpo es del orden de magnitud del espesor del cuerpo, que designaremos por δ. La velocidad de las oscilaciones es, de acuerdo con ello, del orden del cociente $\delta:(l/v_1)$ entre la amplitud δ y el período l/v_1 de la onda. La aproximación lineal para la propagación de ondas sonoras (es decir, la ecuación linealizada para el potencial) requiere siempre, sin embargo, que la velocidad del gas sea pequeña en comparación con la velocidad del sonido, es decir, debemos tener que $v_1/\beta \gg v_1\delta/l$, o, lo que en la práctica es lo mismo,

$$M_1 \ll l/\delta. \tag{115.7}$$

Así pues, la teoría dada anteriormente resulta inaplicable para valores de M_1 comparables con la razón existente entre la longitud y el espesor del cuerpo.

Como es natural, también es aplicable en el caso límite opuesto, en el que M_1 es cercano a la unidad y resulta invalidada la linealización de las ecuaciones.

PROBLEMA

Determinar la forma del sólido alargado de revolución que experimenta la menor fuerza de arrastre para un volumen V y longitud l dados.

Solución. Teniendo en cuenta la analogía mencionada en el texto, utilizaremos una variable θ tal que $x = l/2(1-\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi$; el origen de x está en el extremo delantero del cuerpo); y escribamos la función $f(x) = S'(x)$ como

$$f = -l\sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{sen} n\theta;$$

la condición $S = 0$ para $x = 0$ y l significa que sólo pueden aparecer en la suma términos con $n \geq 2$. El coeficiente de arrastre es, entonces,

$$C_x = \tfrac{1}{4}\pi \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2.$$

† También es cierta en la teoría del arrastre de onda sobre alas delgadas dada en el § 117.

Se calculan el área $S(x)$ y el volumen total V del cuerpo a partir de la función $f(x)$ como

$$S = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x, \qquad V = \int_0^l S(x)\mathrm{d}x.$$

Un cálculo simple da $V = \pi l^3 A_2/16$, es decir, el volumen queda determinado por el coeficiente A_2 solamente. Por consiguiente, se alcanza el mínimo F_x si $A_n = 0$ para $n \geqq 3$. El resultado es

$$C_{x,\min} = (128/\pi)(V/l^3)^2 = (9\pi/2)(S_{\max}/l^2)^2.$$

El área de la sección recta del cuerpo es $S = l^2 A_2/3\,\mathrm{sen}^3\theta$, y , por consiguiente, el radio viene dado en función de x por $R(x) = \sqrt{2}(8/\pi)(V/3l^4)^{1/2}[x(l-x)]^{3/4}$. El cuerpo es simétrico respecto al plano $x = l/2$.†

§ 116. Flujo subsónico que rodea un ala delgada

Consideremos el flujo subsónico de un gas que rodea un ala delgada aerodinámica. Como sucede en el caso de un fluido incompresible, un ala que sea aerodinámica o currentilínea al flujo subsónico debe tener un borde posterior delgado y agudo, mientras que el delantero debe ser redondeado; el ángulo de ataque debe ser pequeño. Tomaremos la dirección del flujo como el eje x y la dirección del propio ala como eje z.

La velocidad del gas en un punto cualquiera‡ difiere grandemente de la velocidad $\mathbf{v}_1$ de la corriente incidente, de modo que podemos utilizar para el potencial la ecuación linealizada:

$$(1-\mathrm{M}_1^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \tag{116.1}$$

En la superficie del ala (que llamaremos C) la velocidad debe ser tangencial; mediante el vector unitario $\mathbf{n}$ a lo largo de la normal a la superficie, podemos escribir esta condición como

$$\left(v_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}n_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}n_z = 0.$$

Puesto que el ala es aplanada y el ángulo de ataque es pequeño, la normal $\mathbf{n}$ es casi paralela al eje y, de modo que $|n_y|$ es casi la unidad, mientras que n_x y n_z son pequeños. Por tanto, podemos despreciar los términos de segundo orden $n_x\partial\phi/\partial x$ y $n_z\partial\phi/\partial z$, y sustituir n_y por ± 1 ($+1$ en la superficie superior y -1 en la superficie inferior). Así pues, la condición límite de la

† Aunque $R(x)$ se anula en los extremos del cuerpo, $R'(x)$ resulta infinita, es decir, el cuerpo no termina en un punto; por consiguiente, la aproximación que fundamenta el método no resulta estrictamente aplicable cerca de los extremos.

‡ Excepto en una pequeña región cerca del borde de ataque del ala, en donde existe una línea de estancamiento.

ecuación (116.1) es

$$v_1 n_x \pm \partial\phi/\partial y = 0. \tag{116.2}$$

Como se supone que el ala es delgada, en su superficie puede tomarse $\partial\phi/\partial y$ como el valor límite para $y \to 0$.

La solución de la ecuación (116.1) con la condición (116.2) puede reducirse fácilmente a la resolución de un problema de flujo incompresible. Para ello, utilizaremos en lugar de las coordenadas x, y, z las variables

$$x' = x, \qquad y' = y\sqrt{(1-M_1^2)}, \qquad z' = z\sqrt{(1-M_1^2)}. \tag{116.3}$$

Con estas variables la ecuación (116.1) se reduce a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z'^2} = 0, \tag{116.4}$$

es decir, la ecuación de Laplace. La superficie del cuerpo se sustituye por otra, C', obtenida dejando invariables los perfiles de las secciones rectas cuando se corta por planos paralelos al plano xy, pero reduciendo en la razón $\sqrt{(1-M_1^2)}$ todas las dimensiones en la dirección del ala (dirección z).

La condición límite (116.2) se reduce entonces a

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\phi}{\partial y'}\sqrt{(1-M_1^2)} = 0,$$

y puede volverse a obtener la forma anterior introduciendo en lugar de ϕ un nuevo potencial ϕ':

$$\phi' = \phi\sqrt{(1-M_1^2)}. \tag{116.5}$$

Tenemos entonces para ϕ' la ecuación de Laplace con la condición límite

$$v_1 n_x \pm \partial\phi'/\partial y' = 0, \tag{116.6}$$

que debe satisfacerse para $y' = 0$.

Sin embargo, la ecuación (116.4) con la condición límite (116.6) es la ecuación que debe satisfacer el potencial de velocidad de un fluido incompresible que fluye junto a la superficie C'. Así pues, el problema de determinar la distribución de velocidades en el flujo compresible que rodea un ala con superficie C es equivalente al de hallar la distribución de velocidades en el flujo incompresible que rodea un ala de superficie C'.

A continuación, consideremos la fuerza ascensional F_y que actúa sobre el ala. En primer lugar, observemos que la deducción de la fórmula de Yukovski [dada en § 37 (37.4)] es totalmente válida para un fluido compresible, puesto que puede sustituirse la densidad variable ρ del fluido en esta aproximación por una constante ρ_1. Así pues,

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma \, dz, \tag{116.7}$$

en donde la integración se realiza a lo largo de la envergadura l_z del ala. A partir de la relación (116.5) y de la igualdad de los perfiles transversales de las alas C y C' se deduce que la circulación de la velocidad Γ en el flujo compresible que rodea el ala C está relacionada con la circulación Γ' en el flujo incompresible que rodea el ala C' por

$$\Gamma' = \Gamma\sqrt{(1-M_1^2)}. \tag{116.8}$$

Sustituyendo esta expresión en (116.7) y cambiando a una integración respecto a z', obtenemos

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma' \, dz'/(1-M_1^2).$$

El numerador es la fuerza ascensional sobre el ala C' en un fluido incompresible. Designándola por F'_y, tenemos

$$F_y = F'_y/(1-M_1^2). \tag{116.9}$$

Introduciendo los coeficientes de empuje ascensional

$$C_y = F_y/\tfrac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z, \qquad C'_y = F'_y/\tfrac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z'$$

(en donde l_x, l_z y l_x, $l_z' = l_z\sqrt{(1-M_1^2)}$ son las longitudes de las alas C y C' en las direcciones x y z) podemos volver a escribir estas ecuaciones como

$$C_y = C'_y/\sqrt{(1-M_1^2)}. \tag{116.10}$$

En el caso de alas de gran envergadura (y perfil constante), el coeficiente de empuje ascensional en un fluido incompresible es proporcional al ángulo de ataque y no depende de la longitud ni de la anchura del ala:

$$C'_y = \text{constante} \times \alpha, \tag{116.11}$$

en donde la constante depende sólo de la forma del perfil (ver § 46). Por consiguiente, en este caso, (116.10) puede sustituirse por

$$C_y = C_y^{(0)}/\sqrt{(1-M_1^2)}, \tag{116.12}$$

en donde C_y y $C_y^{(0)}$ son los coeficientes de empuje ascensional para la misma ala en fluidos compresible e incompresible, respectivamente. Así pues, tenemos la regla de que la fuerza ascensional que actúa sobre un ala larga en un fluido compresible es $1/\sqrt{(1-M_1^2)}$ veces la que actúa sobre la misma ala (y el mismo ángulo de ataque) en un fluido incompresible (L. PRANDTL, 1922, H. GLAUERT, 1928).

Para la fuerza de arrastre o de rozamiento pueden obtenerse relaciones semejantes. Junto con la fórmula de Yukovski para la fuerza ascensional, la fórmula (47.4) para el arrastre inducido sobre un ala es también totalmente aplicable al flujo compresible. Efectuando las mismas transformaciones

(116.3) y (116.8), se obtiene

$$F_x = F'_x/\sqrt{(1-M_1^2)}, \tag{116.13}$$

en donde F'_x es el arrastre sobre el ala C' en un fluido incompresible. Cuando aumenta la envergadura, el arrastre inducido tiende a un límite constante (§ 47). En el caso de alas suficientemente largas podemos, por tanto, sustituir F'_x por $F_x^{(0)}$ (el arrastre en un fluido compresible para el ala C). Entonces el coeficiente de arrastre es

$$C_x = C_x^{(0)}/(1-M_1^2). \tag{116.14}$$

Comparando esta expresión con (116.12), vemos que el cociente C_y^2/C_x es el mismo para fluidos compresibles e incompresibles.

Como es natural, todos los resultados dados aquí dejan de ser válidos para valores de M_1 cercanos a la unidad, puesto que entonces resulta inaplicable la teoría lineal.

§ 117. Flujo supersónico que rodea un ala

Si el ala es aerodinámica o currentilínea en una corriente supersónica debe ser afilada por ambos extremos, como los cuerpos delgados estudiados en § 115.

Consideraremos ahora sólo el flujo que rodea un ala delgada de envergadura muy grande, siendo el perfil constante a lo largo de la misma. Considerando la envergadura como infinita, tenemos un flujo gaseoso bidimensional (en el plano xy). En lugar de la ecuación (115.1), tendremos ahora para el potencial la ecuación

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0, \tag{117.1}$$

con la condición límite

$$[\partial\phi/\partial y]_{y\to\pm 0} = \mp v_1 n_x, \tag{117.2}$$

en donde los signos $\mp$ del segundo miembro se relacionan con la superficie superior e inferior del ala, respectivamente. La ecuación (117.1) es una ecuación de ondas monodimensional y su solución general es de la forma $\phi = f_1(x-\beta y) + f_2(x+\beta y)$. El hecho de que las perturbaciones que afectan al flujo arrancan del propio cuerpo, significa que encima del ala ($y>0$) debemos tener $f_2 \equiv 0$, de modo que $\phi = f_1(x-\beta y)$, y debajo del ala ($y<0$) $\phi = f_2(x+\beta y)$. Para concretar, consideraremos la región por encima del ala en donde $\phi = f(x-\beta y)$. La función f se determina a partir de la condición (117.2) haciendo $n_x \approx -\zeta_2'(x)$, en donde $y = \zeta_2(x)$ es la ecuación de la

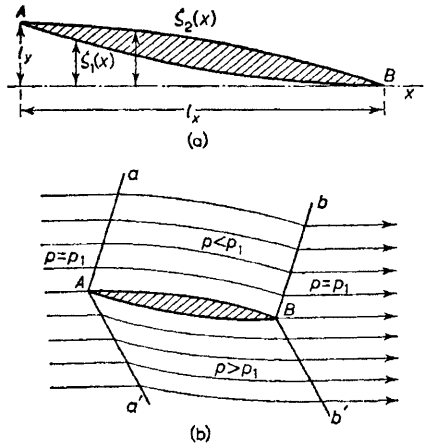

FIG. 111

parte superior del perfil del ala (figura 111a). Tenemos $[\partial\phi/\partial y]_{y\to+0} = -\beta f'(x) = v_1\zeta_2'(x)$; de aquí que $f = -v_1\zeta_2(x)/\beta$. Así pues, la distribución de velocidades para $y > 0$ viene dada por el potencial

$$\phi(x,y) = -(v_1/\beta)\zeta_2(x-\beta y). \qquad (117.3)$$

De modo semejante obtenemos, para $y < 0$, $\phi = (v_1/\beta)\zeta_1(x+\beta y)$, en donde $y = \zeta_1(x)$ es la ecuación de la parte inferior del perfil. Debe señalarse que el potencial y, por lo tanto, las demás magnitudes son constantes a lo largo de las rectas $x \pm \beta y =$ constante (las características), de acuerdo con los resultados de § 107, de los cuales es un caso particular la solución que acabamos de hallar.

El esquema del flujo es cualitativamente del modo siguiente. Por los bordes afilados delantero y trasero salen o se desprenden discontinuidades débiles (*aAa'* y *bBb'* en la figura 111b).† En las regiones delante de la discontinuidad *aAa'* y detrás de *bBb'* el flujo es uniforme, pero entre ellas se desvía de modo que rodea la superficie del ala; el flujo aquí es una onda simple y en la aproximación lineal presente las características son todas paralelas e inclinadas formando el ángulo de Mach respecto a la corriente incidente.

† Esta afirmación es válida solamente en la aproximación utilizada aquí. En realidad, no tenemos discontinuidades débiles, sino ondas de choque débiles u ondas de rarefacción centradas estrechas, dependiendo de la dirección en que se haga girar a la velocidad. Para el perfil indicado en la figura 111*b*, por ejemplo, *Aa* y *Bb'* son ondas de rarefacción, mientras que *Aa'* y *Bb* son ondas de choque.

La línea de corriente que sale del borde trasero (*B* en la figura 111*b*) es realmente una discontinuidad tangencial de la velocidad (que en la práctica resulta ser una estela turbulenta estrecha).

La distribución de presiones viene dada por la fórmula $p - p_1 = -\rho_1 v_1 \partial\phi/\partial x$; el término en v_y^2 de la fórmula general (106.5) puede omitirse aquí, puesto que v_x y v_y son del mismo orden de magnitud. Sustituyendo (117.3) e introduciendo el *coeficiente de presión* C_p, obtenemos en el semiplano superior $C_p = (p - p_1)/\rho_1 v_1^2/2 = 2\zeta_2'(x - \beta y)/\beta$. En particular, el coeficiente de presión en la superficie superior del ala es

$$C_{p2} = 2\zeta_2'(x)/\beta. \tag{117.4}$$

Análogamente, encontramos en la superficie inferior

$$C_{p1} = -2\zeta_1'(x)/\beta. \tag{117.5}$$

Debe señalarse que la presión en un punto cualquiera del perfil del ala depende sólo de la pendiente del contorno del perfil en dicho punto.

Como el ángulo entre el contorno del perfil y el eje x es siempre pequeño, la componente vertical de la fuerza de la presión puede considerarse, con suficiente precisión, como la propia presión. La fuerza de ascensión resultante sobre el ala es igual a la diferencia de las presiones en las superficies inferior y superior. Por tanto, el coeficiente del empuje ascensional vale

$$C_y = \frac{1}{l_x}\int_0^{l_x}(C_{p1} - C_{p2})\mathrm{d}x = \frac{4l_y}{\beta l_x};$$

ver figura 111 para la definición de l_x, l_y. Definimos el ángulo de ataque α como el ángulo entre la cuerda AB trazada desde los extremos del perfil (figura 111) y el eje x: $\alpha \approx l_y/l_x$, y así se obtiene la siguiente fórmula simple:

$$C_y = 4\alpha/\sqrt{(M_1^2 - 1)} \tag{117.6}$$

(J. ACKERET, 1925). Vemos que la fuerza ascensional queda determinada por el ángulo de ataque y no depende de la forma de la sección recta del ala, a diferencia de lo que ocurre en el caso del flujo subsónico [ver fórmula (48.7)].

Determinemos a continuación la fuerza de rozamiento o arrastre sobre el ala (es decir, el arrastre de onda, que es de la misma naturaleza que el que aparece en el caso de cuerpos delgados; ver § 115). Para ello, debemos tomar la componente x de la fuerza de la presión e integrar respecto a todo el contorno del perfil. Entonces resulta que el coeficiente de rozamiento o arrastre vale

$$C_x = \frac{2}{\beta l_x}\int_0^{l_x}(\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2)\mathrm{d}x. \tag{117.7}$$

Ponemos $\zeta_1' = \theta_1 - \alpha$, $\zeta_2' = \theta_2 - \alpha$, en donde $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$ son los ángulos entre

las partes superior e inferior del contorno y la cuerda AB. Las integrales de θ_1 y θ_2 son evidentemente cero y, por consiguiente, el resultado es

$$C_x = [4\alpha^2 + 2(\overline{\theta_1^2} + \overline{\theta_2^2})]/\sqrt{(M_1^2 - 1)}; \tag{117.8}$$

en donde la barra designa un promedio respecto a x. Para un ángulo de ataque dado, se ve que el coeficiente de arrastre es mínimo para un ala en forma de una placa plana (en la cual $\theta_1 = \theta_2 = 0$). En este caso $C_x = \alpha C_y$. Si aplicamos la fórmula (117.8) a una superficie rugosa, encontramos que la rugosidad puede dar como resultado un aumento considerable en el arrastre, aunque la altura de las irregularidades sea pequeña.† En efecto, el arrastre o rozamiento es independiente de la altura de las irregularidades si la pendiente media de la superficie, es decir, el cociente promedio entre las alturas de las irregularidades y la distancia entre ellas permanece constante.

Finalmente, podemos señalar el punto siguiente. Aquí, como en otros casos, cuando hablamos de un ala estamos implicando que sus bordes o aristas son perpendiculares al flujo. La generalización al caso de un ángulo cualquiera γ entre la dirección del flujo y el borde (*ángulo de derrape*) es totalmente obvia. Resulta evidente que las fuerzas sobre un ala infinita de sección recta constante dependen solamente de la componente de la velocidad incidente normal a sus bordes; en un fluido ideal, la componente de la velocidad paralela a los bordes no da como resultado ninguna fuerza. Las fuerzas que actúan sobre un ala que forma un ángulo de derrape diferente de $\pi/2$ en una corriente con un número de Mach M_1 son las mismas que las que actúan sobre la misma ala para $\gamma = \pi/2$ en una corriente con un número de Mach $M_1 \operatorname{sen}\gamma$. En particular, si $M_1 > 1$ pero $M_1 \operatorname{sen}\gamma < 1$, el arrastre de onda, que es peculiar al flujo supersónico, dejará de presentarse.

§ 118. Ley de la semejanza transónica

La teoría del flujo supersónico y subsónico que rodea a cuerpos delgados, que ha sido desarrollada en §§ 115-117, no es aplicable al flujo transónico, en donde la ecuación lineal para el potencial resulta no ser válida. En este caso el esquema del flujo en todo el espacio viene dado por la ecuación no lineal (106.10):

$$2\alpha_* \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{118.1}$$

(o, en el caso de flujo bidimensional, mediante la ecuación de Euler-Tricomi

† Pero nunca mayor que el espesor de la capa límite.

equivalente). Sin embargo, la solución de estas ecuaciones es muy difícil en los casos particulares. Por consiguiente, resultan ser de gran interés las reglas de semejanza que pueden establecerse para estos flujos, aunque no permitan hallar las soluciones particulares.

Consideremos primeramente el flujo bidimensional y sea

$$Y = \delta f(x/l) \tag{118.2}$$

la ecuación que da la forma del contorno delgado alrededor del cual tiene lugar el flujo, mientras que l es su longitud (en la dirección del flujo) y δ algún espesor característico ($\delta \ll l$). Variando los dos parámetros l y δ, obtenemos una familia de contornos semejantes.

La ecuación del movimiento es

$$2\alpha_* \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \tag{118.3}$$

con las condiciones límites siguientes. En el infinito, la velocidad es igual a la velocidad v_1 de la corriente sin perturbar, es decir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = M_{1*} - 1 = (M_1 - 1)/\alpha_*; \tag{118.4}$$

véase la definición del potencial ϕ, (106.9). En el perfil la velocidad debe ser tangencial:

$$v_y/v_x \approx \partial\phi/\partial y = dY/dX = (\delta/l) f'(x/l); \tag{118.5}$$

puesto que el perfil es delgado, esta condición puede imponerse a $y = 0$.

Introduzcamos las siguientes variables adimensionales:

$$x = l\bar{x}, \qquad y = l\bar{y}/(\theta\alpha_*)^{1/3}, \qquad \phi = (l\theta^{2/3}/\alpha_*^{1/3})\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}); \tag{118.6}$$

en donde $\theta = \delta/l$ representa el espesor angular del ala o ángulo de ataque. Entonces

$$2\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2},$$

con las siguientes condiciones límites:

$$\partial\bar{\phi}/\partial\bar{x} = K, \qquad \partial\bar{\phi}/\partial\bar{y} = 0 \text{ a infinito},$$

$$\partial\bar{\phi}/\partial\bar{y} = f'(\bar{x}) \text{ at } \bar{y} = 0,$$

siendo

$$K = (M_1 - 1)/(\alpha_*\theta)^{2/3}. \tag{118.7}$$

Estas condiciones contienen sólo un parámetro, K. Así pues, hemos obtenido la ley de semejanza requerida: dos flujos bidimensionales transónicos con

el mismo valor de K son semejantes, como puede verse en las fórmulas (118.6) (S. V. FALKOVICH, 1947).

Debe señalarse que en la expresión (118.7) interviene un solo parámetro α_* que caracteriza las propiedades del propio gas. Por consiguiente, la ley de semejanza determina también la semejanza respecto a la variación de la clase de gas.

En la aproximación que estamos considerando aquí, la presión viene dada por la fórmula $p - p_1 \approx -\rho_1 v_1(v_x - v_1)$. Un cálculo con el empleo de las expresiones (118.6) muestra que el coeficiente de presión en el perfil es de la forma

$$C_p = \frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2} = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} P\left(K, \frac{x}{l}\right).$$

Los coeficientes de rozamiento y de empuje ascensional vienen dados por integrales a lo largo del contorno del perfil:

$$C_x = \frac{1}{l}\oint C_p \frac{dY}{dx}dx,$$

$$C_y = \frac{1}{l}\oint C_p\, dx,$$

y, por tanto, son de la forma†

$$C_x = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \qquad C_y = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \tag{118.8}$$

De un modo totalmente análogo podemos obtener la ley de semejanza para un cuerpo tridimensional delgado, cuya forma venga dada por ecuaciones de la forma

$$Y = \delta f_1(x/l), \qquad Z = \delta f_2(x/l), \tag{118.9}$$

con los dos parámetros δ y l ($\delta \ll l$). Existe una diferencia importante respecto al caso bidimensional, debido a que el potencial tiene una singularidad logarítmica para $y \to 0$, $z \to 0$ (véase, por ejemplo, las fórmulas que corresponden al flujo que rodea un cono delgado en § 105). De aquí que la condición límite en el eje x deba determinar, no las propias derivadas $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$, sino los productos $y\,\partial\phi/\partial y = Y\,dY/dx$, $z\,\partial\phi/\partial z = Z\,dZ/dx$, que permanecen finitos. Es fácil ver que en este caso la transformación de semejanza es

$$x = l\bar{x}, \qquad y = (l/\theta\alpha_*^{\frac{1}{2}})\bar{y}, \qquad z = (l/\theta\alpha_*^{\frac{1}{2}})\bar{z}, \qquad \phi = l\theta^2\bar{\phi}, \tag{118.10}$$

† El margen de validez de estas fórmulas viene dado por la condición $|M_1 - 1| \ll 1$. Sin embargo, la teoría lineal corresponde a K grande, es decir, $|M_1 - 1| \gg \theta^{2/3}$. En el margen $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^{2/3}$, las fórmulas (118.8) deben, por tanto, reducirse a las fórmulas (117.6)-(117.8) dadas por la teoría lineal. Esto significa que, en el caso de K grande, las funciones f_x y f_y deben ser proporcionales a $K^{-1/2}$.

‡ En el margen $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$, debemos obtener la fórmula (115.6) dada por la teoría lineal, de acuerdo con la cual $C_x \sim \theta^{\frac{1}{2}}$; esto significa que la función $f(K)$ tiende a una constante cuando K aumenta.

siendo el parámetro de semejanza

$$K = (M_1 - 1)/\theta^2\alpha_* \tag{118.11}$$

(T. VON KÁRMÁN, 1947). El coeficiente de presión en la superficie del cuerpo resulta ser de la forma $C_p = \theta^2 P(K, x/l)$, y el coeficiente de rozamiento o de arrastre es de acuerdo con ello†

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{118.12}$$

Todas estas fórmulas son válidas, como es natural, para valores de $M_1 - 1$ tanto pequeños positivos como pequeños negativos. Si $M_1 = 1$ exactamente, el parámetro de semejanza $K = 0$ y las funciones en las fórmulas (118.8) y (118.12) se reducen a constantes, de modo que estas fórmulas determinan completamente C_x y C_y como funciones de θ y α_*, que representa las propiedades del gas.

§ 119. Ley de la semejanza hipersónica

La teoría lineal no es válida en el caso del flujo supersónico que rodea cuerpos delgados para valores muy grandes del número de Mach M_1 (*flujo hipersónico*), como ya se ha mencionado al final del § 106. Tiene, por lo tanto, interés una regla de semejanza simple que puede establecerse para este caso (H. S. TSIEN, 1946).

Las ondas de choque formadas en este tipo de flujo forman un ángulo pequeño con la dirección del flujo, del orden del cociente $\theta = \delta/l$ entre el espesor y la longitud del cuerpo. Estos choques son, en general, intensos y de forma curvada; la discontinuidad de velocidades es relativamente pequeña en ellos, pero la discontinuidad de presión (y, por tanto, la discontinuidad de la entropía) es grande. Por consiguiente, el flujo gaseoso no es, en general, un flujo potencial.

Supondremos que el número de Mach M_1 es del orden de $1/\theta$ o mayor. Una onda de choque reduce el valor local de M, pero este último siempre permanece del orden de $1/\theta$ (ver § 104, problema), de modo que M es grande en todo punto.

Utilicemos la «analogía sónica» mencionada en § 115: un problema tridimensional de flujo estacionario que rodea un cuerpo delgado de sección recta variable $S(x)$ es equivalente a un problema bidimensional de emisión no estacionaria de ondas sonoras por un contorno cuya área varía con el tiempo de acuerdo con la ley $S(v_1 t)$;† la velocidad del sonido está representada por $v_1/\sqrt{(M_1^2 - 1)}$, o bien, para M_1 grande, por c_1 simplemente. Debe

† Por ejemplo, el problema del flujo que rodea un cono estrecho es equivalente al de la emisión de ondas sonoras cilíndricas por un cilindro circular que se expansiona de modo uniforme.

resaltarse que la única condición necesaria para que los dos problemas sean equivalentes es que el cociente δ/l sea pequeño; esto nos permite considerar pequeñas regiones anulares de la superficie del cuerpo como cilíndricas. Sin embargo, en el caso de M_1 grande la velocidad de propagación de las ondas «emitidas» es comparable con la velocidad de las partículas del gas en las ondas (ver el final del § 115), y, por tanto, el problema ha de resolverse sobre la base de las ecuaciones exactas (no lineales).

En este problema bidimensional, la velocidad lineal de la fuente es del orden de $v_1\theta$; los otros únicos parámetros independientes del problema son la velocidad del sonido c_1, la dimensión δ del foco o fuente y la densidad ρ_1.† A partir de todos ellos podemos formar una sola combinación adimensional,

$$K = M_1\theta, \tag{119.1}$$

que es el parámetro de semejanza.‡ Las escalas de longitud para las coordenadas y, z y el tiempo deben tomarse de forma que tengan las dimensiones apropiadas y estén formadas mediante los mismos parámetros, es decir, δ y $\delta/v_1\theta = l/v_1$. Volviendo a la coordenada x, vemos que v/c_1 y C_p son funciones de las variables adimensionales x/l, y/δ, z/δ y del parámetro K.

Se encuentra fácilmente que el coeficiente de arrastre para un cuerpo delgado tiene la forma

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{119.2}$$

Se obtiene evidentemente la misma ley de semejanza en el caso bidimensional del flujo que rodea un ala delgada de envergadura infinita.

Los coeficientes de arrastre y de empuje ascensional resultan ser de la forma

$$C_x = \theta^3 f_x(K), \qquad C_y = \theta^2 f_y(K). \tag{119.3}$$

PROBLEMA

Determinar la fuerza ascensional que actúa sobre una ala plana de envergadura infinita inclinada con un pequeño ángulo de ataque α respecto a la dirección del flujo, para valores grandes del número de Mach M_1 ($M_1 \gtrsim 1/\alpha$).

Solución. El esquema de flujo es de la forma indicada en la figura 112: de cada uno de los dos bordes de la placa sale una onda de choque y otra de rarefacción, y la corriente gira con ellas un ángulo α en sentidos opuestos.

† Como es natural, estamos considerando no sólo las ecuaciones de movimiento del gas, sino también las condiciones límites de las mismas en la superficie del cuerpo y las condiciones que deben satisfacerse en las ondas de choque que se formen. Consideremos el caso de un gas perfecto, de modo que las propiedades de la dinámica de gases dependan solamente del parámetro adimensional γ; la regla de semejanza obtenida antes, sin embargo, no determina la dependencia del flujo respecto a este parámetro.

‡ Si no se supusiese M_1 grande, obtendríamos una regla de semejanza con parámetro $K = \theta\sqrt{(M_1^2 - 1)}$. Sin embargo, esto carece de interés, puesto que en el caso de M_1 pequeño la teoría lineal determina todas las magnitudes en función de este parámetro.

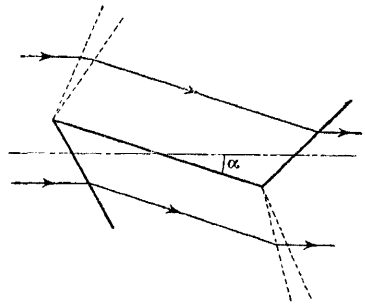

FIG. 112

De acuerdo con la analogía sónica, el problema del flujo estacionario que rodea dicha placa es equivalente al flujo gaseoso monodimensional no estacionario en cada lado o cara de un pistón que se mueve con velocidad uniforme αv_1. Delante del pistón se forma una onda de choque y detrás una onda de rarefacción (ver § 92, problemas 1 y 2). Utilizando los resultados obtenidos allí, se encuentra la fuerza ascensional buscada como la diferencia de las presiones en los dos lados de la placa. El coeficiente del empuje ascensional es

$$C_y = \alpha^2\left\{\frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\left[\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2\right]}\right\} - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}K\right]^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

en donde $K = \alpha M_1$. Para $K \geqq 2/(\gamma - 1)$ se forma un vacío bajo la placa y debe omitirse el segundo término. En el margen $1 \ll M_1 \ll 1/\alpha$, esta fórmula se reduce a $C_y = 4\alpha/M_1$, como ya dio la teoría lineal, de acuerdo con el hecho de que son aplicables en este intervalo ambos procedimientos.

CAPÍTULO XIV

DINAMICA DE FLUIDOS DE LA COMBUSTIÓN

§ 120. Combustión lenta

La velocidad de una reacción química (medida, por ejemplo, por el número de moléculas que reaccionan en la unidad de tiempo) depende de la temperatura de la mezcla de gases en la que se produce, y aumenta con esta magnitud. En muchos casos esta dependencia es muy marcada.† La velocidad de la reacción puede ser tan pequeña a temperaturas ordinarias que la reacción sólo difícilmente puede producirse, aunque la mezcla gaseosa que corresponde a un estado de equilibrio (químico) termodinámico sería aquella en la cual ya se hubiese producido la reacción. Cuando la temperatura se eleva lo suficiente, la reacción progresa rápidamente. Si esta es endotérmica, se necesita un suministro continuo de calor desde un foco o fuente externa para que la reacción pueda mantenerse; si la temperatura se eleva simplemente al principio de la reacción, sólo reacciona una pequeña cantidad de materia y, como consecuencia, se reduce la temperatura del gas hasta un punto en el que la reacción cesa. La situación es muy diferente en el caso de una reacción fuertemente exotérmica, en donde se desarrolla una considerable cantidad de calor. Aquí basta con elevar la temperatura en un solo punto; la reacción que empieza en dicho punto desarrolla calor y así eleva la temperatura del gas que lo rodea, de modo que la reacción, una vez iniciada, se extenderá a la totalidad del gas. Esto se denomina *combustión lenta* o simplemente *combustión* de una mezcla gaseosa.‡

La combustión de una mezcla de gases viene acompañada necesariamente por el movimiento del gas. Por consiguiente, el proceso de combustión no

† La velocidad de reacción depende, normalmente, de modo exponencial con la temperatura, siendo casi proporcional a un factor de la forma $e^{-U/RT}$, en donde U es una constante para una reacción dada y se denomina *energía de activación*. Cuanto mayor es U, con más intensidad depende la velocidad de la reacción de la temperatura.

‡ Debe recordarse que, en una mezcla capaz de combustión, puede ser imposible en determinadas circunstancias la propagación espontánea de la combustión. Esta limitación se debe a las pérdidas de calor que son una consecuencia de factores, como la conducción del calor a través de las paredes de un tubo en el que se produce una combustión por pérdidas debidas a la radiación, etc. Por esta razón no es posible la combustión en tubos de radio muy pequeño, por ejemplo.

es sólo un fenómeno químico, sino también un proceso de dinámica de gases. En general, la naturaleza del proceso de combustión ha de determinarse mediante la resolución de ecuaciones simultáneas, entre las que se deben incluir aquellas de cinética química para la reacción y las de dinámica de gases para la mezcla considerada.

Sin embargo, la situación se simplifica mucho en el caso muy importante (el único normalmente que hay que considerar) en el que la dimensión característica l del problema es grande (en un sentido que hay que definir más adelante). Veremos que, en estos casos, los problemas de la dinámica de gases y los de cinética química pueden considerarse, hasta un cierto límite, separadamente.

La región del gas quemado (es decir, aquella región en donde la reacción ya ha tenido lugar y el gas es una mezcla de los productos de la combustión) está separada de aquélla en donde el gas todavía no ha experimentado la combustión por una capa de transición, en donde la reacción está progresando (*zona de combustión* o *llama*); al transcurrir el tiempo, esta capa se mueve hacia adelante, con una velocidad que puede denominarse velocidad de propagación de la combustión en el gas. El valor de esta velocidad depende de la transferencia de calor desde la zona de combustión a la mezcla gaseosa fría. El mecanismo principal de transferencia es la conducción ordinaria. La teoría de estos medios de propagación de la combustión fue desarrollada en primer lugar por V. A. MIKHELSON (1980).

Designemos mediante δ el orden de magnitud de la anchura de la zona de combustión. Está determinada por la distancia media sobre la cual el calor desarrollado en la reacción se propaga durante el tiempo τ que dura la reacción (en el punto considerado). El tiempo τ es característico de la reacción y depende únicamente del estado termodinámico del gas que sufre la combustión (y no del parámetro l). Si la conductividad termométrica del gas es χ, tenemos [ver (51.7)]†

$$\delta \sim \sqrt{(\chi\tau)}. \tag{120.1}$$

Precisamos ahora más la hipótesis anterior: admitiremos que la dimensión característica es grande en comparación con la anchura de la zona de combustión ($l \gg \delta$). Cuando se cumple esta condición, puede considerarse por separado el problema de la dinámica del gas. Al determinar el flujo gaseoso, podemos despreciar la anchura de la zona de combustión, considerándola como una superficie que separa los productos de la combustión del gas aún no quemado. En esta superficie (*frente de la llama*) el estado del gas

† Para evitar malas interpretaciones, debe señalarse que, cuando τ depende marcadamente de la temperatura, deberá aparecer un coeficiente más bien grande en la fórmula (120.1) si τ es el valor correspondiente a la temperatura de los productos de la combustión. Sin embargo, el hecho que tiene importancia para nosotros es que τ no depende de l.

varía discontinuamente, es decir, es una superficie de discontinuidad.

La velocidad v_1 de esta discontinuidad respecto al propio gas (en una dirección normal al frente) se denomina *velocidad normal* de la llama. En un tiempo τ, la combustión se propaga a través de una distancia del orden de δ, y así la velocidad de la llama es†

$$v_1 \sim \delta/\tau \sim \sqrt{(\chi/\tau)}. \tag{120.2}$$

La conductividad termométrica ordinaria del gas es del orden del recorrido libre medio de las moléculas multiplicado por su velocidad térmica, o, lo que es lo mismo, el tiempo libre medio τ_{tr} multiplicado por el cuadrado de esta velocidad. Puesto que la velocidad térmica de las moléculas es del mismo orden que la velocidad del sonido, tenemos $v_1/c \sim \sqrt{(\chi/\tau c^2)} \sim \sqrt{(\tau_{tr}/\tau)}$. No todas las colisiones que se producen entre moléculas dan lugar a una reacción química entre ellas; por el contrario, sólo una fracción muy pequeña de moléculas en colisión reaccionan entre sí. Esto significa que $\tau_{tr} \ll \tau$ y, por tanto, $v_1 \ll c$. Así pues, la velocidad de la llama es, en este caso, pequeña en comparación con la velocidad del sonido.‡

En la superficie de discontinuidad que sustituye a la zona de combustión, los flujos de masa, cantidad de movimiento o impulso y de energía deben ser continuos, como en cualquier discontinuidad. Como es usual, la primera de estas condiciones determina la relación de los componentes, normales a la superficie, de las velocidades de los gases respecto a la discontinuidad: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, o sea,

$$v_1/v_2 = V_1/V_2, \tag{120.3}$$

en donde V_1 y V_2 son los volúmenes específicos del gas sin quemar y de los productos de la combustión. De acuerdo con los resultados generales obtenidos en § 81 en el caso de discontinuidades arbitrarias, la componente tangencial de la velocidad debe ser continua si la componente normal es discontinua. Por consiguiente, las líneas de corriente se «refractan» en la discontinuidad.

Teniendo en cuenta la pequeñez de la velocidad normal de la llama respecto a la del sonido, la condición de continuidad del flujo del impulso se reduce a la continuidad de la presión, y la del flujo de energía se reduce a

† Como ejemplo puede mencionarse que la velocidad de la llama en una mezcla de metano (6 por ciento) y aire es sólo de 5 cm/s, mientras que en la mezcla detonante ($2H_2 + O_2$) es de 1000 cm/s; las anchuras de las zonas de combustión en estos dos casos son aproximadamente 5×10^{-2} cm y 5×10^{-4} cm, respectivamente.

‡ La difusión de los componentes de la mezcla que se quema tiene también cierta influencia sobre la propagación de la combustión; sin embargo, esto no altera los órdenes de magnitud de la velocidad y anchura de la llama.

la continuidad de la entalpía:

$$p_1 = p_2, \qquad w_1 = w_2. \tag{120.4}$$

Al utilizar estas condiciones debe recordarse que los gases a los dos lados de la discontinuidad que estamos considerando son químicamente diferentes y por ello las magnitudes termodinámicas nos son las mismas funciones en ambas partes.

En el caso de un gas perfecto tenemos $w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1$, $w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2$; los términos constantes no pueden hacerse iguales a cero como en el caso de un gas simple (mediante la selección adecuada del cero de energía), puesto que w_{01} y w_{02} son diferentes. Pongamos $w_{01} - w_{02} = q$; es precisamente el calor que se desarrollaría en la reacción (por unidad de masa) si ésta se produjese a la temperatura del cero absoluto. Entonces se obtienen las siguientes relaciones entre las magnitudes termodinámicas del gas sin quemar (1) y el gas quemado (2):

$$p_1 = p_2, \qquad T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, \qquad V_2 = V_1\frac{\gamma_1(\gamma_2-1)}{\gamma_2(\gamma_1-1)}\left(\frac{q}{c_{p1}T_1}+1\right). \tag{120.5}$$

Como la llama tiene una velocidad normal definida, independiente de las propias velocidades del gas, el frente de la llama tiene una forma definida en el caso de una combustión estacionaria de un gas móvil. Como ejemplo podemos citar la combustión de un gas que sale del extremo de un tubo (boca de un quemador). Si es v la velocidad del gas promediada en la sección recta del tubo, es evidente que $v_1S_1 = vS$, siendo S el área de la sección recta del tubo y S_1 el área de la superficie total del frente de la llama.

Si ha de verificarse esta situación, debe ser estable frente a pequeñas perturbaciones y se plantea la cuestión de los límites de esta estabilidad. Puede estudiarse la estabilidad del frente de la llama de un modo semejante al de la estabilidad de la discontinuidad tangencial en § 30. Como la velocidad del gas es pequeña en comparación con la del sonido, podemos considerar el gas como un fluido ideal incompresible, tomándose la velocidad normal del frente de la llama como una constante dada. Dicho estudio (ver problema 1) conduce al resultado de que el frente de la llama es absolutamente inestable, y, por consiguiente, la llama debe resultar turbulenta (L. LANDAU, 1944). De esta forma el estudio es únicamente válido para números altos de Reynolds. Sin embargo, cuando se tiene en cuenta la viscosidad no puede dar origen a un número de Reynolds crítico muy grande.

Por otra parte, los datos experimentales muestran que la «autoturbulen-

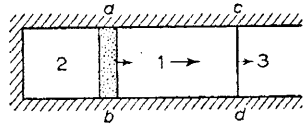

FIG. 113

cia» de la llama no se produce hasta números de Reynolds muy grandes.† Esto significa que deben haber otros factores que estabilicen el frente de la llama y que retrasen el momento en que se transforma en turbulenta hasta que se alcanzan números de Reynolds muy grandes. Es posible que tenga importancia la variación de la velocidad normal cuando se deforma el frente de la llama: en donde el frente es cóncavo, v_1 aumenta (puesto que la transferencia de calor dentro de la mezcla sin quemar resulta mejorada en la concavidad), mientras que donde resulta convexa se reduce v_1 (YA. B. ZELDOVICH). Todavía no está resuelto este problema importante.‡

Una llama que se propaga en una mezcla de gases combustibles da como resultado el movimiento del gas que la rodea hasta una distancia considerable. El hecho de que deba acompañar a la combustión un movimiento del gas es evidente a partir del hecho de que los productos de la combustión deben moverse con velocidad $v_1 - v_2$ respecto al gas sin quemar, debido a la diferencia existente entre las velocidades v_1 y v_2. En algunos casos esta diferencia da como resultado la formación de ondas de choque. Estos choques no poseen ninguna relación directa con el proceso de combustión y su aparición se debe a la necesidad de satisfacer las condiciones en los límites. Consideremos, por ejemplo, la combustión que se propaga a partir del extremo cerrado de un tubo. En la figura 113, *ab* es la zona de combustión. El gas que se encuentra en las regiones 1 y 3 es la mezcla original sin quemar, mientras que el que se encuentra en la región 2 está formado por los productos de la combustión. La velocidad v_1 con la que se mueve la zona de la combustión respecto al gas 1 delante de ella, según lo dicho anteriormente, está determinada por las propiedades de la reacción y las condiciones de la transferencia del calor, y debe considerarse como dada. La velocidad v_2 con la que se mueve la llama respecto al gas 2 queda entonces determinada

† En la propagación esférica de la combustión en el espacio libre, la autoturbulencia, si se produce, lo hace para $R \sim 10^5$, en donde la dimensión característica corresponde al radio de la llama esférica (YA. B. ZELDOVICH y A. I. ROZLOVSKII, 1947). Cuando un gas se quema dentro de un tubo, no se produce la autoturbulencia, sino que es precedida por la turbulencia que aparece, para R grande, debido a la influencia de las paredes sobre el flujo gaseoso que acompaña a la combustión (es decir, debido a la inestabilidad del flujo laminar de Poiseuille).

‡ Existen factores especiales que estabilizan la llama en la combustión de un gas que se evapora en la superficie de un líquido (produciéndose la reacción en el propio gas y no con ninguna sustancia externa, tal como el oxígeno del aire). En este caso las fuerzas capilares y el campo gravitatorio tienen un efecto estabilizador (ver problema 2).

de una vez por la condición (120.3). En el extremo cerrado del tubo, la velocidad del gas debe anularse, y, por tanto, el gas en la región 2 estará en reposo. Por tanto, el gas 1 debe moverse respecto al tubo con velocidad constante $v_2 - v_1$. En la parte delantera del tubo, lejos de la llama, el gas se encuentra de nuevo en reposo. Esta condición sólo puede satisfacerse mediante la presencia de una onda de choque (*cd* en la figura 113), en donde la velocidad del gas sea discontinua, de modo que el gas en 3 esté en reposo. A partir de la discontinuidad dada de la velocidad, podemos hallar las discontinuidades de las demás magnitudes y la velocidad de propagación del propio choque. Así pues, vemos que el frente de la llama actúa como un pistón sobre el gas que está delante de él. La onda de choque se mueve con mayor velocidad que la llama, de modo que la masa del gas puesta en movimiento aumenta con el transcurso del tiempo.

En el caso de números de Reynolds suficientemente grandes, el flujo gaseoso que acompaña a la combustión en un tubo resulta turbulento, y esto, a su vez, afecta a la llama que origina el movimiento. De acuerdo con K. I. Shchelkin, la estructura de la zona de combustión tiene entonces la forma siguiente. Los remolinos turbulentos que son grandes en comparación con la anchura ordinaria δ de la llama dan como resultado una curvatura irregular del frente de la llama. Esta curvatura puede ser considerable, puesto que la estabilidad del frente respecto a las deformaciones es probablemente pequeña, como se mencionó anteriormente. Como resultado se obtiene una zona de combustión comparativamente ancha, compuesta por un frente de llama estrecho pero notablemente irregular. Por consiguiente, la velocidad de combustión se ve considerablemente aumentada, teniendo en cuenta el marcado incremento de la superficie total en la que se produce. Debe señalarse que esta descripción es muy diferente de la que se obtendría si la llama fuese autoturbulenta: en este caso la zona de combustión sería una región homogénea en donde se obtendría una operación de mezclado total por la acción de remolinos turbulentos de pequeño tamaño en comparación con el radio del tubo.

PROBLEMAS

Problema 1. Estudiar la estabilidad de un frente de llama plano (que se propaga con una velocidad pequeña en comparación con la del sonido) respecto a perturbaciones infinitesimales.

Solución. Tomemos el plano de la discontinuidad como el plano yz, teniendo la velocidad del gas sin perturbar el sentido del eje x. Sobre el flujo con velocidades constantes v_1, v_2 (a ambos lados de la discontinuidad) superpongamos una perturbación periódica en la dirección y y en el tiempo. A partir de las ecuaciones del movimiento

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \qquad \partial\mathbf{v}'/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}' = -(1/\rho)\mathbf{grad}\,p' \tag{1}$$

(siendo $\mathbf{v}$, ρ o bien $\mathbf{v}_1$, ρ_1 o bien $\mathbf{v}_2$, ρ_2), obtenemos como en § 30 la ecuación

$$\triangle p' = 0. \tag{2}$$

En la superficie de discontinuidad (es decir, para $x \approx 0$) deben satisfacerse las siguientes condiciones: la ecuación de continuidad de la presión

$$p'_1 = p'_2, \tag{3}$$

la condición de continuidad de la componente de tangencial de la velocidad tangencial a la superficie

$$v'_{1y} + v_1 \partial\zeta/\partial y = v'_{2y} + v_2 \partial\zeta/\partial y \tag{4}$$

[en donde $\zeta(y, t)$ es el pequeño desplazamiento de la superficie de discontinuidad a lo largo del eje x debido a la perturbación] y la condición de que resulte sin variación la velocidad del gas normal a la discontinuidad,

$$v'_{1x} - \partial\zeta/\partial t = v'_{2x} - \partial\zeta/\partial t = 0. \tag{5}$$

En la región $x < 0$ (gas sin quemar 1), la solución de las ecuaciones (1) y (2) puede escribirse

$$\begin{gathered} v'_{1x} = Ae^{iky+kx-i\omega t}, \qquad v'_{1y} = iAe^{iky+kx-i\omega t}, \\ p'_1 = A\rho_1\left(\frac{i\omega}{k} - v_1\right)e^{iky+kx-i\omega t}. \end{gathered} \tag{6}$$

En la región $x > 0$ (productos de la combustión, gas 2), además de la solución de la forma constante $\times\, e^{iky-kx-i\omega t}$, debemos tener en cuenta otra solución particular de las ecuaciones (1) y (2), en donde la dependencia con y y t viene dada por el mismo factor $e^{iky-i\omega t}$. Esta solución se obtiene poniendo $p' = 0$; entonces, resulta nulo el segundo miembro de la ecuación de Euler y la ecuación homogénea resultante tiene una solución en la que v'_x y v'_y son proporcionales a $e^{iky-i\omega t+i\omega x/v}$. La razón por la cual esta solución sólo es necesario tenerla en cuenta en el gas 2 y no en el gas 1, es que nuestro objetivo final consiste en determinar si pueden existir frecuencias ω que tengan partes imaginarias positivas; sin embargo, para tales ω el factor $e^{i\omega x/v}$ aumenta sin límites con $|x|$ para $x < 0$, y, por tanto, dicha solución no es posible en la región 1. Escogiendo de nuevo valores apropiados para los coeficientes constantes, busquemos una solución para $x > 0$ de la forma

$$\left.\begin{aligned} v'_{2x} &= Be^{iky-kx-i\omega} + Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2}, \\ v'_{2y} &= -iBe^{iky-kx-i\omega} - (\omega/kv_2)Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2}, \\ p'_2 &= -B\rho_2 v_2 + (i\omega/k)\, e^{iky-kx-i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Poniendo también

$$\zeta = De^{iky-i\omega t}, \tag{8}$$

y sustituyendo estas expresiones en las condiciones (3)-(5), obtenemos cuatro ecuaciones homogéneas para los coeficientes A, B, C, D. Un cálculo simple (utilizando el hecho de que $j \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$) da la condición siguiente para que sean compatibles estas ecuaciones:

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0, \tag{9}$$

en donde $\Omega = -i\omega$. Si $v_1 > v_2$, esta ecuación tiene o dos raíces reales negativas o dos raíces conjugadas complejas con partes reales negativas. Sin embargo, si $v_1 < v_2$, las raíces son reales y de signo opuesto. Así pues, si $v_1 > v_2$ tenemos siempre re $\Omega < 0$ y el movimiento es estable, pero si $v_1 < v_2$ existen Ω, para las cuales re $\Omega > 0$ y el movimiento original es inestable. La densidad ρ_2 de los productos de combustión es realmente menor siempre que la densidad ρ_1 del gas sin quemar, teniendo en cuenta el considerable calor desarrollado durante la combustión. De aquí se deduce que, puesto que $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, entonces $v_2 > v_1$, y se obtiene la conclusión de que el frente de llama es inestable en las condiciones consideradas.

Problema 2. Se produce la combustión en la superficie de un líquido, teniendo lugar la reacción en el vapor que se evapora de la superficie. Determinar la condición de estabilidad en este caso, teniendo en cuenta el efecto del campo gravitatorio y las fuerzas de capilaridad (L. D. LANDAU, 1944).

Solución. Consideremos la zona de combustión en el vapor próximo a la superficie líquida como una superficie de discontinuidad, pero supongamos ahora que esta superficie tiene una tensión superficial α. Los cálculos son totalmente análogos a los del problema 1, con la única diferencia de que en lugar de la condición límite (3) tenemos ahora $p'_1 - p'_2 = -\alpha\partial^2\zeta/\partial y^2 + (\rho_1 - \rho_2)g\zeta$; el medio 1 es el líquido y el medio 2 el gas quemado. Las condiciones (4) y (5) no varían. En lugar de la ecuación (9) obtenemos

$$\Omega^2(v_1+v_2)+2\Omega k v_1 v_2+\left[k^2(v_1-v_2)+\frac{gk(\rho_1-\rho_2)+\alpha k^3}{j}\right]v_1 v_2 = 0.$$

En este caso la condición de estabilidad es que las raíces de esta ecuación deberán tener partes reales negativas, es decir, el término libre debe ser positivo para todo k. Esta exigencia de la condición de estabilidad $j^4 < 4\alpha g\rho_1{}^2\rho_2{}^2/(\rho_1 - \rho_2)$. Como la densidad de los productos gaseosos de la combustión es pequeña en comparación con la del líquido ($\rho_1 \gg \rho_2$), la condición se convierte en la práctica en

$$j^4 < 4\alpha g\rho_1\rho_2{}^2.$$

Problema 3. Determinar la distribución de temperaturas en el gas que hay delante de un frente de llama.

Solución. En un sistema de coordenadas que se mueva con el frente, la distribución de temperaturas es estacionaria y el gas se mueve con velocidad $-v_1$. La ecuación de la conducción térmica,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,T = -v_1\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = \chi\,\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2,$$

tiene la solución $T = T_0 e^{-v_1 x/\chi}$, en donde T_0 es la temperatura del frente de la llama, tomándose como cero la temperatura lejos del frente.

§ 121. Detonación

En el tipo de combustión (combustión lenta) descrita hasta ahora, la propagación a través del gas se debe al calentamiento que resulta de la transferencia de calor directa desde el gas en combustión hasta el que está toda-

vía sin quemar. También es posible otro mecanismo de propagación de la combustión totalmente diferente. La onda de choque calienta el gas cuando pasa; la temperatura del gas detrás del choque es más elevada que delante de él. Si la onda de choque es suficientemente intensa, la elevación de temperatura que produce puede ser suficiente para que empiece la combustión. La onda de choque provocará entonces la «ignición» de la mezcla gaseosa al moverse, es decir, la combustión se propagará con la velocidad del choque, o sea, mucho más rápidamente que en la combustión ordinaria. Este mecanismo de propagación de la combustión se denomina *detonación.*

Cuando la onda de choque pasa por un punto determinado del gas, la reacción empieza en dicho punto y continúa hasta que todo el gas que se encuentra allí se ha quemado, es decir, durante un tiempo que caracteriza la cinética de la reacción de que se trate. Por consiguiente, resulta claro que la onda de choque será seguida por una capa que se moverá con ella en donde se está produciendo la combustión, y la anchura de esta capa es igual a la velocidad de propagación del choque multiplicada por el tiempo τ. Tiene importancia el hecho de que la anchura no depende de las dimensiones del cuerpo o cuerpos que estén presentes. Cuando las dimensiones características del problema son suficientemente grandes, podemos considerar, por tanto, la onda de choque y la zona de combustión que le sigue como una simple superficie de discontinuidad que separa a los gases quemados de los que aún están sin quemar. Denominaremos a dicha superficie *onda de detonación.*

En una onda de detonación las densidades de flujo de masa, energía e impulso o cantidad de movimiento deben ser continuas y siguen siendo válidas las relaciones (82.1)-(82.10) deducidas previamente, y que se siguen de estas condiciones de continuidad. En particular, la ecuación

$$w_1 - w_2 + \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0 \qquad (121.1)$$

se mantiene; el subíndice 1 pertenece siempre al gas sin quemar y el 2 a los productos de la combustión. La curva de p_2 en función de V_2 dada por esta ecuación se denomina *adiabática de la detonación.* A diferencia de la adiabática del choque considerada anteriormente, esta curva no pasa por el punto inicial dado (p_1, V_1). El hecho de que la adiabática del choque pase a través de este punto se debe a que w_1 y w_2 son las mismas funciones de p_1, V_1 y p_2, V_2, respectivamente, mientras que esto ya no es válido ahora, teniendo en cuenta la diferencia química entre ambos gases. En la figura 114 la línea continua muestra la adiabática de la detonación. La adiabática del choque ordinaria para la mezcla gaseosa sin quemar se ha dibujado (a trazos) pasando por el punto (p_1, V_1). La adiabática de la detonación siempre cae encima de la adiabática del choque, debido a que en la combustión se alcanza una temperatura más elevada y, por consiguiente, la presión del gas

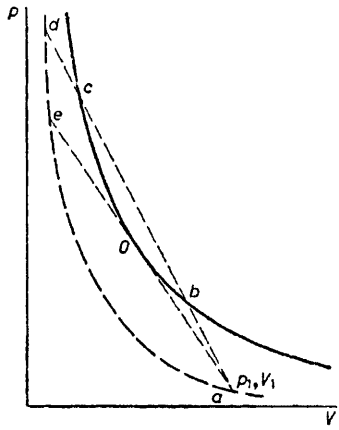

FIG. 114

es mayor que la que existiría en el gas sin quemar para el mismo volumen específico.

La fórmula (82.6) anterior es válida para la densidad de flujo másico:

$$j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2), \tag{121.2}$$

de modo que gráficamente j^2 es de nuevo la pendiente de la cuerda que va del punto (p_1, V_1) a un punto cualquiera (p_2, V_2) de la adiabática de la detonación (por ejemplo, la cuerda *ac* de la figura 114). Se ve fácilmente en el diagrama que j^2 no puede ser menor que la pendiente de la tangente *Oa*. El flujo j es precisamente la masa de gas que entra en ignición por unidad de tiempo y por unidad de área de la superficie de la onda de detonación; vemos que, en una detonación, esta magnitud no puede ser inferior a un cierto valor límite j_{min} (que depende del estado inicial del gas sin quemar).

La fórmula (121.2) es una consecuencia únicamente de las condiciones de continuidad de los flujos de masa y de impulso. Por tanto, es válida (para un estado inicial dado del gas) no sólo para el estado final de los productos de la combustión, sino también para todos los estados intermedios, en los que sólo se ha desarrollado parte de la energía de la reacción. En otras palabras, la presión p y el volumen específico V del gas en un estado cualquiera obedecen la relación lineal

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V), \tag{121.3}$$

que está indicada gráficamente mediante la cuerda *ad*. Este resultado tiene importancia en la teoría de la detonación; fue enunciado por primera vez por V. A. MIKHELSON (1890).

Utilicemos a continuación un procedimiento desarrollado por YA. B. ZELDOVICH (1940) para estudiar la variación del estado del gas a través de la capa de anchura finita que es en lo que consiste realmente una onda de detonación. El frente delantero de la onda de detonación es una verdadera onda de choque en el gas 1 sin quemar. En ella, el gas se comprime y se calienta hasta un estado representado por el punto *d* (figura 114) sobre la adiabática del choque del gas 1. La reacción química empieza en el gas comprimido, y cuando la reacción prosigue el estado del gas está representado por un punto que se mueve descendiendo por la cuerda *da*; se desarrolla calor, el gas se expansiona y disminuye su presión. Esto continúa hasta que la combustión es completa y se ha desprendido la totalidad del calor de la reacción. El punto correspondiente es *c*, que cae sobre la adiabática de la detonación y que representa el estado final de los productos de la combustión. El punto inferior *b* en el que la cuerda *ad* corta a la adiabática de la detonación no puede ser alcanzado en el caso de un gas en el que la combustión está producida por compresión y calentamiento en una onda de choque.†

Así pues, se obtiene la conclusión de que la detonación está representada no por la totalidad de la adiabática de la detonación, sino sólo por su parte superior, que está por encima del punto *O* en donde la adiabática toca a la línea recta *aO* dibujada desde el punto inicial *a*.

Se ha visto en § 84 que, en el punto en donde $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0$, es decir, en donde la adiabática del choque toca la recta procedente de (p_1, V_1), la velocidad v_2 es igual a la velocidad correspondiente del sonido c_2, y $v_2 < c_2$ encima de dicho punto. Se han obtenido estos resultados sólo a partir de las leyes de conservación aplicadas a la superficie de discontinuidad y, por consiguiente, son también totalmente aplicables a la onda de detonación. En la adiabática ordinaria del choque para un gas simple no existen puntos con $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2 = 0$, como se ha demostrado en § 84. Sin embargo, en la onda adiabática de la detonación existe un punto de estos, a saber, el punto *O*. Puesto que la detonación corresponde a la parte superior únicamente de la adiabática, por encima del punto *O*, se obtiene la conclusión de que

$$v_2 \leqslant c_2, \tag{121.4}$$

es decir, una onda de detonación se mueve respecto al gas exactamente detrás de él con una velocidad igual o menor que la del sonido; la igualdad $v_2 = c_2$ es válida para una detonación correspondiente al punto *O* (denominado *punto de Jouguet*).‡

† Para completar el tema debe señalarse también que una transición discontinua desde el estado *c* al estado *b* en otra onda de choque es también imposible, puesto que el gas debería cruzar dicho choque desde la zona de alta presión a la de baja presión.

‡ Debe recordarse que las velocidades v_1, v_2 significan siempre las velocidades normales a la superficie de discontinuidad.

La velocidad de la onda de detonación respecto al gas 1 es siempre supersónica (incluso para el punto O):

$$v_1 > c_1. \tag{121.5}$$

Esto se ve de modo más simple directamente de la figura 114. La velocidad del sonido viene dada gráficamente por la pendiente de la tangente a la adiabática del choque para el gas 1 (curva a trazos) en el punto a. Por otra parte, la velocidad v_1 viene dada por la pendiente de la cuerda ac. Puesto que todas las cuerdas que nos ocupan tienen una inclinación mayor que la tangente, siempre se tiene que $v_1 > c_1$. Moviéndose con velocidad supersónica, la onda de detonación, como una onda de choque, no influye sobre el estado del gas que está delante de él. La velocidad v_1 con que se mueve la onda de detonación respecto al gas sin quemar en reposo es la velocidad de propagación de la detonación.

Puesto que $v_1/V_1 = v_2/V_2 \equiv j$ y $V_1 > V_2$, se deduce que $v_1 > v_2$. La diferencia $v_1 - v_2$ es evidentemente la velocidad de los productos de la combustión respecto al gas sin quemar. Esta diferencia es positiva, es decir, los productos de la combustión se mueven en la dirección de propagación de la onda de detonación.

Podemos también señalar lo siguiente. En § 84 se demostró también que $ds_2/d(j^2) > 0$. En el punto en que j^2 tiene un mínimo, por consiguiente, s_2 también tiene un mínimo. Este punto es O y así se concluye que corresponde al menor valor de la entropía s_2 sobre la adiabática de la detonación. La entropía s_2 tiene también un extremal en O si consideramos el cambio de estado a lo largo de la línea ae (puesto que las pendientes de la curva y la tangente en O son iguales). Sin embargo, este extremal es un máximo. En efecto, un desplazamiento desde e a O corresponde al cambio de estado cuando la reacción de combustión tiene lugar en el gas comprimido y éste viene acompañado de desarrollo de calor y un aumento de entropía; sin embargo, el paso desde O hasta a correspondería a la conversión endotérmica de los productos de la combustión en los gases originales con un descenso de la entropía.

Si la detonación está producida por una onda de choque que se produce mediante una fuente o foco externo y que luego incide sobre el gas, cualquier punto de la parte superior de la adiabática de la detonación puede corresponder a la detonación. No obstante, resulta de particular interés considerar una detonación que sea debida al propio proceso de combustión. Veremos en § 122 que, en un cierto número de casos importantes, dicha detonación debe corresponder al punto de Jouguet, de modo que la velocidad de la onda de detonación respecto a los productos de la combustión inmediatamente detrás de ella es exactamente igual a la velocidad del sonido,

mientras que la velocidad $v_1 = jV_1$ respecto al gas sin quemar tiene el menor valor posible. Este resultado fue adelantado primeramente como hipótesis por D. L. CHAPMAN (1899) y E. JOUGUET (1905), pero su justificación teórica completa se debe a YA. B. ZELDOVICH (1940).

Deduzcamos ahora las relaciones existentes entre las diversas magnitudes de una onda de detonación en un gas perfecto. Sustituyendo en la ecuación general (121.1) la entalpía en la forma

$$w = w_0 + c_p T = w_0 + \gamma pV/(\gamma - 1),$$

obtenemos

$$\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}p_2V_2 - \frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}p_1V_1 - V_1p_2 + V_2p_1 = 2q, \qquad (121.6)$$

en donde $q = w_{01} - w_{02}$ designa nuevamente el calor de la reacción, reducido al cero absoluto de temperatura. La curva $p_2(V_2)$ dada por esta ecuación es una hipérbola rectangular. Para $p_2/p_1 \to \infty$, el cociente de densidades tiende a un límite finito $\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2 = (\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1)$; esta es la mayor compresión que puede obtenerse en una onda de detonación.

Las fórmulas se simplifican mucho en el caso importante de ondas de detonación intensas, que se obtienen cuando el calor desarrollado en la reacción es grande en comparación con la energía térmica interna del gas original, es decir, $q \gg c_{v1}T_1$. En este caso podemos despreciar los términos que contienen p_1 en (121.6), obteniéndose

$$p_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}V_2 - V_1\right) = 2q. \qquad (121.7)$$

Consideremos con más detalle una detonación correspondiente al punto de Jouguet, que tiene un interés particular como vimos en el estudio previo. En este punto $j^2 = c_2^2/V_2^2 = \gamma_2 p_2/V_2$. A partir de esta relación y (121.2) podemos expresar p_2 y V_2 en la forma

$$p_2 = (p_1 + j^2V_1)/(\gamma_2 + 1), \qquad V_2 = \gamma_2(p_1 + j^2V_1)/j^2(\gamma_2 + 1). \quad (121.8)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (121.6) y reemplazando j por v_1/V_1, tenemos después de una simple reducción, la siguiente ecuación de cuarto grado para la velocidad v_1:

$$v_1^4 - 2v_1^2[(\gamma_2^2 - 1)q + (\gamma_2^2 - \gamma_1)c_{v1}T_1] + \gamma_2^2(\gamma_1 - 1)^2 c_{v1}^2 T_1^2 = 0,$$

en donde se ha incluido la temperatura a través de $T = pV/(c_p - c_v) = pV/c_v(\gamma - 1)$. De aquí que†

$$v_1 = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma_2-1)[(\gamma_2+1)q+(\gamma_1+\gamma_2)c_{v1}T_1]\}}+ \\ +\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma_2+1)[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v1}T_1]\}}. \quad (121.9)$$

Esta fórmula determina la velocidad de propagación de la detonación en función de la temperatura T_1 de la mezcla gaseosa original.

Podemos volver a escribir las fórmulas (121.8) en la forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2+(\gamma_1-1)c_{v1}T_1}{(\gamma_2+1)(\gamma_1-1)c_{v1}T_1}, \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2[v_1^2+(\gamma_1-1)c_{v1}T_1]}{(\gamma_2+1)v_1^2}; \quad (121.10)$$

Junto con (121.9), determinan las relaciones de presión y densidad existentes entre los productos de la combustión y el gas sin quemar a la temperatura T_1.

Se calcula la velocidad v_2 como $v_2 = V_2v_1/V_1$, utilizando las fórmulas (121.9) y (121.10). El resultado es

$$v_2 = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma_2-1)[(\gamma_2+1)q+(\gamma_1+\gamma_2)c_{v1}T_1]\}}+ \\ +\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(\gamma_2+1)[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v1}T_1]\}}. \quad (121.11)$$

La diferencia $v_1 - v_2$, es decir, la velocidad de los productos de la combustión respecto al gas sin quemar, es

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\{2[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v1}T_1]/(\gamma_2+1)\}}. \quad (121.12)$$

La temperatura de los productos de la combustión se calcula a partir de la fórmula

$$c_{v2}T_2 = v_2^2/\gamma_2(\gamma_2-1) \quad (121.13)$$

---

† Si $x^4 - 2px^2 + q = 0$, entonces

$$x = \sqrt{[p \pm \sqrt{(p^2-q)}]} = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(p+\sqrt{q})]} \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}(p-\sqrt{q})]}.$$

En este caso los dos signos corresponden al caso en que puedan dibujarse dos tangentes desde el punto a hasta la adiabática del choque: una hacia arriba, como se indica en la figura 114, y la otra hacia abajo. La tangente hacia arriba, que es la que nos interesa, tiene una mayor pendiente, y de acuerdo con esto tomaremos el signo más.

(puesto que $v_2 = c_2$).

Todas estas fórmulas, más bien complejas, se simplifican notablemente en el caso de ondas de detonación intensas. En este caso, las velocidades vienen dadas por las fórmulas simples

$$v_1 = \sqrt{[2(\gamma_2^2-1)q]}, \qquad v_1 - v_2 = v_1/(\gamma_2+1). \tag{121.14}$$

El estado termodinámico de los productos de la combustión viene dado por las fórmulas

$$V_2/V_1 = \gamma_2/(\gamma_2+1), \qquad T_2 = 2\gamma_2 q/c_{v2}(\gamma_2+1),$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2(\gamma_2-1)}{\gamma_1-1}\frac{q}{c_{v1}T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2+1)c_1^2}. \tag{121.15}$$

Si comparamos las fórmulas (121.15) con las fórmulas correspondientes (120.5) de la combustión lenta, observaremos que, en el caso límite $q \gg c_{v1}T_1$, el cociente de las temperaturas de los productos de la combustión después de la detonación y de la combustión lenta es $T_{2,\text{det}}/T_{2,\text{com}} = 2\gamma_2^2/(\gamma_2+1)$. Este cociente siempre supera a la unidad (puesto que $\gamma_2 > 1$).

En todos los razonamientos anteriores, que se basaron en la figura 114, se ha supuesto tácitamente que la reacción química de la combustión es exotérmica desde el principio hasta el fin (es decir, en todas las etapas intermedias entre el gas original sin quemar y los productos finales de la combustión). En la mayoría de los casos esta hipótesis está justificada. Sin

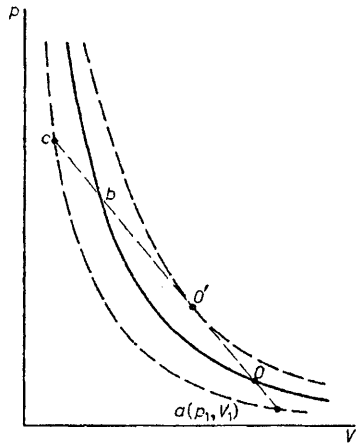

FIG. 115

embargo, son posibles, en principio, reacciones que sean exotérmicas inicialmente, pero endotérmicas en sus etapas finales (YA. B. ZELDOVICH y S. B. RATNER, 1941). La mezcla intermedia para la cual se absorbe por primera vez calor en lugar de desprenderse, corresponde entonces a una adiabática que cae por encima de la adiabática de la detonación que correspondería al estado de los productos de la combustión finales (figura 115).

Cualquier cuerda a lo largo de la cual varíe el estado de la mezcla detonante debe cortar a esta adiabática intermedia. El valor j_{min} correspondiente al valor mínimo posible de la velocidad de propagación de la combustión queda determinado, por consiguiente, mediante la pendiente de la tangente aO'. Las ondas de detonación con $j > j_{min}$ corresponden a puntos que caen sobre la adiabática de la detonación por encima del punto O y $v_2 < c_2$. Si $j = j_{min}$, el estado del gas varía a lo largo de la línea ca desde c hasta O' y luego de nuevo hacia abajo hasta O, que sustituye el punto de Jouguet ordinario como punto que corresponde a la detonación espontánea; aquí $v_2 > c_2$, contrariamente al resultado usual.

PROBLEMA

Determinar las magnitudes termodinámicas correspondientes al gas que se encuentra inmediatamente detrás de la onda de choque que se forma en el frente delantero de una onda de detonación intensa correspondiente al punto de Jouguet.

Solución. Inmediatamente detrás de la onda de choque tenemos gas sin quemar y su estado está representado por el punto e en donde la tangente aO producida corta a la adiabática del choque (figura 114) del gas 1, indicada a trazos. Designando las coordenadas de este punto por (p_1', V_1'), tenemos, en primer lugar, mediante la ecuación (85.1) para la adiabática del choque del gas 1,

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{(\gamma_1+1)p_1+(\gamma_1-1)p_1'}{(\gamma_1-1)p_1+(\gamma_1+1)p_1'}$$

y, segundo, $(p_1' - p_1)/(V_1 - V_1') = j^2 = v_1^2/V_1^2$. Tomando v_1 a partir de (121.14), se obtiene

$$p_1' = p_1\frac{4(\gamma_2^2-1)}{\gamma_1^2-1}\frac{q}{c_{v1}T_1}, \qquad V_1' = V_1\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1},$$

$$T_1' = \frac{q}{c_{v1}}\frac{4(\gamma_2^2-1)}{(\gamma_1+1)^2}.$$

El cociente entre la presión p_1' y la presión p^2 detrás de la onda de detonación es

$$p_1'/p_2 = 2(\gamma_2+1)/(\gamma_1+1).$$

§ 122. Propagación de una onda de detonación

Consideremos a continuación algunos casos reales de la propagación de ondas de detonación en un gas inicialmente en reposo. Tomemos primeramente el caso de detonación en un gas que está dentro de un tubo cerrado por un extremo ($x = 0$). Las condiciones límites en este caso son que la velocidad del gas es cero, tanto delante de la onda de detonación (que no afecta al estado del gas que se encuentra delante de él) como en el extremo cerrado del tubo. Como el gas adquiere una velocidad no nula cuando la onda de detonación pasa, la velocidad debe disminuir en la región entre la onda de detonación y el extremo cerrado del tubo. Con objeto de determinar el esquema de flujo resultante, observemos que en este caso no hay ningún parámetro de longitud que pueda caracterizar las condiciones del flujo a lo largo del tubo (dirección x). Hemos visto en § 92 que, en dichos casos, la velocidad del gas puede cambiar, o bien en una onda de choque (que separa dos regiones en donde la velocidad es constante), o bien en una onda de rarefacción de semejanza.

Supongamos primeramente que la onda de detonación no corresponde al punto de Jouguet sobre la adiabática. Entonces, su velocidad de propagación relativa al gas detrás de ella es $v_2 < c_2$. Es fácil ver que, en este caso, no pueden seguir a la onda de detonación ni una onda de choque ni una discontinuidad débil (frente delantero de una onda de rarefacción). En el primer caso tendría que moverse, respecto al gas delante de ella, con una velocidad que superase a c_2, y en el segundo con una velocidad igual a c_2, y en ambos casos adelantarían a la onda de detonación. Así pues, en la hipótesis anterior, la velocidad del gas que se mueve detrás de la onda de detonación no puede disminuir, es decir, la condición límite en $x = 0$ no puede satisfacerse.

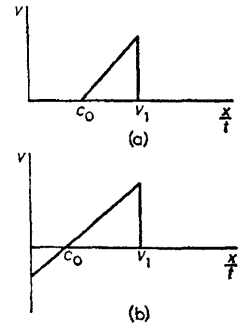

FIG. 116

Sólo puede satisfacerse esta condición en el caso de una onda de detonación correspondiente al punto de Jouguet. Entonces, $v_2 = c_2$ y la onda de

detonación puede ir seguida de una onda de rarefacción. Ésta se forma en $x = 0$ cuando empieza la detonación y su frente delantero coincide con la onda de detonación.

Así llegamos al importante resultado de que una onda de detonación que se propaga dentro de un tubo, produciéndose la ignición del gas en el extremo cerrado, debe corresponder al punto de Jouguet. Se mueve respecto al gas que está inmediatamente detrás de ella con una velocidad igual a la velocidad local del sonido. La onda de detonación va junto con una onda de rarefacción, en la cual disminuye la velocidad del gas monótonamente hasta cero (respecto al tubo). El punto en donde la velocidad se hace cero es una discontinuidad débil. Detrás de esta discontinuidad el gas está en reposo (figura 116a).

Consideremos a continuación una onda de detonación que se propaga desde el extremo abierto de un tubo. La presión del gas delante de la onda de detonación debe ser igual a la presión original, que evidentemente es igual a la presión externa. Resulta claro en este caso también que la velocidad debe disminuir en alguna parte detrás de la onda de detonación. Si la velocidad del gas fuese constante, entre el extremo del tubo y la onda de detonación, resultaría que el gas estaría siendo succionado desde el extremo abierto del tubo hacia el exterior; esto resulta imposible, puesto que la presión del gas en el tubo debe ser mayor que la presión externa, teniendo en cuenta el aumento de presión de una onda de detonación. Por las mismas razones que en el caso anterior, la onda de detonación debe corresponder al punto de Jouguet. El esquema de flujo resultante se indica en forma diagramática en la figura 116b. Inmediatamente detrás de la onda de detonación existe una onda de rarefacción de semejanza, en la cual la velocidad decrece monótonamente hacia el extremo del tubo, cambiando de signo en cierto punto. Esto significa que en la sección final del tubo el gas se mueve hacia el extremo abierto y fluye al exterior; la velocidad con que sale del tubo es igual a la velocidad local del sonido y su presión supera a la presión externa. Hemos visto en § 90 que dicho flujo es posible.

Consideremos a continuación una onda de detonación con simetría esférica y que sale de un punto central en donde se produjo la ignición inicial (Ya. B. Zeldovich, 1942). Como el gas debe estar en reposo tanto delante de la detonación como cerca de su centro, la velocidad del gas debe disminuir desde la onda de detonación hacia el centro. Igual que en el caso del flujo en un tubo, se carece de parámetros de semejanza que tengan las dimensiones de longitud. Por consiguiente, el resultado debe ser un flujo de semejanza, sustituyéndose la coordenada x por la distancia r al centro. Así pues, todas las magnitudes son funciones únicamente del cociente r/t.

En el caso de flujo con simetría central [$v_r = v(r, t)$, $v_\phi = v_\theta = 0$], las

ecuaciones del movimiento son como sigue. La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial r} + \frac{2v\rho}{r} = 0;$$

la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

y la ecuación de conservación de la entropía,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Utilizando la nueva variable $\xi = r/t$ (> 0) y suponiendo que todas las magnitudes son funciones de ξ únicamente, se tiene

$$(\xi - v)\rho'/\rho = v' + 2v/\xi, \tag{122.1}$$

$$(\xi - v)v' = p'/\rho, \tag{122.2}$$

$$(\xi - v)s' = 0, \tag{122.3}$$

designando con el símbolo prima la derivación respecto a ξ. No podemos tener $v = \xi$, puesto que esto contradice la primera ecuación. A partir de la tercera ecuación, por consiguiente, $s' = 0$, es decir, $s =$ constante. Por tanto, podemos escribir $p' = (\partial p/\partial \rho)_s \rho' = c^2\rho'$, y la ecuación (122.2) se reduce a

$$(\xi - v)v' = c^2\rho'/\rho. \tag{122.4}$$

Sustituyendo ρ'/ρ de (122.1), se obtiene la relación

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right]v' = \frac{2v}{\xi}. \tag{122.5}$$

Las ecuaciones (122.4) y (122.5) no pueden integrarse analíticamente, pero pueden estudiarse las propiedades de sus soluciones.

La región en donde el gas que fluye es del tipo considerado, está limitada, como veremos más adelante, por dos esferas, siendo la exterior la superficie de la propia onda de detonación, mientras que la interior es la superficie de una discontinuidad débil, en donde la velocidad es cero.

Examinemos primeramente las propiedades de la solución cerca del punto en donde v es cero. Es fácil ver que en donde $v = 0$, también $\xi = 0$:

$$v = 0, \qquad \xi = c. \tag{122.6}$$

En efecto, cuando v tiende a cero, $\log v \to -\infty$; de aquí que cuando ξ disminuye hasta el valor correspondiente al límite interior de la región en cuestión, la derivada $\mathrm{d}\log v/\mathrm{d}\xi$ debe tender a $+\infty$. Sin embargo, según (122.5), tenemos cuando $v = 0$

$$\mathrm{d}\log v/\mathrm{d}\xi = 2c^2/\xi(\xi^2 - c^2).$$

Esta expresión sólo puede tender a $+\infty$ si $\xi \to c$.

En el origen, la velocidad radial debe anularse por simetría. Así pues, existe una región de gas en reposo alrededor del origen; esta región es la interior a la esfera $\xi = c_0$, siendo c_0 la velocidad del sonido para el punto en donde $v = 0$.

Averigüemos las propiedades de la función $v(\xi)$ cerca del punto (122.6). A partir de (122.5) tenemos

$$v\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}v} = \tfrac{1}{2}\xi\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right].$$

Conservando las magnitudes sólo de primer orden (tales como v, $\xi - c_0$ y $c - c_0$), tenemos después de un sencillo cálculo $v\mathrm{d}(\xi - c_0)/\mathrm{d}v = (\xi - c_0) - (v + c - c_0)$. De acuerdo con (95.1) tenemos $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, siendo α_0 una constante positiva (el valor de (95.2) para $v = 0$), y así obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $\xi - c_0$ en función de v:

$$v\,\mathrm{d}(\xi - c_0)/\mathrm{d}v - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

La solución de esta ecuación es

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \log(\text{constante}/v). \tag{122.7}$$

Esta expresión determina implícitamente la función $v(\xi)$ cerca del punto en donde $v = 0$.

Vemos que el límite interno es una superficie de discontinuidad débil: la velocidad tiende de modo continuo hacia cero. La curva de $v(\xi)$ tiene una tangente horizontal en este punto ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}\xi = 0$). La discontinuidad débil que aparece es muy poco corriente: la primera derivada es continua, pero todas las derivadas de orden superior son infinitas [como se ve fácilmente a partir de (122.7)]. El cociente r/t para $v = 0$ es evidentemente igual a la velocidad del movimiento del límite respecto al gas; de acuerdo con (122.6), es igual a la velocidad local del sonido, como debe ser en el caso de una discontinuidad débil.

Según (122.7), tenemos para valores pequeños de v,

$$\xi - v - c = (\xi - c_0) - (v + c - c_0)$$
$$= \alpha_0 v[\log(\text{constante}/v) - 1].$$

Para v pequeño, esta magnitud es positiva: $\xi - v - c > 0$. Demostraremos que la diferencia $(\xi - v) - c$ no puede cambiar de signo en la región del flujo considerado. Consideremos un punto de esta región, si es que hay alguno, en donde

$$\xi - v = c, \qquad v \neq 0. \tag{122.8}$$

Según (122.5) la derivada v' debe ser infinita en este punto, es decir,

$$d\xi/dv = 0. \tag{122.9}$$

En cuanto a la segunda derivada $d^2\xi/dv^2$ se demuestra por simple cálculo [utilizando las condiciones (122.8) y (122.9)] que vale $d^2\xi/dv^2 = -\alpha_0\xi/c_0 v$, que no es nula. Esto significa que ξ como función de v posee un máximo en el punto en cuestión. Así, la función $v(\xi)$ existe sólo para valores de ξ menores que el correspondiente a las condiciones (122.8), y este valor es el otro límite de la región considerada. Como $\xi - v - c$ se anula sólo en el límite de la región y $\xi - v - c > 0$ para valores pequeños de v, llegamos a la conclusión de que

$$\xi - v > c \tag{122.10}$$

en cualquier punto de la región.

Es fácil comprobar que el límite externo de la región del flujo considerado corresponde al punto en que se cumplen las condiciones (122.8). En efecto, observemos que la diferencia $r/t - v$, en donde r es la coordenada en el límite, es justamente la velocidad del límite relativo al gas posterior. Sin embargo, una superficie en la cual $r/t - v > c$ no puede corresponder a una onda de detonación (en donde debe cumplirse $r/t - v \leqslant c$). Por tanto, el límite externo de dicha región puede ser sólo el punto donde se cumple (122.8). En este límite v cae discontinuamente a cero y la velocidad del límite relativa al gas posterior es igual a la velocidad local del sonido. Esto significa que la onda de detonación debe corresponder al punto de Jouguet sobre la adiabática de la detonación.†

Tenemos así el siguiente esquema de flujo para la propagación esférica de una detonación. La onda de detonación, como la de un tubo, debe corresponder al punto de Jouguet. Inmediatamente detrás existe una onda de rare-

† Observemos que v = constante no es una solución de las ecuaciones del movimiento simétrico centralmente. Por tanto, la onda de detonación no puede ir seguida de una región de velocidad constante.

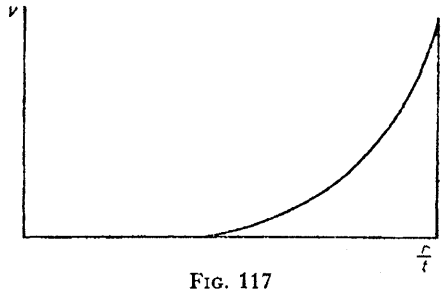

FIG. 117

facción igualmente esférica, en la cual la velocidad del gas disminuye hasta cero. El decrecimiento es monótono, ya que según (122.5) la derivada $dv/d\xi$ sólo se anula para $v = 0$. La presión y densidad del gas también decrecen monótonamente, ya que según (122.4) y (122.10) la derivada p' tiene siempre el mismo signo que v'. La curva que nos da v en función de r/t tiene una tangente vertical en el límite externo [según (122.9)] y una tangente horizontal en el límite interno (figura 117). El límite interno es una discontinuidad débil, cerca de la cual la dependencia de v con r/t viene dada por la ecuación (122.7). El gas dentro de la esfera limitada por la discontinuidad débil está en reposo. Sin embargo, la masa total del gas en reposo es muy pequeña (véanse las notas al final del § 99).

Así, en todos los casos típicos de propagación monodimensional espontánea de la detonación que hemos considerado, las condiciones límites en la región posterior a la detonación exigen una velocidad única en esta última que corresponde al punto de Jouguet (toda la adiabática de la detonación por debajo de este punto viene excluida por los argumentos del § 121). La obtención en un tubo de sección transversal constante de una detonación correspondiente a la parte de la adiabática por encima del punto de Jouguet† requeriría una compresión artificial de los productos de combustión por medio de un pistón que se desplazara con velocidad supersónica (véase problema 3).

Sin embargo, debe destacarse que estas conclusiones no son universalmente válidas y existen casos de propagación de la detonación, en donde una onda de detonación sobrecomprimida ocurre espontáneamente. En particular, este tipo de onda se produce cuando una onda de detonación ordinaria pasa de un tubo ancho a otro estrecho (B. V. AIVAZOV y YA. B. ZELDOVICH, 1947). Este fenómeno tiene lugar porque cuando una onda de detonación alcanza el estrechamiento del tubo, se refleja parcialmente y la presión

† Tales ondas de detonación se llaman a veces «sobrecomprimidas», ya que en ellas el gas está comprimido a presiones superiores a las de la onda «normal» de detonación correspondiente al punto de Jouguet.

de los productos de la combustión que se mueven de la parte ancha a la estrecha se incrementa considerablemente (véase problema 4).

Hasta ahora hemos despreciado completamente las pérdidas de calor que pueden acompañar a la propagación de una onda de detonación. Como en el caso de la combustión lenta, estas pérdidas pueden hacer imposible la propagación de la detonación. En la detonación del gas en un tubo, la fuente de las pérdidas es fundamentalmente la extracción de calor a través de las paredes del tubo y el retraso del gas a causa de la fricción. Una detonación en una barra delgada de explosivo viene limitada principalmente por la dispersión de los productos de la combustión: cuando la barra es demasiado delgada en comparación con la anchura de la zona de combustión, parte del material se dispersa antes de que tenga lugar la reacción y la propagación de la detonación es imposible (YU. B. KHARITON, 1940).

En condiciones próximas a las límites para que pueda propagarse la detonación, se observa un curioso fenómeno denominado *detonación en giro* (*spinning detonation*). De acuerdo con K. I. SHCHELKIN (1945), la onda de choque que se propaga a lo largo del tubo en el caso de una detonación de este tipo deja de poseer simetría axial (normalmente casi plana), y gira alrededor del eje del tubo cuando se mueve a lo largo del mismo. La ignición del gas cuando pasa a través del choque se produce principalmente en una zona del frente de onda en donde existe una deformación excéntrica que se mueve en espiral. No existe ninguna teoría cuantitativa de la detonación en giro.†

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el flujo del gas cuando se propaga una detonación desde el extremo cerrado de un tubo.

Solución. La velocidad v_1 de la onda de detonación respecto al gas en reposo que hay delante de él y su velocidad v_2 respecto al gas quemado que hay inmediatamente detrás de ella, vienen dadas en función de la temperatura T_1 por las fórmulas (121.11), (121.12). v_1 es también la velocidad de la onda respecto al tubo, de modo que su coordenada es $x = v_1 t$. La velocidad (relativa a la tubería) de los productos de la combustión en la onda de detonación es $v_1 - v_2$. La velocidad v_2 es igual a la velocidad local del sonido. Puesto que la velocidad del sonido está relacionada con la velocidad del gas v en una onda de rarefacción de semejanza a través de $c = c_0 + (\gamma - 1)v/2$, tenemos $v_2 = c_0 + (\gamma - 1)(v_1 - v_2)/2$, de aquí que $c_0 = (\gamma_2 + 1)v_2/2 - (\gamma_2 - 1)v_1/2$. En el caso de una onda de detonación intensa tenemos, según (121.14), simplemente que $c_0 = v_1/2$. La cantidad c_0 es la velocidad del límite en retroceso de la onda de rarefacción. La velocidad varía linealmente entre los dos límites (figura 116*a*).

Problema 2. Igual que el problema 1, pero en el caso de un tubo con el extremo abierto.

† YA. B. ZELDOVICH ha dado una discusión cualitativa (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS*, **52**, 147, 1946).

Solución. Las velocidades v_1 y v_2 se determinan como en el caso anterior y, por tanto, c_0 es la misma también. Sin embargo, la onda de rarefacción se extiende ahora, no hasta el punto en donde $v = 0$, sino hasta el extremo del tubo ($x = 0$, figura 116*b*). Vemos a partir de la fórmula $x/t = v + c$ (92.5) que el gas sale del extremo abierto del tubo con una velocidad $v = -c$ igual a la velocidad local del sonido. Poniendo $-v = c = c_0 + (\gamma_2 - 1)v/2$, se encuentra finalmente que la velocidad del flujo de salida es $[-v]_{x=0} = 2c_0/(\gamma_2 + 1)$. En el caso de una onda de detonación intensa esta velocidad es $v_1/(\gamma_2 + 1)$.

Problema 3. El mismo que el problema 1, pero en el caso de una onda de detonación que se propaga en un tubo cuyo extremo está cerrado por un pistón que empieza a moverse hacia adelante con una velocidad constante U.

Solución. Si $U < v_1$, la distribución de velocidades en el gas es de la forma indicada en la figura 118*a*. La velocidad del gas disminuye desde $v_1 - v_2$ en $x/t = v_1$ hasta U en $x/t = c_0 + (\gamma + 1)U/2$, con el mismo valor de c_0 que antes. A continuación, existe una región en la que el gas se mueve con velocidad constante U.

Sin embargo, si $U > v_1$, la onda de detonación no puede corresponder al punto de Jouguet (puesto que el pistón la adelantaría). En este caso tenemos una onda de detonación sobrecomprimida, que corresponde a un punto de la adiabática por encima del punto de Jouguet. Está determinado por el hecho de que la discontinuidad de la velocidad en la onda de detonación debe igualar a la velocidad del pistón: $v_1 - v_2 = U$. En toda la región comprendida entre la onda de detonación y el pistón el gas se mueve con velocidad constante U (figura 118*b*).

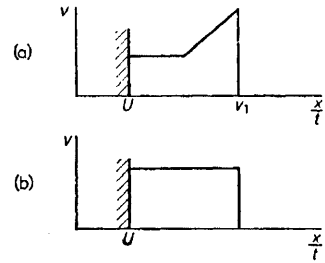

FIG. 118

Problema 4. Determinar la presión en una pared perfectamente rígida cuando una onda de detonación plana e intensa que incide normalmente se refleja sobre ella (K. P. STANYUKOVICH, 1946).

Solución. Cuando una onda de detonación incide sobre una pared, se forma una onda de choque reflejada que se propaga en sentido opuesto a través de los productos de la combustión. Los cálculos son totalmente semejantes a los del § 93, problema 1. Con la misma notación, obtenemos las tres relaciones

$$p_2(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3), \qquad V_2/V_1 = \gamma_2/(\gamma_2 + 1),$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_3}{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_3};$$

en ellas hemos despreciado a p_1 en comparación con p_2, pero p_2 y p_3 son del mismo orden de magnitud. Eliminando los volúmenes, obtenemos una ecuación de segundo grado para p_3, y debemos tomar la raíz que sea mayor que p_2:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{(17\gamma_2^2 + 3\gamma_2 + 1)}}{4\gamma_2}.$$

Debe señalarse que esta cantidad es casi independiente de γ_2, variando desde 2,6 hasta 2,3 cuando γ_2 varía de 1 a ∞.

§ 123. Relación existente entre los diversos modos de combustión

Se ha demostrado en § 121 que la detonación corresponde a puntos situados sobre la parte superior de la adiabática de la detonación para el proceso de combustión de que se trate. Como la ecuación de esta adiabática es consecuencia solamente de las leyes de conservación de la masa, el impulso y la energía (aplicadas a los estados inicial y final del gas en combustión), resulta evidente que los puntos que representan el estado de los productos de la reacción deben estar sobre la misma curva para cualquier otro modo de combustión en el que la zona de combustión pueda considerarse como una superficie de discontinuidad de cierto tipo. Investiguemos a continuación el significado físico del resto de la curva.

Pasando por el punto (p_1, V_1) (punto 1 de la figura 119) dibujamos dos rectas, una vertical $1A$ y la otra horizontal $1A'$, además de las dos tangentes $1O$ y $1O'$ a la adiabática. Los puntos A, A', O, O' en donde estas rectas cortan o tocan a la curva, dividen a la adiabática en cinco partes. La parte que cae por encima de O corresponde a la detonación, como ya hemos dicho. Consideraremos a continuación las otras partes de la curva.

En primer lugar, es fácil ver que la sección AA' carece de significado físico. Efectivamente, en esta sección tenemos $p_2 > p_1$, $V_2 > V_1$, y de este modo el flujo másico $j = \sqrt{[(p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)]}$ es imaginario.

En los puntos de contacto O y O', la derivada $\mathrm{d}(j^2)/\mathrm{d}p_2$ es cero; se ha demostrado en § 84 que en dichos puntos se tiene $v_2/c_2 = 1$ y $\mathrm{d}(v_2/c_2)/\mathrm{d}p_2 < 0$. De aquí se deduce que por encima de los puntos de contacto $v_2/c_2 < 1$, y por debajo de ellos $v_2/c_2 > 1$. La relación entre v_1 y c_1 se encuentra siempre fácilmente considerando las pendientes de las cuerdas y tangentes correspondientes, como hicimos en § 121 para la parte por encima de O. El resultado es que son válidas las siguientes desigualdades en las diversas secciones de la adiabática:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{encima de } O & v_1 > c_1, & v_2 < c_2; \\ \text{sobre } AO & v_1 > c_1, & v_2 > c_2; \\ \text{sobre } A'O' & v_1 < c_1, & v_2 < c_2; \\ \text{por debajo de } O' & v_1 < c_1, & v_2 > c_2. \end{array}\right\} \quad (123.1)$$

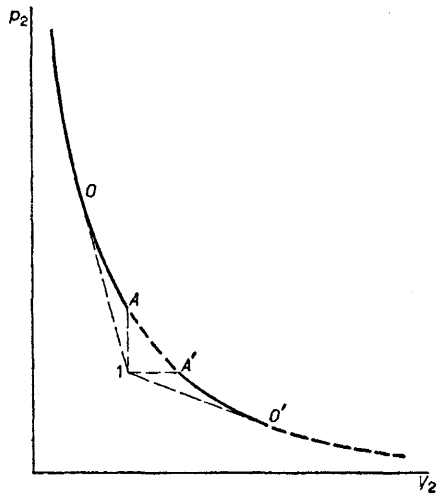

FIG. 119

En O y O', $v_2 = c_2$. Cuando nos acercamos a A el flujo j y, por tanto, las velocidades v_1, v_2, tienden a infinito. Sin embargo, cuando nos aproximamos a A', j y las velocidades v_1, v_2 tienden a cero.

En § 84 hemos analizado la estabilidad de una onda de choque respecto a desplazamientos infinitesimales en dirección perpendicular a su plano y hemos visto que la estabilidad depende de la relación existente entre el número de parámetros que determinan la perturbación y el número de condiciones límites que deben satisfacer las perturbaciones en la superficie de discontinuidad.

También pueden aplicarse todas estas consideraciones a las superficies de discontinuidad consideradas aquí. En particular, sigue siendo válido el cálculo realizado en § 84 del número de parámetros de la perturbación en cada caso (123.1), indicado en la figura 47. La única diferencia es la siguiente. En la combustión sin detonación, la velocidad de propagación está determinada únicamente por las propiedades de la reacción química y por las condiciones de transferencia de calor desde la zona de combustión hacia el gas frío que hay delante de ella. Esto significa que el flujo másico j a través de la zona de combustión es una cantidad dada (o, con más precisión, una función determinada del estado del gas sin quemar), mientras que en una onda de choque o de detonación j puede tener un valor cualquiera. De aquí se deduce que, en una discontinuidad que es una zona de combustión sin detonación, el número de condiciones límites es uno más que en el caso de una onda de choque: se añade la condición de que j tenga un valor determinado. Así pues, existen conjuntamente cuatro condiciones y podemos ahora

sacar la conclusión, del mismo modo que en § 84, de que la discontinuidad es absolutamente inestable sólo en el caso en que $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, que corresponde a puntos que están por debajo del punto O' de la adiabática. En consecuencia, esta parte de la curva no corresponde a ningún modo de combustión que pueda conseguirse en la práctica.

La sección $A'O'$ de la adiabática, en la cual las dos velocidades v_1 y v_2 son subsónicas, corresponde a la combustión lenta ordinaria. Un aumento de la velocidad de propagación de la combustión, es decir, de j, corresponde a un movimiento desde A', en donde $j = 0$, hacia O'. Las fórmulas (120.5) corresponden al punto A' (en donde $p_1 = p_2$) y son válidas si j es suficientemente pequeño, por ejemplo, si la velocidad de propagación es pequeña en comparación con la del sonido. El punto O' corresponde a la combustión «más rápida» de este tipo. Daremos las fórmulas que corresponden a este caso límite.

El punto O', como el O, es un punto de contacto entre la curva y la tangente desde el punto 1. De aquí que las fórmulas relacionadas con O' puedan obtenerse inmediatamente a partir de las fórmulas (121.8)-(121.11) para O cambiando de modo apropiado los signos [ver la nota a pie de página correspondiente a (121.9)]. En las fórmulas (121.9) y (121.11) correspondientes a v_1 y v_2 cambiaremos el signo del segundo radical y, por consiguiente, también resultará cambiado el signo de la expresión (121.12) correspondiente a $v_1 - v_2$. Las fórmulas (121.10) resultan sin cambios si se considera que v_1 toma su nuevo valor. Todas estas fórmulas se simplifican mucho si el calor de reacción es grande ($q \gg c_{v1}T_1$). Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \gamma_2 p_1 V_1/\sqrt{[2(\gamma_2^2-1)q]}, & v_2 &= \sqrt{[2(\gamma_2-1)q/(\gamma_2+1)]}, \\ p_2/p_1 &= 1/(\gamma_2+1), & c_{v2}T_2 &= 2q/\gamma_2(\gamma_2+1). \end{aligned} \tag{123.2}$$

Ahora debe señalarse el punto siguiente. Hemos visto que, en la combustión lenta dentro de un tubo cerrado, debe formarse delante de la zona de combustión una onda de choque. En el caso de velocidades grandes de propagación de la combustión, esta onda de choque es intensa y puede influir considerablemente sobre el estado del gas que entra en la zona de combustión. Por consiguiente, resulta inútil, hablando estrictamente, el investigar la variación en la manera de producirse la combustión al aumentar la velocidad, si permanece sin variar el estado p_1, V_1 del gas sin quemar. Con objeto de alcanzar el punto O' debemos crear condiciones de combustión en las que no se forme ninguna onda de choque. Esto puede hacerse, por ejemplo, en una combustión dentro de un tubo abierto por ambos extremos, en el que se produce una renovación continua de los productos de la combustión en su extremo posterior. La velocidad de renovación debe ser tal que se con-

siga el que la zona de combustión permanezca en reposo y así no se forme ninguna onda de choque.

Cuando la transferencia de calor es muy eficiente (por ejemplo, transferencia por radiación), el valor de j puede, en principio, superar al correspondiente al punto O'. El modo de combustión resultante entonces debe corresponder a puntos sobre la sección AO de la adiabática, puesto que la combustión correspondiente a un punto por encima de O no puede, en general, producirse espontáneamente por las mismas razones que en la detonación.

La combustión lenta ordinaria puede espontáneamente transformarse en una detonación. Esta transición se produce debido a una aceleración de la llama, acompañada de un aumento en la intensidad de la onda de choque que la precede, hasta que el choque resulta lo suficientemente intenso como para producir la ignición del gas que pasa a su través. El mecanismo de esta aceleración espontánea de la llama no está claro todavía; es posible que resulte tener importancia la turbulencia de la llama producida por las paredes de la tubería (K. I. SHCHELKIN). También es posible que la propagación estacionaria de la llama resulte inestable cuando su frente se curve debido al rozamiento del gas contra las paredes del tubo (YA. B. ZELDOVICH).

En conclusión, podemos llamar la atención acerca de las siguientes diferencias generales [además de las obtenidas en las desigualdades (123.1)] entre los modos de combustión correspondientes a la parte superior e inferior de la adiabática. Encima de A tenemos $p_2 > p_1$, $V_2 < V_1$, $v_2 < v_1$. Es decir, los productos de la reacción tienen una presión y densidad mayor que los del gas original y se mueven detrás del frente de la combustión con velocidad $v_1 - v_2$. En la región por debajo de A, sin embargo, las desigualdades se invierten: $p_2 < p_1$, $V_2 > V_1$, $v_2 > v_1$, y los productos de la combustión son menos densos que los del gas original.

§ 124. Discontinuidades de condensación

Existe una semejanza formal entre las ondas de detonación y lo que se denomina *discontinuidades de condensación*; éstas se producen, por ejemplo, en el flujo de un gas que contiene vapor de agua sobresaturado. Las discontinuidades son el resultado de una condensación repentina del vapor que se produce muy rápidamente en una región muy estrecha, que puede considerarse como una superficie de discontinuidad (discontinuidad de condensación) que separa el gas original de un gas que contiene vapor condensado (*niebla*). Debe resaltarse que las discontinuidades de condensación son un fenómeno físico distinto y diferenciado y no es el resultado de la compresión del gas en una onda de choque ordinaria; este último efecto no puede conducir a la condensación, puesto que el aumento de presión en la onda de choque tiene menos efecto sobre el grado de sobresaturación que el incre-

mento de temperatura. Las discontinuidades de condensación fueron estudiadas, en primer lugar, teóricamente por S. Z. BELENKII (1945).

Como la combustión, la condensación de un vapor es un proceso exotérmico. El calor de reacción está representado ahora por el calor desprendido por unidad de masa debido a la condensación del vapor.† La condensación adiabática que da p_2 en función de V_2 para un estado p_1, V_1 dado del gas original no condensado, es de la misma forma que la adiabática de combustión indicada en la figura 119. La relación existente entre las velocidades de propagación de la discontinuidad v_1, v_2 y las velocidades del sonido c_1, c_2 para las diversas partes de la adiabática de la condensación, viene dada por las desigualdades (123.1). Sin embargo, en la realidad no pueden producirse los cuatro casos enumerados en (123.1).

En primer lugar, se plantea la cuestión de si son estables las discontinuidades de condensación respecto a perturbaciones pequeñas en una dirección perpendicular a la superficie. En este aspecto, sus propiedades son totalmente semejantes a las de las zonas de combustión. Hemos visto (§ 123) que la diferencia de estabilidad entre las zonas de combustión y las ondas de choque ordinarias se debe a la existencia de una condición adicional (que el flujo j tenga un valor dado) que debe satisfacerse en la superficie. En el caso de las discontinuidades de condensación existe de nuevo una condición adicional: el estado termodinámico del gas 1 delante de la discontinuidad debe ser la adecuada para que empiece una rápida condensación del gas.‡ Por consiguiente, se obtiene inmediatamente la conclusión de que la totalidad de la adiabática por debajo de O', para la cual $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, está excluida, ya que no corresponde a discontinuidades estables.

Es fácil ver que las discontinuidades correspondientes a la parte por encima de O, en las cuales $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$, tampoco pueden presentarse en la práctica. Dicha discontinuidad se movería con velocidad supersónica respecto al gas que hay delante de él y, por tanto, su presencia no deberá influir sobre el estado de este gas. En consecuencia, la discontinuidad tendría que haberse formado a lo largo de una superficie determinada por las condiciones del flujo, a saber aquella superficie en la que se satisfacen las condiciones necesarias para el establecimiento de una rápida condensación. La velocidad de la discontinuidad respecto al gas que está detrás de ella, por otra parte, deberá ser subsónica en este caso. Sin embargo, en general, las ecuaciones del flujo subsónico no poseen ninguna solución, para la cual

† El calor q no es, estrictamente hablando, el calor latente usual de condensación, puesto que el proceso que se produce en la zona de condensación incluye, no sólo la condensación isoterma del vapor, sino también una variación general de la temperatura del gas. Sin embargo, si el grado de sobresaturación no es demasiado pequeño (condición que normalmente se satisface), la diferencia carece de importancia.

‡ Esta condición da una relación entre la presión y la temperatura del gas 1.

todas las magnitudes tomen valores prescritos sobre una superficie dada.†

Así pues, sólo son posibles dos tipos de discontinuidades de condensación: (1) discontinuidades supersónicas (la sección AO de la adiabática) para las cuales

$$v_1 > c_1, \qquad v_2 > c_2, \qquad p_2 > p_1, \qquad V_2 < V_1 \tag{124.1}$$

de modo que la condensación lleva como consecuencia una compresión, (2) discontinuidades subsónicas (la sección $A'O'$ de la adiabática), en las cuales

$$v_1 < c_1, \qquad v_2 < c_2, \qquad p_2 < p_1, \qquad V_2 > V_1 \tag{124.2}$$

y la condensación lleva como consecuencia una rarefacción.

El valor del flujo j aumenta monótonamente a lo largo de la sección $A'O'$ desde A' (en donde $j = 0$) hasta O', y disminuye monótonamente a lo largo de AO desde A (en donde $j = \infty$) hasta O. El intervalo de valores de j (y, por consiguiente, el margen de valores de la velocidad $v_1 = jV_1$) entre los correspondientes a O y O' están «prohibidos» y no pueden presentarse en una discontinuidad de condensación. La masa total de vapor condensado es normalmente muy pequeña en comparación con la masa del gas original. Por consiguiente, podemos considerar ambos gases 1 y 2 como gases perfectos; por la misma razón, los calores específicos de los dos gases pueden suponerse iguales. Entonces el valor de v_1 en el punto O está determinado por la fórmula (121.9), y su valor en O' por la misma fórmula, pero con el signo del segundo radical cambiado; poniendo $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ y $c_1^2 = \gamma(\gamma - 1)c_v T_1$, encontramos que el margen prohibido de valores de v_1 es

$$\sqrt{[c_1^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} < v_1 < \sqrt{[c_1^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]} + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\gamma^2 - 1)q]}. \tag{124.3}$$

PROBLEMA

Determinar los valores límites del cociente de presiones p_2/p_1 en una condensación de discontinuidad, suponiendo que $q/c_1^2 \ll 1$.

† Son válidos razonamientos semejantes en el caso en que la velocidad total $\mathbf{v}_2$ (de la cual $v_2 < c_2$ es la componente normal a la discontinuidad) sea supersónica.

Para evitar malas interpretaciones, debe señalarse que una discontinuidad de condensación con $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$ puede simularse realmente (para ciertas condiciones del contenido del vapor y forma de la superficie a través de la cual se produce el flujo) mediante una discontinuidad de condensación verdadera con $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$, seguida muy de cerca por una onda de choque que hace subsónico al flujo.

Solución. En la sección $A'O'$ de la adiabática de la condensación (figura 119), el cociente p_2/p_1 aumenta monótonamente desde O' hasta A', tomando valores comprendidos en el intervalo

$$1-\gamma\sqrt{[2(\gamma-1)q/(\gamma+1)c_1^2]} \leqslant p_2/p_1 \leqslant 1.$$

En la sección AO, este cociente aumenta desde A hasta O, tomando valores comprendidos en el intervalo

$$1+\gamma(\gamma-1)q/c_1^2 \leqslant p_2/p_1 \leqslant 1+\gamma\sqrt{[2(\gamma-1)q/(\gamma+1)c_1^2]}.$$

CAPÍTULO XV

DINAMICA RELATIVISTA DE FLUIDOS

§ 125. Tensor impulso-energía

El establecimiento de las ecuaciones relativistas del movimiento de los fluidos tiene una importancia fundamental. La necesidad de tener en cuenta los efectos relativistas puede deberse no sólo a una gran velocidad del movimiento macroscópico (comparable con la velocidad de la luz), sino también, como veremos, a una gran velocidad del movimiento microscópico de las partículas del fluido.

En primer lugar, debemos determinar la forma del cuadritensor impulso-energía, T_{ik} para un fluido en movimiento.† El flujo del impulso a través de un elemento **df** de la superficie de un cuerpo coincide con la fuerza ejercida sobre dicho elemento. De aquí que $T_{\alpha\beta}\,df^{\beta}$ sea el componente α de la fuerza sobre un elemento de superficie.‡ Consideremos un elemento de volumen en el fluido y utilicemos un sistema de referencia en el que este elemento esté en reposo (el sistema «propio»). En dicho sistema es válido el principio de Pascal: la presión ejercida por una porción determinada del fluido es la misma en todas las direcciones, siendo perpendicular al área sobre la que actúa. Por tanto, podemos escribir $T_{\alpha\beta}\,df^{\beta} = p\,df_{\alpha}$, y de aquí†† $T_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta}$.

Los componentes $T_{0\alpha}$ que dan la densidad de impulso son nulos para un elemento de volumen determinado en su sistema propio. El componente T_{00}

† La notación de este capítulo corresponde a la utilizada en los capítulos 10 y 11 de *Teoría clásica de campos*, Ed. Reverté, Barcelona. Los sufijos latinos *i, k, l,* ..., toman los valores 0, 1, 2, 3, siendo $x^0 = ct$ la coordenada de tiempo real. Los sufijos griegos α, β, γ, ..., toman los valores 1, 2, 3. El tensor métrico viene dado por la expresión $-ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ correspondiente al intervalo, siendo los valores galileanos de g_{ik} los siguientes: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{00} = -1$.

‡ Podemos recordar que, en coordenadas galileanas, $T_{00} = T^{00} = -T_0{}^0$ es la densidad de energía, y $T_{\alpha}{}^0/c = -T_{0\alpha}/c = T^{0\alpha}/c$ es la densidad de componentes del impulso; las magnitudes $T_{\alpha\beta} = T\alpha\beta = T_{\alpha}\beta$ forman el tensor densidad de flujo del impulso.

†† Escribiremos todas las expresiones en forma covariante, puesto que las utilizaremos cuando esté presente un campo gravitatorio, es decir, en la teoría general de la relatividad.

es la densidad de energía propia del fluido, que designaremos por e en este capítulo.

Así pues, el tensor impulso-energía para una porción determinada de fluido es, en el sistema propio,

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}. \tag{125.1}$$

Ahora resulta ya fácil hallar la expresión correspondiente al tensor impulso-energía en cualquier sistema. Para ello, introduzcamos la cuadrivelocidad del fluido u^i. En el sistema propio del elemento de que se trata, los componentes de la cuadrivelocidad son $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$. La expresión en que se transforma (125.1) para dar T_{ik} en correspondencia con estos valores de u^i es

$$T_{ik} = wu_iu_k + pg_{ik}, \tag{125.2}$$

en donde $w = e + p$ es la entalpía por unidad de volumen.† Esta expresión es la requerida para el tensor impulso-energía.

Los componentes T_{ik} en forma tridimensional son

$$T_{\alpha\beta} = \frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2(1-v^2/c^2)} + p\delta_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha 0} = -\frac{wv_\alpha}{c(1-v^2/c^2)}, \qquad T_{00} = \frac{w}{1-v^2/c^2} - p = \frac{e+pv^2/c^2}{1-v^2/c^2}. \tag{125.3}$$

El caso no relativista corresponde a velocidades pequeñas ($v \ll c$) y un movimiento de las partículas del fluido interno (microscópico) también con velocidades pequeñas. Al pasar al límite debe recordarse que la energía interna relativista e incluye la energía en reposo nmc^2 de las partículas del fluido (siendo m la masa en reposo de una partícula). También debe recordarse que la densidad n de partículas se refiere a un volumen unidad propio; sin embargo, en las expresiones no relativistas la densidad de energía se refiere al volumen unidad en el sistema de referencia del laboratorio, en

† En todas las fórmulas de este capítulo se toman las magnitudes termodinámicas, de modo que tengan sus valores en el sistema propio del elemento de fluido de que se trate. Magnitudes como la energía interna, la entalpía y la entropía se refieren a la unidad de volumen propio y se designan, respectivamente, por e, w y σ.

el que está en movimiento el elemento de fluido de que se trate. Por tanto, en el límite debemos poner, $nm \to \rho\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \approx \rho - \rho v^2/2c^2$, siendo ρ la densidad de masa ordinaria no relativista. Tanto la densidad de energía no relativista $\rho\epsilon$ como la presión son pequeñas en comparación con ρc^2.

Así se halla que el valor límite de T_{00} es $\rho c^2 + \rho\epsilon + \rho v^2/2$, es decir, es ρc^2 junto con la densidad de energía no relativista. La forma límite correspondiente del tensor $T_{\alpha\beta}$ es $\rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta}$, es decir, coincide, como debería ocurrir, con la expresión normal para la densidad de flujo del impulso, que designamos en § 7 mediante $\Pi_{\alpha\beta}$.

La densidad de impulso relativista $-T_{\alpha 0}/c$ es, al mismo tiempo, la densidad del flujo de energía (dividida por c^2). Sin embargo, esta sencilla relación deja de ser válida en el límite no relativista, debido a que la energía no relativista no incluye la energía en reposo. Tenemos $-T_{\alpha 0}/c \cong \rho v_\alpha + (v_\alpha/c^2)(\rho\epsilon + p + \rho v^2/2)$. De aquí vemos que el valor límite de la densidad del impulso es precisamente ρv_α, como debe ser; en el caso de la densidad del flujo de energía $-cT_{\alpha 0}$ tenemos, omitiendo el término $\rho c^2 v_\alpha$, la expresión $(\rho\epsilon + p + \rho v^2/2)v_\alpha$, de acuerdo con el resultado obtenido en § 6.

§ 126. Ecuaciones de la dinámica relativista de fluidos

Las ecuaciones del movimiento están contenidas en:

$$\partial T_i{}^k/\partial x^k = 0, \tag{126.1}$$

que expresa las leyes de conservación de la energía e impulso para el sistema físico al que pertenece el tensor T_{ik}. Utilizando la expresión (125.2) para T_{ik}, obtenemos las ecuaciones del movimiento del fluido; sin embargo, es necesario utilizar también el principio de conservación del número de partículas, que no está contenida en (126.1).

Deduzcamos la ecuación de continuidad, que expresa el hecho de que se conserva el número de partículas del fluido. Para ello utilicemos el cuadrivector de flujo de partículas n^i. Su componente temporal es la densidad numérica de partículas, y las tres componentes espaciales forman el vector de flujo de partículas tridimensional. Es evidente que el vector n^i debe ser proporcional a la cuadrivelocidad u^i, de modo que

$$n^i = nu^i, \tag{126.2}$$

siendo n un escalar; a partir de la definición de n resulta evidente que este escalar coincide con la densidad numérica de partículas en el sistema en el

que está en reposo† el elemento de volumen de fluido que nos interesa. Se obtiene la ecuación de continuidad igualando simplemente a cero la cuadridivergencia del vector flujo:‡

$$\partial(nu^i)/\partial x^i = 0. \tag{126.3}$$

Volvamos a la ecuación (126.1). Derivando la expresión (125.2) correspondiente al tensor impulso-energía, se obtiene

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \tag{126.4}$$

Multipliquemos esta expresión por u^i, es decir, proyectémosla en la dirección del cuadrivector velocidad. Como $u_i u^i = -1$, $u_i \partial u^i/\partial x^k = 0$, se tiene

$$-\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

Podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n} nu^k\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k} nu^k = 0$$

y, en virtud de la ecuación de continuidad (126.3), se obtiene

$$nu^k\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k}\right] = 0.$$

Pero $1/n$ es precisamente el volumen molecular de la sustancia, y w/n es su entalpía por partícula. Por la identidad termodinámica $\mathrm{d}(w/n) - \mathrm{d}p/n = T\mathrm{d}(\sigma n)$ (siendo T la temperatura y σ la entropía por unidad de volumen propio) tendremos $nTu^k\partial(\sigma/n)/\partial x^k = 0$, o sea,

$$\mathrm{d}(\sigma/n)/\mathrm{d}s = 0, \tag{126.5}$$

en donde la derivada se toma a lo largo de la línea del universo del elemento de fluido de que se trata.

Utilizando la ecuación de continuidad (126.3), puede también escribirse (126.5) como la anulación de la cuadridivergencia del flujo de entropía σu^i:

$$\partial(\sigma u^i)/\partial x^i = 0. \tag{126.6}$$

† A temperaturas muy elevadas, pueden formarse en la sustancia nuevas partículas (por ejemplo, pares de electrones), de modo que se altera el número total de partículas de todas las clases. En estos casos n debe considerarse (por ejemplo) como el número de electrones que permanecerían si se aniquilasen todos los pares.

‡ Comparar con la ecuación de continuidad en electrodinámica (*Teoría clásica de campos*, § 4-4).

Ambas ecuaciones muestran que el flujo es adiabático; el tensor impulso-energía (125.2) no tiene en cuenta los procesos de rozamiento interno y conducción térmica, es decir, consideramos un fluido ideal

Proyectamos ahora la ecuación (126.1) sobre una dirección perpendicular a u^i. Dicha proyección del vector $\partial T_i^k/\partial x^k$ es evidentemente $\partial T_i^k/\partial x^k + u_i u^k \partial T_k^l/\partial x^l$; su multiplicación escalar por u^i da cero. Un sencillo cálculo conduce a la ecuación:

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \tag{126.7}$$

Las tres componentes espaciales de esta ecuación son la generalización relativista de la ecuación de Euler (la componente temporal es una consecuencia de las otras tres).

Como aplicación interesante, consideremos la propagación del sonido en una sustancia que tiene una ecuación de estado relativista (es decir, una sustancia cuya presión es comparable con la densidad de energía interna, incluyendo la energía en reposo). Las ecuaciones de la dinámica de fluidos para las ondas sonoras pueden linealizarse; es conveniente partir de las ecuaciones del movimiento en la forma original (126.1) y no la forma equivalente (126.6), (126.7). Sustituyendo las expresiones (125.3) correspondientes a las componentes del tensor impulso-energía y conservando sólo las magnitudes del mismo orden que la amplitud de la onda, obtenemos las ecuaciones

$$\partial e'/\partial t = -w \operatorname{div}\mathbf{v}, \qquad (w/c^2)\,\partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{grad}\, p', \tag{126.8}$$

en donde las primas designan las partes variables de las magnitudes. Eliminando $\mathbf{v}$, se tiene $\partial^2 e'/\partial t^2 = c^2 \Delta p'$. Finalmente, sustituyendo $e' = (\partial e/\partial p)_{ad} p'$, obtenemos la ecuación de onda para p', con la velocidad del sonido

$$u = c\sqrt{(\partial p/\partial e)_{ad}}; \tag{126.9}$$

el sufijo ad significa que las derivadas se toman para un proceso adiabático, es decir, para σ/n constante. Esta fórmula difiere de la expresión correspondiente no relativista en que la densidad másica se sustituye por e/c^2.

En el caso ultrarrelativista, la ecuación de estado para cualquier sustancia es $p = e/3$. La velocidad del sonido es entonces $u = c/\sqrt{3}$, que es menor que la velocidad de la luz en un factor $\sqrt{3}$.

Finalmente, analicemos brevemente las ecuaciones de la dinámica de fluidos en presencia de campos gravitatorios. Se obtienen a partir de las ecuaciones (126.6) y (126.7), sustituyendo simplemente las derivadas ordinarias por las covariantes:

$$wu^k u_{i;k} = -\partial p/\partial x^i - u_i u^k \partial p/\partial x^k, \qquad (\sigma u^i)_{;i} = 0. \tag{126.10}$$

A partir de estas ecuaciones podemos deducir la condición del equilibrio mecánico en un campo gravitatorio. En el equilibrio el campo es estático; se puede tomar un sistema de referencia en el que esté en reposo el cuerpo en cuestión ($u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/\sqrt{-g_{00}}$), todas las magnitudes sean independientes del tiempo y los componentes mixtos del tensor métrico sean nulos ($g_{0\alpha} = 0$). Los componentes espaciales de la ecuación (126.10) dan entonces

$$-w\Gamma_{\alpha 0}{}^0 u^0 u_0 = \tfrac{1}{2}(w/g_{00})\,\partial g_{00}/\partial x^\alpha = -\partial p/\partial x^\alpha,$$

o sea

$$\frac{1}{w}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\log\sqrt{(-g_{00})}. \tag{126.11}$$

Esta es la ecuación de equilibrio buscada. En el límite no relativista $w \cong \rho c^2$, $-g_{00} = 1 + 2\phi/c^2$ (siendo ϕ el potencial gravitatorio newtoniano), y la ecuación (126.11) se convierte en **grad** $p = -\rho$ **grad** ϕ, es decir, la ecuación ordinaria de la hidrostática.

PROBLEMAS

Problema 1. Hallar la solución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos relativista que describe una onda monodimensional simple no estacionaria.

Solución. En una onda simple, todas las magnitudes pueden expresarse en función de una cualquiera de ellas (ver § 94). Escribiendo las ecuaciones del movimiento en la forma

$$\frac{\partial T_{00}}{c\,\partial t} + \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T_{01}}{c\,\partial t} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

y suponiendo que T_{00}, T_{01}, T_{11} son funciones unos de otros, obtenemos $\mathrm{d}T_{00}\mathrm{d}T_{11} = (\mathrm{d}T_{01})^2$. Aquí debemos sustituir $T_{00} = eu_0^2 + pu_1^2$, $T_{01} = wu_0u_1$, $T_{11} = eu_1^2 + pu_0^2$, utilizando el hecho de que $u_1^2 - u_0^2 = -1$; es conveniente introducir un parámetro η tal que $u_0 = \cosh\eta$, $u_1 = \operatorname{senh}\eta$. El resultado es

$$\operatorname{arctgh}(v/c) = \pm(1/c)\int (u/w)\,\mathrm{d}e, \tag{2}$$

siendo u la velocidad del sonido. A continuación, a partir de (1) tenemos que $\partial x/\partial t = c\mathrm{d}T_{01}/\mathrm{d}T_{00}$, y al calcular las derivadas se tiene

$$x = \frac{t(v \pm u)}{1 \pm uv/c^2} + f(v). \tag{3}$$

Las fórmulas (2) y (3) dan la solución requerida.

Problema 2. Hallar la generalización relativista de la ecuación de Bernoulli.

Solución. En el flujo estacionario, todas las magnitudes son independientes del tiempo. La componente espacial de la ecuación (126.7) da

$$\frac{w}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = -c^2\,\mathbf{grad}\,p - \frac{\mathbf{v}}{1-v^2/c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p.$$

Multiplicando escalarmente estas ecuaciones por $\mathbf{v}/n$ y haciendo uso del hecho de que, en el caso de una entropía constante σ/n, tenemos $\mathrm{d}(e/n) = -p\mathrm{d}(1/n)$, obtenemos, finalmente,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\frac{w/n}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = 0,$$

de aquí se deduce que la magnitud

$$\frac{w/n}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$$

es constante a lo largo de una línea de corriente cualquiera. Para $v \ll c$ ésta se transforma en la ecuación de Bernoulli usual $p/\rho + v^2/2 =$ constante.

Problema 3. Hallar la generalización relativista del flujo potencial (I. M. KHALATNIKOV, 1954).

Solución. Cuando el flujo es isoentrópico tenemos $\sigma/n =$ constante, y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\sigma}{n}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

La ecuación del movimiento (126.7) se transforma entonces en

$$\frac{w}{n}u^k\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + u_i u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right)$$
$$\equiv u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}\right)$$

o sea, $u^k\omega_{ik} = 0$, en donde

$$\omega_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}u_k\right).$$

Las soluciones de esta ecuación que corresponden al flujo potencial son aquéllas para las que $\omega_{ik} = 0$, es decir,

$$\frac{w}{n}u_i = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}. \qquad (1)$$

En el límite no relativista esta expresión es la condición normal $v_i = \partial\phi/\partial x^i$.

Cuando el flujo es estacionario, se obtiene a partir de (1) la ecuación de Bernouilli: wu_0/n es constante en todo punto del fluido.

Problema 4. Obtener la ecuación del choque adiabático y las fórmulas para las velocidades del gas en una onda de choque en la dinámica de fluidos relativista (A. M. TAUB, 1948).

Solución. Consideremos la discontinuidad en un sistema en el que está en reposo y supongamos que el eje x^1 (eje x) es perpendicular a su plano, es decir, tiene la dirección de la velocidad del gas. Las condiciones de continuidad para las densidades de los flujos de energía e impulso son

$$-[cT_{0x}] = -c[wu_0u_x] = [wv/(1-v^2/c^2)] = 0, \tag{1}$$

$$[T_{xx}] = [wu_x^2+p] = [wv^2/(c^2-v^2)+p] = 0. \tag{2}$$

A partir de ellas se obtienen fácilmente (poniendo $v/c = \operatorname{tgh}\phi$, $u_x = \operatorname{senh}\phi$, $u_0 = -\cosh\phi$) las expresiones siguientes para las velocidades del gas en ambos lados de la onda de choque:

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{(p_2-p_1)(e_2+p_1)}{(e_2-e_1)(e_1+p_2)}}, \qquad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{(p_2-p_1)(e_1+p_2)}{(e_2-e_1)(e_2+p_1)}} \tag{3}$$

designando los subíndices 1 y 2 las magnitudes que pertenecen a los dos lados de la discontinuidad. La velocidad relativa del gas a ambos lados viene dada por la ley relativista de adición de velocidades:

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1-v_1v_2/c^2} = c\sqrt{\frac{(p_2-p_1)(e_2-e_1)}{(e_1+p_2)(e_2+p_1)}}. \tag{4}$$

En el límite relativista hacemos $e \cong mc^2n = c^2/V$ (siendo V el volumen específico y despreciamos p en comparación con e. Las fórmulas (3) y (4) se transforman entonces en (82.6) y (82.7). En el caso ultrarrelativista, $p = e/3$, y tenemos según (3)

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{\frac{3e_2+e_1}{3(3e_1+e_2)}}, \qquad \frac{v_2}{c} = \sqrt{\frac{3e_1+e_2}{3(3e_2+e_1)}}.$$

Cuando aumenta la intensidad de la onda de choque ($e_2 \to \infty$), v_1 tiende a la velocidad de la luz c y v_2 hacia $c/\sqrt{3}$.

Para obtener la ecuación del choque adiabático, (1) y (2) deben suplementarse con la condición de continuidad de la densidad del flujo de partículas:

$$[nu_x] = \left[\frac{nv}{c\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\right] = 0. \tag{5}$$

Eliminando las velocidades entre (1), (2) y (5), se obtiene la ecuación buscada:

$$\frac{w_1^2}{n_1^2} - \frac{w_2^2}{n_2^2} + (p_2-p_1)\left(\frac{w_1}{n_1^2} + \frac{w_2}{n_2^2}\right) = 0. \tag{6}$$

En el límite no relativista, esta fórmula se reduce a (82.9).

§ 127. Ecuaciones relativistas en el caso de procesos disipativos

Hallar las ecuaciones relativistas de la dinámica de fluidos en presencia de procesos disipativos (viscosidad y conducción térmica) exige determinar la forma de los términos adicionales en el tensor impulso-energía y en el vector de densidad de flujo de partículas. Designando estos términos por τ_{ik} y ν_i, respectivamente, escribiremos

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_iu_k + \tau_{ik}, \tag{127.1}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i. \tag{127.2}$$

Las ecuaciones de movimiento están contenidas de nuevo en $\partial T_i^k/\partial x^k = 0$, $\partial n^i/\partial x^i = 0$.

En primer lugar, sin embargo, debemos estudiar más a fondo el propio concepto de velocidad u^i. En mecánica relativista, un flujo de energía necesariamente comprende un flujo de masa. De aquí que, cuando existe, por ejemplo, un flujo térmico, la definición de la velocidad en función de la densidad del flujo de masa (como en la dinámica no relativista) no tiene significado directo. Definiremos ahora la velocidad por la condición de que, en el sistema propio de un elemento fluido cualquiera determinado, el impulso del elemento es cero y su energía es expresable en función de las demás magnitudes termodinámicas mediante las mismas fórmulas que cuando estaban ausentes los procesos disipativos. Esto significa que en el sistema propio los componentes τ_{00} y $\tau_{0\alpha}$ del tensor τ_{ik} son nulos; puesto que en este sistema también $u^\alpha = 0$, tenemos (en un sistema cualquiera) la ecuación tensorial

$$\tau_{ik}u^k = 0. \tag{127.3}$$

En el caso del vector ν_i debe ser válida una relación análoga

$$\nu_i u^i = 0, \tag{127.4}$$

puesto que el componente n^0 del cuadrivector n_i del flujo de partículas en el sistema propio debe ser, por definición, igual a la densidad numérica de partículas n.

Puede establecerse la forma solicitada del tensor τ_{ik} y del vector ν_i a partir de los requisitos del principio de incremento de entropía. Este principio debe estar contenido en las ecuaciones del movimiento (del mismo modo que se obtuvo en 2 la condición de entropía constante para un fluido ideal a partir de las mismas). Mediante sencillas transformaciones y utilizando la ecua-

ción de continuidad se obtiene fácilmente la ecuación

$$u^i\frac{\partial T_i{}^k}{\partial x^k} = -T\frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma u^i)+\mu\frac{\partial \nu^i}{\partial x^i}+u^i\frac{\partial \tau_i{}^k}{\partial x^k},$$

en donde $\mu = (w - T\sigma)/n$ es el potencial químico relativista. Finalmente, utilizando la relación (127.3) podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right) - \frac{\tau_i{}^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \tag{127.5}$$

La expresión del primer miembro debe ser la cuadrivergencia del flujo de entropía debido a los procesos disipativos. Así pues, el cuadrivector de densidad de flujo de entropía es

$$\sigma^i = \sigma u^i - (\mu/T)\nu^i, \tag{127.6}$$

y τ_{ik} y ν^i deben ser funciones lineales de los gradientes de velocidad y de las magnitudes termodinámicas, de modo que el segundo miembro de la ecuación (127.5) se haga necesariamente positivo. Esta condición, junto con (127.3) y (127.4) determina únicamente la forma del cuadrivector τ_{ik} y del cuadrivector ν_i:

$$\tau_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^i}+u_k u^l\frac{\partial u_i}{\partial x^l}+u_i u^l\frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right)-(\zeta-\tfrac{2}{3}\eta)\frac{\partial u_l}{\partial x}(g_{ik}+u_i u_k), \tag{127.7}$$

$$\nu_i = -\frac{\kappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right)+u_i u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{127.8}$$

En estas fórmulas η y ζ son los dos coeficientes de viscosidad y κ la conductividad térmica, considerados de acuerdo con sus definiciones no relativistas.

En particular, la conducción térmica pura corresponde a un flujo de energía sin flujo de partículas. La condición de flujo nulo de partículas es $nu^\alpha + \nu^\alpha = 0$; la densidad de flujo de energía es, entonces, hasta los términos de primer orden en los gradientes,

$$cT_\alpha{}^0 = cwu^0u_\alpha = -\frac{cw}{n}\nu_\alpha = \frac{\kappa nT^2}{w}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right).$$

Utilizando la identidad termodinámica

$$\mathrm{d}(\mu/T) = -(w/nT^2)\mathrm{d}T + \mathrm{d}p/nT,$$

obtenemos el flujo de energía $-\kappa[\mathbf{grad}\, T - (T/w)\mathbf{grad}\, p]$. Vemos que, en el caso relativista de la conducción térmica, el flujo térmico es proporcional a cierta combinación de los gradientes de temperatura y presión y no simplemente al gradiente de presión.

CAPÍTULO XVI

DINAMICA DE SUPERFLUIDOS

§ 128. Propiedades principales de los superfluidos

A temperaturas próximas al cero absoluto, los efectos cuánticos empiezan a tener importancia sobre las propiedades de los fluidos. En la naturaleza sólo existe una sustancia que permanece fluida en el cero absoluto, que es el helio; todos los demás elementos solidifican antes que los efectos cuánticos empiezan a ser observables. A una temperatura de 2,19 K el helio líquido presenta un *punto* λ (transición de fase de segundo orden); a temperaturas por debajo de este punto el helio líquido (helio II) tiene un cierto número de notables propiedades, la más importante de las cuales es la *superfluidez* descubierta por P. L. KAPITZA en 1938. Esta propiedad consiste en poder fluir sin viscosidad a través de pequeños orificios o capilares.†

La teoría de los superfluidos fue desarrollada por L. LANDAU (1942). Estudiaremos ahora sólo aquella parte de la teoría que da una descripción macroscópica de las propiedades dinámicas de los superfluidos.

La base de la dinámica del helio II es el siguiente resultado fundamental de la teoría macroscópica.‡ A cualquier temperatura distinta de cero el helio II se comporta como si fuese una mezcla de dos líquidos diferentes. Uno de ellos es un superfluido y se mueve con viscosidad nula a lo largo de una superficie sólida. El otro es un fluido normal viscoso. Tiene gran importancia el que no exista fricción entre ambas partes del líquido en su movimiento relativo, es decir, no se transfiere ningún impulso del uno al otro.

Sin embargo, debe resaltarse adecuadamente el hecho de que considerar el líquido como una mezcla de partes normal y superfluida no es más que una descripción conveniente de los fenómenos que aparecen en un fluido cuando adquieren importancia los fenómenos cuánticos. Como cualquier otra descripción de los fenómenos cuánticos en términos clásicos, no es suficientemente adecuada. En realidad, deberíamos decir que un fluido cuántico, como el helio II, puede realizar simultáneamente dos movimientos, en cada uno de los cuales interviene su propia «masa efectiva» (siendo la suma de las

† Sólo es superfluido uno de los isótopos del helio, He^4. El isótopo He^3 líquido no resulta superfluido.
‡ Ver *Física Estadística*, §§ 66, 67, Ed. Reverté.

dos masas efectivas igual a la masa total del fluido). Uno de estos movimientos es normal, es decir, tiene las mismas propiedades que el movimiento de un fluido viscoso ordinario, pero el otro es el movimiento de un superfluido. Los dos movimientos se producen sin ninguna transferencia de impulso del uno al otro. En cierto sentido podemos hablar de las partes superfluida y normal del fluido, pero esto no significa que el fluido pueda realmente separarse en estas dos partes.

Después de haber precisado todas las reservas relativas a la verdadera naturaleza de los fenómenos en el helio II, podemos utilizar los términos *parte superfluida* y *parte normal* del fluido para dar una descripción concisa y conveniente de estos problemas. Sin embargo, preferiremos utilizar los términos más exactos *flujo superfluido* y *flujo normal*, sin asociarlos con las componentes de «una mezcla de dos partes» de fluido.

El concepto de dos clases de flujo nos permite dar una explicación simple de las principales propiedades dinámicas observadas del helio II. La ausencia de viscosidad cuando el helio II fluye por un conducto estrecho es el resultado del flujo superfluido en dicho conducto; podemos decir que la parte normal permanece en el recipiente, fluyendo con mucha más lentitud a través del conducto, con una velocidad de acuerdo con su viscosidad y con la anchura del conducto. La medida de la viscosidad del helio II mediante el amortiguamiento de las oscilaciones de torsión de un disco sumergido en él, por otra parte, da un valor no nulo; la rotación del disco produce un flujo normal cerca del mismo que lleva el disco al reposo en virtud de la viscosidad que pertenece a dicho flujo. Así pues, en experimentos de flujo a través de un capilar se observa el flujo superfluido, mientras que en experimentos realizados con la rotación de un disco en helio II se observa el flujo normal. Se ve de modo especialmente claro la existencia de estos dos flujos cuando se hace girar alrededor de un eje un recipiente cilíndrico lleno de helio II. Las paredes del cilindro en rotación producen un flujo normal y arrastran con ellas sólo parte del fluido, quedando en reposo la parte superfluida. En consecuencia, el momento de inercia total I del recipiente en rotación es menor que el momento de inercia I_0 calculado con la hipótesis de que la totalidad del fluido rota con el recipiente y así una medida del cociente I/I_0 nos permite hallar de una vez qué partes del fluido son normal y superfluida.

Además de la ausencia de viscosidad, el flujo superfluido tiene otras dos propiedades importantes: en él no existe transferencia térmica y es siempre un flujo potencial. Ambas propiedades se deducen también de la teoría microscópica, de acuerdo con la cual el flujo normal es realmente el flujo de un «gas de excitaciones» (podemos recordar que el movimiento térmico colectivo de los átomos de un fluido cuántico puede considerarse como un sistema de excitaciones, que se comportan como cuasi-partículas moviéndose

en el volumen ocupado por el fluido y con impulsos y energías definidos).

La entropía del helio II está determinada por la distribución estadística de las excitaciones elementales. Por tanto, en un flujo cualquiera en el que el gas de excitaciones esté en reposo, no existe ninguna transferencia macroscópica de entropía. Esto significa que en el flujo superfluido no interviene ninguna transferencia de energía. De aquí se deduce que el flujo superfluido del helio II es termodinámicamente reversible, resultado que está de acuerdo con lo observado.

En el helio II el único mecanismo de transferencia de calor se realiza mediante el flujo normal. Por consiguiente, participa de la naturaleza de la convección y es fundamentalmente diferente de la conducción térmica ordinaria. Cualquier diferencia de temperatura en el helio II produce un flujo interno, tanto normal como superfluido; los dos flujos pueden compensarse mutuamente mediante una transferencia de masa, de modo que no aparezca en el fluido ninguna transferencia de masa macroscópica.

En lo que sigue designaremos mediante $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_n$ las velocidades del flujo superfluido y normal, respectivamente. El mecanismo de transferencia térmica descrito anteriormente significa que la densidad de flujo de la entropía es el producto $\mathbf{v}_n \rho s$ de la velocidad $\mathbf{v}_n$ por la entropía de la unidad de volumen (siendo s la entropía por unidad de masa). Se obtiene la densidad de flujo térmico multiplicando la densidad de flujo de entropía por T, es decir,

$$\mathbf{q} = \rho T s \mathbf{v}_n. \tag{128.1}$$

El flujo potencial de la parte superfluida corresponde a la ecuación

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{v}_s = 0, \tag{128.2}$$

que debe ser válida en un instante cualquiera en todo el volumen del fluido. Esta propiedad es la expresión macroscópica de una propiedad del espectro de energía del helio II que es la base de la teoría microscópica de la superfluidez: las excitaciones elementales que tienen longitudes de onda larga (es decir, impulsos y energías pequeños) son cuantos de sonido o *fonones*. De aquí que la dinámica macroscópica de los superfluidos no debe admitir más que vibraciones sonoras, resultado que se deduce de la condición (128.2).

Puesto que el flujo es potencial, un flujo de superfluido estacionario no ejerce ninguna fuerza sobre un cuerpo sólido (paradoja de d'Alembert; ver § 11). Por otra parte, el flujo normal ejerce una fuerza de arrastre. Si el flujo tiene tales condiciones que las transferencias de masa del fluido normal y del superfluido se equilibran, tenemos entonces un flujo poco normal: un cuerpo sumergido en helio II se ve sometido a la acción de una fuerza, pero no existe transferencia neta de masa.

§ 129. Efecto termomecánico

El *efecto termomecánico* en el helio II es de la forma siguiente: cuando el helio sale de un recipiente a través de un capilar estrecho, se produce en el recipiente una elevación de temperatura, mientras que se origina un enfriamiento cuando el helio pasa del capilar a otro recipiente.† Esto fenómeno tiene la explicación natural de que el flujo en el interior de un capilar es preferentemente superfluido y, por tanto, no transfiere calor, de modo que el calor que permanece en el recipiente se distribuye en una cantidad menor del helio II. En el flujo a través de un capilar hacia un recipiente se observa el efecto opuesto.

Es fácil hallar la cantidad de calor Q absorbida cuando entra la unidad de masa del helio en un recipiente a través de un capilar. El fluido que entra no transfiere ninguna entropía. Si el helio en el interior del recipiente hubiese de permanecer a su temperatura inicial T, se necesitaría una cantidad de calor Ts para compensar la disminución de entropía por unidad de masa debida a la adición de la unidad de masa de helio de entropía nula. Esto significa que se absorbe una cantidad de calor

$$Q = Ts \tag{129.1}$$

cuando la unidad de masa del helio entra en un recipiente conteniendo helio a temperatura T. Inversamente, cuando la unidad de masa de helio sale de un recipiente que contiene helio a la temperatura T, entonces se desprende una cantidad de calor Ts.

Consideremos a continuación dos recipientes que contienen helio II a temperaturas T_1 y T_2, unidos por un capilar estrecho. Como el superfluido puede circular libremente a lo largo del capilar, rápidamente se establece el equilibrio mecánico. Sin embargo, el superfluido no transfiere calor y por ello el equilibrio térmico (en el que es igual la temperatura del helio en ambos recipientes) se establece con mucha mayor lentitud.

Se escribe fácilmente la condición del equilibrio mecánico utilizando el hecho de que se establece este equilibrio para valores constantes de la entropía s_1, s_2 del helio en los dos recipientes. Si ϵ_1, ϵ_2 son las energías internas por unidad de masa del helio a temperaturas T_1, T_2, la condición de equilibrio mecánico (energía mínima) conseguida por el flujo superfluido es $(\partial\epsilon_1/\partial N)_{s1} = (\partial\epsilon_2/\partial N)_{s2}$, siendo N el número de átomos que hay en la unidad

† Estrictamente hablando se produce un efecto termomecánico muy ligero en cualquier fluido; la anomalía del helio II es el gran valor del efecto. En el caso de fluidos ordinarios, este efecto es un fenómeno irreversible semejante al efecto termoeléctrico Peltier (y se observa realmente en gases rarificados). Dicho efecto se produce también en el helio II, pero está enmascarado por otro efecto considerablemente mayor que se describirá más adelante, el cual sólo se presenta en el helio II y no es un fenómeno irreversible como el efecto Peltier.

de masa del helio. La derivada $(\partial\epsilon/\partial N)_s$ es el potencial químico μ. Por tanto, se obtiene la condición de equilibrio

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2), \tag{129.2}$$

en donde p_1 y p_2 son las presiones en los dos recipientes.

En lo que sigue entenderemos por potencial químico μ no el potencial termodinámico usual por partícula (átomo), sino el potencial termodinámico por unidad de masa del helio. Ambos difieren sólo en un factor constante, la masa del átomo del helio.

Si las presiones p_1, p_2 son pequeñas, entonces, desarrollando en potencias de las presiones y recordando que $(\partial\mu/\partial p)_T$ es el volumen específico (que depende sólo ligeramente de la temperatura), obtenemos

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int_{T_2}^{T_1} s\,\mathrm{d}T,$$

en donde $\Delta p = p_2 - p_1$. Si también la diferencia de temperaturas $\Delta T = T_2 - T_1$ es pequeña, entonces, desarrollando en potencias de ΔT y recordando que $(\partial\mu/\partial T)_p = -s$, se obtiene

$$\Delta p/\Delta T = \rho s. \tag{129.3}$$

Como $s > 0$, $\Delta p/\Delta T > 0$. La relación (129.3) fue obtenida, en primer lugar, por H. London (1939).

§ 130. Ecuaciones de la dinámica de superfluidos

Deduciremos a continuación un sistema completo de ecuaciones que describen macroscópicamente (fenomenológicamente) el flujo del helio II. Según hemos visto en el estudio anterior, nos hemos de ocupar de ecuaciones del movimiento en la que en todos los puntos intervienen dos velocidades $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_n$, y no una sola como sucede en la dinámica de fluidos ordinaria. Resulta entonces que el sistema buscado de ecuaciones puede determinarse únicamente a partir de los simples requisitos impuestos por el principio de relatividad de Galileo y por las leyes de conservación necesarias [utilizando también las propiedades del movimiento expresadas por las ecuaciones (128.1) y (128.2)].

Debe recordarse que el helio II realmente cesa de ser superfluido a velocidades elevadas. No estudiaremos este fenómeno de las *velocidades críticas*, si no que señalaremos meramente que su existencia significa que las ecuaciones de la dinámica de superfluidos para el helio II son físicamente importantes sólo cuando no son demasiado grandes las velocidades v_s y v_n. Sin

embargo, deduciremos primeramente estas ecuaciones sin hacer ninguna hipótesis que se refiera a las velocidades $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_n$, puesto que, si se desprecian las potencias más elevadas de las velocidades, las ecuaciones no podrían deducirse de modo consistente a partir de las leyes de conservación. La transición al caso físicamente significativo de velocidades pequeñas se hace en las ecuaciones finales.

Designemos por $\mathbf{j}$ la densidad del flujo de masa; esta magnitud es también el impulso del volumen unidad (ver nota a pie de página en § 49). Escribamos

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \tag{130.1}$$

como una suma de los flujos que pertenecen a la parte superfluida y normal. Los coeficientes ρ_s y ρ_n pueden denominarse densidades superfluida y normal. Su suma es la densidad real ρ del helio II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \tag{130.2}$$

Como es natural, ρ_s y ρ_n son funciones de la temperatura; ρ_n se anula en el caso absoluto, en donde el helio II se hace totalmente superfluido,† mientras que ρ_s se anula en el punto λ, en donde el líquido se hace completamente normal. También debe señalarse que, en general, ρ_n y ρ_s dependen de las propias velocidades;‡ únicamente a velocidades pequeñas puede despreciarse esta dependencia, y ρ_n, ρ_s pueden considerarse únicamente como funciones de la temperatura (y presión).

La densidad ρ y el flujo $\mathbf{j}$ deben satisfacer la ecuación de continuidad

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{130.3}$$

que expresa la ley de conservación de la masa. La ley de conservación del impulso da una ecuación

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{130.4}$$

siendo Π_{ik} el tensor de densidad del flujo del impulso.

En este momento no consideraremos procesos disipativos. Entonces el flujo es reversible y también se conserva la entropía del fluido. Como el flujo de entropía es $\rho s \mathbf{v}_n$, podemos escribir la ley de conservación de la en-

† Si el helio II contiene una mezcla (del isótopo He^3), entonces ρ_n es no nula, incluso a 0 K.

‡ Con más precisión, de la diferencia de velocidades $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, puesto que el movimiento del fluido como un todo con velocidad $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$ no puede, lógicamente, afectar a sus propiedades termodinámicas.

tropía como

$$\partial(\rho s)/\partial t + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_n) = 0. \tag{130.5}$$

Las ecuaciones (130.3)-(130.5) deben completarse con una ecuación que dé la derivada temporal de la velocidad $\mathbf{v}_s$. Esta ecuación debe ser tal que tengamos flujo potencial en todo instante; esto significa que la derivada de $\mathbf{v}_s$ debe ser el gradiente de un escalar. Podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{grad}(\tfrac{1}{2}v_s^2 + \mu) = 0, \tag{130.6}$$

Naturalmente, las ecuaciones (130.4) y (130.6) tienen significado sólo cuando obtenemos valores para las magnitudes Π_{ik} y μ todavía indefinidas. Para ello debemos utilizar la ley de conservación de la energía y razonamientos basados en el principio de relatividad de Galileo. Las ecuaciones (130.3)-(130.6) deben implicar el principio de conservación de la energía, que se expresa mediante una ecuación de la forma

$$\partial E/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \tag{130.7}$$

en donde E es la energía de la unidad de volumen del fluido y $\mathbf{Q}$ la densidad del flujo de energía. El principio de relatividad de Galileo no permite determinar todas las magnitudes como funciones de una velocidad ($\mathbf{v}_s$) y la velocidad relativa dada $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ de los dos movimientos simultáneos.

Utilicemos, por tanto, el sistema original de coordenadas K y un sistema K_0 en el que es nula la velocidad del flujo superfluido de un elemento de fluido determinado. El sistema K_0 se mueve respecto al sistema K con una velocidad igual a la velocidad del superfluido en el sistema original. Los valores de todas las magnitudes del sistema K están relacionadas con sus valores en K_0 (que distinguiremos con el sufijo 0) mediante las siguientes fórmulas de transformación de la mecánica:†

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j} &= \rho\mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \\ E &= \tfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{v}_s + E_0, \\ \mathbf{Q} &= (\tfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{v}_s + E_0)\mathbf{v}_s + \tfrac{1}{2}v_s^2\mathbf{j}_0 + \Pi_0\cdot\mathbf{v}_s + \mathbf{Q}_0, \\ \Pi_{ik} &= \rho v_{si}v_{sk} + v_{si}j_{0k} + v_{sk}j_{0i} + \Pi_{0ik}. \end{aligned}\right\} \tag{130.8}$$

† Estas fórmulas son una consecuencia directa del principio de relatividad de Galileo y, por tanto, son válidas para cualquier sistema particular. Pueden deducirse considerando, por ejemplo, un fluido ordinario. El tensor de la densidad del flujo del impulso en dinámica de fluidos ordinaria es $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$. La velocidad del fluido v en el sistema K está relacionada con la velocidad $\mathbf{v}_0$ en K_0 por $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}$ la velocidad relativa de los dos sistemas. Sustituyendo en Π_{ik}, tenemos

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i}v_{0k} + \rho v_{0i}u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k.$$

Haciendo $\Pi_{0ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i}v_{0k}$ y $\mathbf{j}_0 = \rho\mathbf{v}_0$, obtenemos la fórmula de transformación para el tensor Π_{ik} dada en (130.8). Las fórmulas restantes se obtienen de modo análogo.

Hemos llamado $\Pi_0 \cdot \mathbf{v}_s$ al vector cuyos componentes son $\Pi_{0ik}v_{sk}$.

En el sistema K_0, el elemento de fluido considerado realiza un solo movimiento, que es un flujo normal con velocidad $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. De aquí que las magnitudes $\mathbf{j}_0$, E_0, $\mathbf{Q}_0$ y Π_{0ik} sólo pueden depender de la diferencia $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, y no de $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v}_s$ separadamente; en particular, los vectores $\mathbf{j}_0$ y $\mathbf{Q}_0$ deben ser paralelos al vector $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ [el flujo másico $\mathbf{j}_0$ es simplemente $\rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$]. Así pues, las fórmulas (130.8) dan la dependencia entre las magnitudes relacionadas con $\mathbf{v}_s$ para valores dados de $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

La energía E_0, como función de ρ, s y el impulso $\mathbf{j}_0$ por unidad de volumen, satisface la identidad termodinámica

$$dE_0 = \mu\, d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)\cdot d\mathbf{j}_0, \tag{130.9}$$

siendo μ el potencial químico (termodinámico) por unidad de masa. Los dos primeros términos corresponden a la identidad termodinámica usual correspondiente a un fluido en reposo con volumen constante (en este caso la unidad) y el último término muestra que la derivada de la energía respecto al impulso es la velocidad.

No daremos ahora los cálculos subsiguientes, que son bastante laboriosos, sino su esquema general. En la ecuación de conservación de la energía (30.7) sustituiremos E y $\mathbf{Q}$ de (30.8), calculando la derivada $\partial E_0/\partial t$ mediante la identidad (30.9). Luego se eliminan todas las derivadas temporales (ρ, $\mathbf{v}_s$, etc.) mediante las ecuaciones (130.3)-(130.6); entonces debe satisfacerse idénticamente la ecuación de conservación de la energía. Si tenemos en cuenta el hecho de que los flujos $\mathbf{Q}_0$, Π_{0ik} y el escalar μ en la ecuación (130.6) sólo pueden depender de las variables termodinámicas y de la velocidad $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, pero no de sus gradientes (puesto que despreciamos los procesos disipativos), nos encontramos con que sólo puede obtenerse esta identidad si las magnitudes mencionadas anteriormente se escogen de un modo definido unívocamente.

Resulta también que el escalar μ es el potencial químico (por cuya razón se ha designado con la misma letra) y las expresiones finales para la densidad del flujo de energía y el tensor densidad del flujo de impulso son

$$\mathbf{Q} = (\mu + \tfrac{1}{2}v_s^2)\mathbf{j} + T\rho s\mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n[\mathbf{v}_n\cdot(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)], \tag{130.10}$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni}v_{nk} + \rho_s v_{si}v_{sk} + p\delta_{ik}, \tag{130.11}$$

en donde

$$p = -E_0 + T\rho s + \mu\rho + \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \tag{130.12}$$

La expresión correspondiente a Π_{ik} es la generalización natural de la fórmula $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$ de la dinámica de fluidos ordinaria. La magnitud p definida mediante la fórmula (130.12) puede considerarse naturalmente como

la presión del fluido.†

Las ecuaciones (130.3)-(130.6), definiéndose $\mathbf{j}$ y Π_{ik} mediante (130.10) y (130.11), forman el sistema requerido completo de ecuaciones de la dinámica de superfluidos.‡ Son muy complejas, debido fundamentalmente a que las magnitudes ρ_s, ρ_n, μ, etc., que aparecen en las ecuaciones son funciones de las velocidades (más precisamente, de la diferencia $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$). La forma de estas funciones puede determinarse en principio sólo a partir de la teoría microscópica.

Sin embargo, estas ecuaciones se simplifican mucho en el caso, de gran interés físico, de velocidades pequeñas.†† En este caso podemos en primer lugar despreciar, como ya se ha mencionado, la dependencia de ρ_n y ρ_s con la velocidad; entonces la expresión (130.1) para el flujo $\mathbf{j}$ da esencialmente los primeros términos de un desarrollo de $\mathbf{j}$ en potencias de $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_n$. El desarrollo en potencias de las velocidades debe hacerse también para las otras magnitudes termodinámicas que aparecen en las ecuaciones.

Consideremos la presión y la temperatura como variables termodinámicas independientes. La identidad termodinámica correspondiente al potencial químico es

$$\mathrm{d}\mu = -s\mathrm{d}T + (1/\rho)\mathrm{d}p - (\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)\cdot \mathrm{d}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s);$$

que puede obtenerse diferenciando la expresión (130.12) y utilizando la identidad (130.9). De aquí vemos que los dos primeros términos del desarrollo de μ en potencias de la diferencia de velocidades son

$$\mu(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \mu(p, T) - \tfrac{1}{2}(\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \tag{130.13}$$

el segundo miembro contiene el potencial químico ordinario $\mu(p, T)$ y la densidad $\rho(p, T)$ del fluido en reposo. Derivando respecto a la temperatura y a la presión, se encuentran los desarrollos correspondientes de la entropía y de la densidad:

$$s(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx s(p, T) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right), \tag{130.14}$$

$$\rho(p, T, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \approx \rho(p, T) + \tfrac{1}{2}\rho^2(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right). \tag{130.15}$$

† En termodinámica, la presión normalmente definida como la fuerza media que actúa sobre la unidad de área se relaciona con un medio en reposo. No obstante, en la dinámica de fluidos ordinaria no existe ninguna ambigüedad en la definición de la presión (despreciándose los procesos disipativos), puesto que siempre podemos tomar un sistema coordenado en el que esté en reposo el elemento de volumen de fluido considerado. Sin embargo, en la dinámica de superfluidos podemos eliminar solamente uno de los dos movimientos simultáneos mediante una selección adecuada del sistema coordenado y así no puede aplicarse la definición usual de la presión.

En un fluido totalmente en reposo, la definición (130.12) es, naturalmente, la misma que la definición ordinaria, puesto que en este caso $\mu\rho + Ts\rho - E_0 = p$ por la definición del potencial químico.

‡ También puede establecerse el sistema de ecuaciones en una forma general para una mezcla de helio II con otras sustancias (en la práctica, el isótopo He^3), para cualquier concentración. Esto se debe a I. M. KHALATNIKOV (*Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **23**, 169, 1952).

†† Es decir. cuando el cociente entre la velocidad y la velocidad de propagación del segundo sonido

Estas expresiones han de sustituirse en las ecuaciones dinámicas, que son entonces válidas hasta los términos de segundo orden en las velocidades.

Consideremos brevemente el tema de los términos disipativos en las ecuaciones de la dinámica de superfluidos. La forma de estos términos sólo se ve restringida por las condiciones impuestas por la ley de incremento de la entropía y por la simetría de los coeficientes cinéticos. Un análisis detallado, debido a I. M. KHALATNIKOV,‡ muestra que existen cinco coeficientes de disipación diferentes (en lugar de los tres coeficientes η, ζ, κ que aparecen en un fluido ordinario). De ellos, uno es la primera viscosidad η, debida al flujo normal y totalmente análoga a la viscosidad de un flujo ordinario. En el tensor de flujo del impulso Π_{ik} y en la magnitud cuyo gradiente aparece en (130.6) intervienen términos adicionales proporcionales a $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ y a $\operatorname{div} [\rho_s(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)]$; de los cuatro coeficientes de proporcionalidad, dos son iguales, habida cuenta la simetría de los coeficientes cinéticos, de modo que existen tres «segundas viscosidades» ζ_1, ζ_2, ζ_3. Finalmente, en el segundo miembro de la ecuación de la entropía (30.5) interviene un término de la forma $(1/T) \operatorname{div} (\kappa \operatorname{\mathbf{grad}} T)$, con un coeficiente κ que es formalmente análogo a la conductividad térmica de un fluido ordinario, y además términos cuadráticos en los gradientes de la velocidad, que se obtienen como resultado del efecto de la viscosidad en la transferencia térmica [ver ecuación (49.5)].

Las condiciones límites a aplicar en las ecuaciones de la dinámica de superfluidos son las siguientes. En primer lugar, el componente perpendicular del flujo másico $\mathbf{j}$ debe anularse en cualquier superficie sólida que esté en reposo. Para determinar las condiciones sobre $\mathbf{v}_n$, debemos recordar que el flujo normal es realmente un flujo de un gas de excitaciones térmicas. En el flujo a lo largo de una superficie sólida, los cuantos de interacción interaccionan con la superficie y esto debe describirse macroscópicamente como la «adherencia» del flujo normal a la superficie como en los fluidos viscosos ordinarios. En otras palabras, la componente tangencial de la velocidad $\mathbf{v}_n$ debe ser nula en la superficie del sólido.

El componente de $\mathbf{v}_n$ perpendicular a la superficie no necesita anularse, puesto que los cuantos de excitación pueden ser absorbidos o emitidos por la superficie, correspondiendo simplemente a la transferencia térmica entre el fluido y la superficie. La condición límite exige solamente que el flujo térmico perpendicular a la superficie sea continuo. La propia temperatura tiene una discontinuidad en el límite que es proporcional al flujo térmico: $\Delta T = Kq$, con un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades, tanto del fluido como del sólido. La presencia de esta discontinuidad se debe a la naturaleza peculiar de la transferencia térmica en el helio II.

‡ Ver *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **23**, 265, 1952.

Toda la resistencia a la transferencia térmica entre el sólido y el fluido se encuentra en el fluido junto a la superficie, puesto que la propagación convectiva del calor en el fluido no encuentra casi resistencia. En consecuencia, la totalidad de la caída de temperatura que produce la transferencia térmica se produce en la propia superficie.

Una propiedad interesante de estas condiciones límites es que el intercambio térmico entre la superficie sólida y el fluido da como resultado la aparición de fuerzas tangenciales sobre la superficie. Si el eje x es perpendicular a la superficie y el eje y tangencial, la fuerza tangencial por unidad de área es igual al componente Π_{xy} del tensor de flujo de cantidad de movimiento. Puesto que debemos tener $j_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$ en la superficie, se encuentra para esta fuerza la expresión no nula $\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx}(v_{ny} - v_{sy})$. Podemos escribir esta expresión en función del flujo térmico $\mathbf{q} = \rho s T \mathbf{v}_n$ como $\Pi_{xy} = (\rho_n/\rho_s T) q_x (v_{ny} - v_{sy})$, siendo q_x el flujo térmico desde la superficie sólida al fluido, que es continuo en la superficie.

En ausencia de transferencia térmica entre la superficie sólida y el fluido, la componente de $\mathbf{v}_n$ perpendicular a la superficie es también nula. Las condiciones límites $j_x = 0$ y $\mathbf{v}_n = 0$ (con el eje x perpendicular a la superficie) son equivalentes a $v_{sx} = 0$ y $\mathbf{v}_n = 0$. Por consiguiente, en este caso, obtenemos las condiciones límites usuales correspondientes a un fluido ideal para $\mathbf{v}_s$ y las de un fluido viscoso para $\mathbf{v}_n$.

Finalmente, consideremos los movimientos del helio II, el cual puede considerarse a este respecto como incompresible, como sucede normalmente en el flujo que rodea a los cuerpos. También tendremos en cuenta la viscosidad del flujo normal. Para ello, debemos sumar al tensor Π_{ik} un término en el que interviene, como es usual, el coeficiente de viscosidad η y las derivadas espaciales de la derivada $\mathbf{v}_n$:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} - \eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\right). \qquad (130.16)$$

Los coeficientes de la segunda viscosidad no aparecen en el caso de un fluido incompresible. Los términos disipativos en la ecuación de la entropía son, en el caso considerado, cantidades pequeñas de orden superior y pueden despreciarse. Admitiendo que las densidades ρ_n, ρ_s y la entropía s son constantes, obtenemos a partir de la ecuación (130.5) $\operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$, y a partir de (130.3) $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, de modo que $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$. Utilizando estas ecuaciones y sustituyendo (130.16) en (130.4), obtenemos la ecuación

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_s + \rho_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}_n = -\mathbf{grad}\, p + \eta \triangle \mathbf{v}_n. \qquad (130.17)$$

La ecuación (130.6) permanece sin variar.

Puesto que el flujo superfluido es flujo potencial, podemos introducir el potencial de velocidad por $\mathbf{v}_s = \mathbf{grad}\,\phi_s$ y, como $\operatorname{div}\mathbf{v}_s = 0$, el potencial satisfará la ecuación de Laplace

$$\triangle\phi_s = 0. \tag{130.18}$$

Introduciendo ϕ_s en la ecuación (130.17) y poniendo $(\mathbf{v}_s\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}_s = \mathbf{grad}\,v_s^2/2$, obtenemos

$$\rho_n\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n(\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}_n + \rho_s\,\mathbf{grad}\,\tfrac{1}{2}v_s^2 + \rho_s\,\mathbf{grad}(\partial\phi_s/\partial t) = -\mathbf{grad}\,p + \eta\triangle\mathbf{v}_n.$$

Utilicemos como magnitudes auxiliares las «presiones» p_n, p_s de los flujos normal y superfluido:

$$p = p_0 + p_n + p_s, \tag{130.19}$$

en donde p_0 es la presión en el infinito, y p_s se define por la forma usual correspondiente a un fluido ideal,

$$p_s = -\rho_s\,\partial\phi_s/\partial t - \tfrac{1}{2}\rho_s v_s^2. \tag{130.20}$$

La ecuación para la velocidad $\mathbf{v}_n$ queda entonces

$$\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n}\mathbf{grad}\,p_n + \frac{\eta}{\rho_n}\triangle\mathbf{v}_n. \tag{130.21}$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación de Navier-Stokes para un fluido de densidad ρ_n y viscosidad η (y, por tanto, viscosidad cinemática η/ρ_n).

Así pues, el problema del flujo del helio II incompresible se reduce a dos problemas de dinámica de fluidos ordinarios, uno correspondiente a un fluido ideal y el otro a un fluido viscoso. El flujo del superfluido está determinado por la ecuación de Laplace (130.18) con una condición límite respecto a la derivada normal $\partial\phi_s/\partial n$, como en el problema ordinario del flujo potencial de un fluido ideal que rodea un cuerpo. El flujo normal queda determinado por la ecuación de Navier-Stokes (130.21), con las mismas condiciones límites sobre $\mathbf{v}_n$ (en ausencia de intercambio térmico entre la superficie y el fluido) que en el flujo ordinario de un fluido viscoso. La distribución de presiones queda determinada entonces por la fórmula (130.19).

PROBLEMAS

Problema 1. Se mantiene una pequeña diferencia de temperatura ΔT entre los extremos de un capilar que contiene helio II. Determinar el flujo término a lo largo del capilar.

Solución. De acuerdo con la fórmula (129.3), la caída de presión entre los dos extremos del capilar es $\Delta p = \rho s \Delta T$. Esto origina un flujo normal, cuya velocidad media (sobre la sección recta del capilar) es $v_n = R^2 \Delta p / 8\eta l$ [en donde R es el radio del capilar, l su longitud y η la viscosidad del flujo normal; ver fórmula (17.10)]. El flujo térmico total es $\rho s \overline{v}_n \pi R^2 = \pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T / 8\eta l$. Se produce un flujo superfluido en sentido opuesto, viniendo dada su velocidad por la condición de transferencia total de masa nula: $\overline{v}_s = -\rho_n \overline{v}_n / \rho_s$.

Problema 2. Deducir la fórmula para la distribución de temperaturas del helio II en flujo incompresible.

Solución. Escribiendo en la ecuación (130.6) [con μ dado por (130.13)] $\mathbf{v}_s = \mathbf{grad}\, \phi_s$ e integrando, obtenemos $\mu(p, T) + v_s^2/2 - (\rho_n/\rho)(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2/2 + \partial \phi_s / \partial t = \text{constante}$. Las variaciones de presión y de temperatura en un fluido incompresible son pequeñas y tenemos hasta los términos de primer orden $\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + (p - p_0)/\rho$, en donde T_0 y ρ_0 son la temperatura y presión en el infinito. Sustituyendo esta expresión en la integral anterior, y utilizando p_n y p_s, se obtiene

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s} \left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 \right].$$

§ 131. Propagación del sonido en un superfluido

Apliquemos las ecuaciones de la dinámica de fluidos para el helio II a la propagación del sonido en él. Como es normal, se supone que son pequeñas las velocidades de la onda sonora y que la densidad, la entropía y la presión son casi iguales a sus valores de equilibrio constantes. Entonces podemos linealizar las ecuaciones, despreciando los términos cuadráticos en la velocidad de (130.11), (130.13) y (130.14), y considerar la entropía ρ_s como constante en el término $\operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$ de (130.5) (puesto que dicho término ya contiene la pequeña magnitud $\mathbf{v}_n$). Así pues, las ecuaciones de la dinámica de fluidos se reducen a

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{131.1}$$

$$\partial(\rho s)/\partial t + \rho s \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \tag{131.2}$$

$$\partial \mathbf{j} / \partial t + \mathbf{grad}\, p = 0, \tag{131.3}$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t + \mathbf{grad}\, \mu = 0. \tag{131.4}$$

Derivando (131.1) respecto al tiempo y sustituyendo (131.3), se obtiene

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = \Delta p. \tag{131.5}$$

Mediante la identidad termodinámica $d\mu = -s dT + dp/\rho$, tenemos $\mathbf{grad}\, p = \rho s\, \mathbf{grad}\, T + \rho\, \mathbf{grad}\, \mu$. Sustituyendo $\mathbf{grad}\, p$ de (131.3) y $\mathbf{grad}\, \mu$ de (131.4), se

tiene
$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho s \,\mathbf{grad}\, T = 0.$$

Tomemos la divergencia de esta ecuación sustituyendo $\mathrm{div}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ por la expresión $(\rho/s\rho_s)\,\partial s/\partial t$, que se deduce de la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} - \frac{s}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -s\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_n + (s/\rho)\mathrm{div}\,\mathbf{j} \\ &= (s\rho_s/\rho)\,\mathrm{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).\end{aligned}$$

El resultado es
$$\partial^2 s/\partial t^2 = (\rho_s s^2/\rho_n)\triangle T. \tag{131.6}$$

Las ecuaciones (131.5) y (131.6) determinan la propagación del sonido en un superfluido. Como existen dos ecuaciones, vemos que aparecen dos velocidades de propagación del sonido.

Escribamos s, p, ρ y T como $s = s_0 + s'$, $p = p_0 + p'$, etc., en donde las letras con prima representan variaciones pequeñas de las magnitudes correspondientes en la onda sonora, y las que tienen subíndice cero (que omitiremos por brevedad) sus valores de equilibrio constantes. Entonces podemos escribir

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p}p' + \frac{\partial \rho}{\partial T}T', \qquad s' = \frac{\partial s}{\partial p}p' + \frac{\partial s}{\partial T}T',$$

y las ecuaciones (131.5) y (131.6) se convierten en

$$\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \triangle p' + \frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\triangle T' = 0.$$

Busquemos una solución de estas ecuaciones en la forma de una onda plana, en la que p' y T' son proporcionales a un factor $e^{-i\omega(t-x/u)}$ (designándose ahora por u la velocidad del sonido). La condición de compatibilidad de ambas ecuaciones es

$$u^4\frac{\partial(s,\rho)}{\partial(T,p)} - u^2\left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0,$$

en donde $\partial(s, \rho)/\partial(T, p)$ designa el jacobiano de la transformación de s, ρ a T, p. Mediante una transformación simple, con empleo de las relaciones termodinámicas, esta ecuación puede reducirse a

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = 0, \tag{131.7}$$

siendo c_v el calor específico por unidad de masa. Esta ecuación cuadrática en u^2 da las dos velocidades de propagación del sonido en el helio II. Para $\rho_s = 0$, una raíz es cero, y obtenemos, como era de esperar, sólo la velocidad ordinaria del sonido $u = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$.

Los calores específicos c_p y c_v del helio II son, en la realidad, casi iguales a todas las temperaturas (puesto que el coeficiente de dilatación térmica es pequeño). Mediante una fórmula termodinámica bien conocida, las compresibilidades isoterma y adiabática son, entonces, también casi coincidentes: $(\partial p/\partial \rho)_T \approx (\partial p/\partial \rho)_s$. Designando el valor común de c_p y c_v por c, y el de $(\partial p/\partial \rho)_T$ y $(\partial p/\partial \rho)_s$ por $\partial p/\partial \rho$, obtenemos a partir de (131.7) las expresiones siguientes para las velocidades del sonido:

$$u_1 = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)}, \qquad u_2 = \sqrt{(Ts^2 \rho_s / c\rho_n)}. \tag{131.8}$$

Una de ellas, u_1, es casi constante, mientras que la otra, u_2, depende marcadamente de la temperatura, anulándose con ρ_s en el punto λ.†

A temperaturas muy bajas, en donde casi todas las excitaciones elementales en el fluido son fonones, las magnitudes ρ_n, c y s están relacionadas‡ por $c = 3s$, $\rho_n = cT\rho/3u_1^2$ y $\rho_s \cong \rho$. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (131.8) para u_2, se encuentra $u_2 = u_1/\sqrt{3}$. Así pues, cuando la temperatura tiende a cero, las velocidades u_1 y u_2 tienden a límites finitos, y su cociente tiende a $\sqrt{3}$.

Con objeto de aclarar más la naturaleza física de los dos tipos de ondas sonoras en el helio II, consideremos una onda sonora plana (E. LIFSHITZ, 1944). En dicha onda las velocidades $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_s$ y las partes variables T', p' de la temperatura y presión son proporcionales entre sí. Definiremos los coeficientes de proporcionalidad mediante

$$\mathbf{v}_n = a\mathbf{v}_s, \qquad p' = bv_s, \qquad T' = cv_s. \tag{131.9}$$

† El problema de la propagación del sonido en disoluciones con mezclas de helio II ha sido estudiado por I. YA. POMERAUNCHK, *Zhurnal éksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*, **19**, 42, 1949, para el caso de concentraciones pequeñas, y por I. M. KHALATNIKOV, *ibid.*, **23**, 265, 1952, en el caso de concentraciones arbitrarias.

‡ Ver *Física Estadística*, §§ 66, 67.

Un cálculo sencillo, utilizando las ecuaciones (131.1)-(131.6), y trabajando con la precisión necesaria, da para el *primer sonido*

$$a_1 = 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s}\frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \qquad b_1 = \rho u_1, \qquad c_1 = \frac{\beta T u_1^3}{c(u_1^2 - u_2^2)}, \tag{131.10}$$

y para el *segundo sonido*

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{\rho_n s}\frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \qquad b_2 = \frac{\beta\rho u_1^2 u_2^3}{s(u_1^2 - u_2^2)}, \qquad c_2 = -u_2/s. \tag{131.11}$$

Aquí $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ es el coeficiente de dilatación térmica; puesto que es pequeño, las magnitudes en que interviene β son pequeñas en comparación con aquellas otras en que no interviene.

Vemos que en una onda sonora del primer tipo, $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_s$, es decir, en una primera aproximación el fluido contenido en un elemento de volumen cualquiera oscila como un todo en dicha onda, moviéndose conjuntamente las partes normal y superfluida. Este tipo de ondas corresponde claramente a una onda sonora ordinaria en un fluido ordinario.

Sin embargo, en una onda del segundo tipo, tenemos $\mathbf{v}_n \approx -\rho_s \mathbf{v}_s/\rho_n$, es decir, la densidad de flujo total $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \approx 0$. Así pues, en una onda de segundo sonido las partes superfluida y normal se mueven en oposición, permaneciendo en primera aproximación el centro de masas de un elemento de volumen cualquiera en reposo y siendo nulo el flujo de masa total. Dicha onda es evidentemente una característica peculiar de los superfluidos.

Existe otra diferencia importante entre los dos tipos de onda, que se ve a partir de las fórmulas (131.10) y (131.11). En una onda sonora del tipo ordinario, la amplitud de las oscilaciones de presión es relativamente grande, mientras que la correspondiente a las oscilaciones de temperatura es pequeña. Sin embargo, en una onda de segundo sonido, la amplitud relativa de las oscilaciones de temperatura es grande en comparación con la de las oscilaciones de presión. En este sentido podemos decir que las ondas del segundo sonido son ondas de temperatura no amortiguadas.†

En una aproximación en la que se desprecie la dilatación térmica, las ondas del segundo sonido son puramente oscilaciones de temperatura (con $\mathbf{j} = 0$), mientras que las ondas del primer sonido son oscilaciones de presión (con $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$). De acuerdo con ello, sus ecuaciones del movimiento son totalmente separables: en la ecuación (131.6) escribiremos $s' = cT'/T$, obteniendo $\partial^2 T'/\partial t^2 = u_2^2 \Delta T'$, y en la ecuación (131.5) escribiremos $\rho' = p'\partial\rho/\partial p$, obteniendo $\partial^2 p'/\partial t^2 = u_1^2 \Delta p'$.

† Naturalmente, no tienen relación alguna con las ondas de temperatura amortiguadas en un medio conductor termodinámico ordinario.

El tema de los diversos métodos que existen para excitar ondas sonoras en el helio II ha sido estudiado por E. M. LIFSHITZ (1944). Resulta (ver los problemas) que los medios mecánicos normales de excitación de ondas sonoras (oscilación de cuerpos sólidos) son muy poco adecuados para crear el segundo sonido, ya que la intensidad del segundo sonido emitido es despreciable en comparación con la del sonido ordinario. Sin embargo, son posibles otros métodos de excitación de ondas sonoras en el helio II. Por ejemplo, la emisión de sonido por cuerpos sólidos cuya temperatura varía periódicamente; la intensidad del segundo sonido emitido es entonces grande en comparación con el primer sonido, como era de esperar en vista de la diferencia ya mencionada de la naturaleza de las oscilaciones de temperatura.

PROBLEMAS

Problema 1. Determinar el cociente entre las intensidades del primer y segundo sonido emitido por un plano que oscila en una dirección perpendicular a sí mismo.

Solución. Busquemos las velocidades v_s (a lo largo del eje x, perpendicular al plano) de las ondas del primer y segundo sonido en las formas

$$v_{s1} = A_1 \cos \omega(t - x/u_1), \qquad v_{s2} = A_2 \cos \omega(t - x/u_2)$$

respectivamente. En la superficie del plano oscilante, las velocidades v_1 y v_n deben ser iguales a la velocidad del plano, que designaremos por $v_0 \cos \omega t$. Esto nos da las ecuaciones $A_1 + A_2 = v_0$, $a_1A_1 + a_2A_2 = v_0$, en donde los coeficientes a_1 y a_2 vienen dados por (131.10) y (131.11). La densidad de energía media (temporal) de una onda sonora en el helio II es $\rho_s v_s^2 + \rho_n v_n^2 = A^2(\rho_s + \rho_n a^2)/2$; se obtiene el flujo de energía (intensidad) multiplicando por la velocidad correspondiente del sonido u. El cociente entre las intensidades de las ondas del segundo y primer sonido resulta ser

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2(\rho_s + \rho_n a_2^2)u_2}{A_1^2(\rho_s + \rho_n a_1^2)u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}.$$

Aquí hemos supuesto que $u_2 \ll u_1$, lo cual no es cierto cuando se desciende a temperaturas muy bajas. El cociente es siempre pequeño.

Problema 2. Igual que el problema 1, pero en el caso de una superficie cuya temperatura varía periódicamente.

Solución. Es suficiente utilizar la condición límite $j = 0$, que debe ser válida en una superficie fija. Nos da $\rho_s(A_1 + A_2) + \rho_n(a_1A_1 + a_2A_2) = 0$, de aquí que

$$|A_2/A_1| = (\rho_n a_1 + \rho_s)/(\rho_n a_2 + \rho_s) \approx s/\beta u_2^2.$$

El cociente de intensidades resulta ser $I_2/I_1 = c/T\beta^2 u_1 u_2$, y es muy grande.

Problema 3. Determinar la velocidad de los puntos situados en el perfil de una onda de segundo sonido monodimensional móvil de gran amplitud, y la velocidad de propagación de las discontinuidades que se presentan en la onda como resultado de la deformación del perfil (I. M. KHALATNIKOV, 1952).

Solución. En una onda móvil monodimensional pueden expresarse todas las magnitudes (ρ, p, T, v_s, v_n) en función de un solo parámetro, que puede ser una de ellas (ver § 94). La velocidad U de los puntos situados sobre el perfil de la onda es igual a la derivada dx/dt tomada para un valor dado del parámetro. Las derivadas espacial y temporal de cada magnitud están relacionadas entre sí por $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$. Las derivadas de las magnitudes respecto al parámetro se indicarán añadiéndole una prima.

En lugar de las velociades v_s y v_n, es conveniente utilizar $v = j/\rho$ y $w = v_n - v_s$, y tomar un sistema coordenado en el que la velocidad sea cero en el punto considerado. Las ecuaciones (130.3)-(130.6), con Π_{ik}, μ, ρ, s dadas por (130.11), (130.13)-(130.15), conducen a las ecuaciones

$$-U\frac{\partial\rho}{\partial p}p' - U\rho^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)ww' + \rho v' = 0, \tag{1}$$

$$p' + 2\rho_s\rho_n ww'/\rho - U\rho v' = 0, \tag{2}$$

$$\left[-\rho U\frac{\partial s}{\partial T} + w\frac{\partial}{\partial T}(s\rho_s)\right]T' + sw\frac{\partial\rho_s}{\partial p}p' + \left[\rho_s s - Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]w' = 0, \tag{3}$$

$$\left[-\rho s + Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]T' + \left[1 + Uwp\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)\right]p' + \left[\rho_n U - \frac{\rho_n\rho_s}{\rho}w\right]w' - [U\rho + w\rho_n]v' = 0. \tag{4}$$

Ahora se han omitido todos los términos por encima del segundo orden de magnitud y así se tienen todos los términos que contienen el coeficiente de dilatación térmica.

En una onda de segundo sonido, la amplitud relativa de las oscilaciones de p y v es pequeña en comparación con la de T y w; por tanto, podemos omitir también los términos en wp' y wv'. Para determinar U es suficiente tomar la ecuación (3) y la diferencia de las ecuaciones (2) y (4); la condición de compatibilidad de las dos ecuaciones lineales obtenidas para T' y w' da la ecuación cuadrática

$$\rho_n U^2\frac{\partial s}{\partial T} - Uw\left[\frac{4\rho_s\rho_n}{\rho}\frac{\partial s}{\partial T} - 2s\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right] - \rho_s s^2 = 0$$

de aquí que

$$U = u_2 + w\left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{sT}{\rho_n c}\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right).$$

Aquí u_2 es la velocidad local del segundo sonido, que varía en el perfil de onda junto con la desviación de la temperatura δT, a partir de su valor de equilibrio. Desarrollando u_2 en potencias de δT, tenemos

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\frac{\rho_n u_2}{\rho s}w,$$

siendo u_{20} el valor de equilibrio de u_2. Finalmente tenemos

$$U = u_{20} + w\frac{\rho_s s T}{\rho c}\frac{\partial}{\partial T}\log\frac{u_{20}^3 c}{T}. \tag{5}$$

Cuando el perfil de onda varía suficientemente, en él ocurren discontinuidades (en este caso discontinuidades de temperatura); ver §§ 94, 95. La velocidad de propagación de la discontinuidad es la semisuma de las velocidades U en ambos lados de la misma, esto es

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2}\frac{\rho_s s T}{\rho c}\frac{\partial}{\partial T}\log\frac{u_{20}^3 c}{T},$$

siendo w_1, w_2 los valores de w en ambos lados de la discontinuidad.

El coeficiente de w en (5) puede ser positivo o negativo. De acuerdo con esto, los puntos con valores grandes de w pueden estar bien por delante o bien por detrás de aquellos con valores pequeños de w, y la discontinuidad se podrá formar en el frente de ondas hacia adelante o hacia atrás (mientras que en una onda sonora ordinaria, la onda de choque siempre aparece en el frente hacia adelante).

CAPÍTULO XVII

FLUCTUACIONES EN DINAMICA DE FLUIDOS

§ 132. Teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos

El cálculo de las fluctuaciones cuadráticas medias de la densidad, temperatura, velocidad, etc., en cada punto de un fluido en reposo no requiere ningún estudio especial: estas fluctuaciones (en el caso clásico, es decir, no cuántico) vienen dadas por las fórmulas normales de la termodinámica, que son válidas para las fluctuaciones en cualquier medio que esté en equilibrio termodinámico.†

Sin embargo, un problema peculiar de la dinámica de fluidos es el de las correlaciones temporales que aparecen entre las fluctuaciones de estas magnitudes, que corresponden, por tanto, a las fluctuaciones de un fluido en movimiento. En la solución de este problema deben tenerse en cuenta los procesos disipativos del fluido (viscosidad y conducción térmica).

La construcción de la teoría general de las fluctuaciones en dinámica de fluidos exige el plantear las «ecuaciones del movimiento» correspondientes a las magnitudes que fluctúan. Esto puede hacerse incluyendo los términos adicionales apropiados en las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos en la forma

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{132.1}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{132.2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s\right) = \tfrac{1}{2}\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{132.3}$$

sin que aparezca ninguna forma específica del tensor de tensiones σ'_{ik} o del vector flujo térmico $\mathbf{q}$, expresan simplemente la conservación de la masa, del impulso y de la energía en el fluido en movimiento. Por consiguiente,

† Ver *Física Estadística*, § 111, Editorial Reverté, Barcelona. Para referirse a secciones y fórmulas de este libro se les antepondrá el prefijo FE.

son válidas en esta forma para cualquier movimiento, incluyendo las variaciones fluctuantes en el estado del fluido. En este caso, ρ, p, $\mathbf{v}$, etc., deben entenderse como las sumas de los valores de las magnitudes correspondientes en el movimiento principal del fluido y de sus fluctuaciones; como es natural, las ecuaciones pueden siempre linealizarse respecto a estas últimas.

Las expresiones generales (15.3) para el tensor de tensiones y (49.1) para el flujo térmico, relacionan estas magnitudes con los gradientes de velocidad y temperatura, respectivamente. Sin embargo, en presencia de fluctuaciones, existen también en el fluido tensiones locales y flujos térmicos espontáneos, que no están relacionados con los gradientes de velocidad y temperatura; los designaremos mediante los símbolos s_{ik} y $\mathbf{g}$, y los llamaremos magnitudes *aleatorias*.† Así pues, podemos escribir‡

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \tfrac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik} + s_{ik},$$
$$\mathbf{q} = -\kappa\,\mathbf{grad}\,T + \mathbf{g}. \tag{132.4}$$

El problema consiste ahora en establecer ciertas propiedades de s_{ik} y $\mathbf{g}$, por ejemplo, sus valores cuadráticos medios y las correlaciones entre sus valores en los diversos puntos del fluido y en diferentes instantes. Esto puede hacerse mediante las fórmulas generales de la teoría de las fluctuaciones. Por sencillez, daremos el razonamiento a seguir en el caso de las fluctuaciones no cuantizadas que normalmente aparecen en la mecánica de fluidos,†† y supondremos que los coeficientes de viscosidad y conducción térmica son independientes de la frecuencia de las fluctuaciones, es decir, no presentan dispersión.

En la teoría general de las fluctuaciones (FE §§ 110, 121) hemos estudiado una serie discreta de magnitudes fluctuantes x_1, x_2, ..., mientras que aquí tenemos una serie continua (los valores de ρ, p, $\mathbf{v}$, ..., en todo punto del fluido). Sortearemos esta dificultad, que carece de importancia, de una manera puramente formal dividiendo el volumen del fluido en porciones ΔV pequeñas pero finitas, y tomando ciertos valores medios de las magnitudes en cada porción; el paso a porciones infinitesimales se realizará en las fórmulas finales.

† En correspondencia con el término *fuerzas aleatorias* de la teoría general de las fluctuaciones.

‡ En este capítulo sobreentenderemos que T es la temperatura medida en unidades de energía, es decir, se omitirá la constante de Boltzmann.

†† Esto significa que las frecuencias ω que aparecen en las fluctuaciones se están suponiendo que son de un valor tal que $\hbar\omega \ll T$; ver FE (109.2).

Consideraremos las fórmulas (132.4) como las ecuaciones

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b + y_a \tag{132.5}$$

de la teoría general [ver FE (121.9)], siendo las magnitudes $\dot{x}_a$ las componentes del tensor σ'_{ik} y del vector $\mathbf{q}$ en cada porción ΔV:

$$\dot{x}_a \to \sigma'_{ik},\quad q_i. \tag{132.6}$$

Las magnitudes aleatorias s_{ik} y $\mathbf{g}$ son entonces las magnitudes correspondientes y_a:

$$y_a \to s_{ik},\quad g_i. \tag{132.7}$$

Se encuentra el significado de X_a, de acuerdo con las reglas generales, utilizando la fórmula correspondiente a la variación respecto al tiempo de la entropía total S del fluido. Como en § 49, se encuentra a partir de la ecuación (132.3) que

$$\dot{S} = \int \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{grad}\, T}{T^2} \right\} \mathrm{d}V$$

[cuando $s_{ik} = 0$, $\mathbf{g} = 0$ esta expresión nos da (49.6)] o bien, sustituyendo la integral por una suma extendida a las porciones ΔV,

$$\dot{S} = \sum \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{grad}\, T}{T^2} \right\} \Delta V. \tag{132.8}$$

Debemos tener también $S = -\Sigma X_a \dot{x}_a$; ver (58.4). Sustituyendo (132.6) y comparando con (132.8), se halla que las magnitudes correspondientes X_a son

$$X_a \to -\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V, \qquad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V. \tag{132.9}$$

Resulta ahora sencillo hallar los coeficientes γ_{ab}, que nos dan ya las correlaciones requeridas por

$$\overline{y_a(t_1) y_b(t_2)} = (\gamma_{ab} + \gamma_{ba}) \delta(t_1 - t_2); \tag{132.10}$$

ver FE (121.10a). La operación de promediar se realiza aquí en el sentido usual de la estadística, es decir, promediamos respecto a las probabilidades de todos los valores que las magnitudes pueden tener en los instantes t_1 y t_2; también puede considerarse que se promedia respecto a t_1 o t_2 para una diferencia dada $t_1 - t_2$.

Señalemos en primer lugar que las fórmulas (132.4) no contienen ningún

término que relacione σ'_{ik} con el gradiente de temperatura o $\mathbf{q}$ con el gradiente de velocidades. Esto significa que los coeficientes correspondientes γ_{ab} son nulos, y según (132.10) tenemos

$$\overline{s_{ik}(\mathbf{r}_1, t_1)g_l(\mathbf{r}_2, t_2)} = 0, \tag{132.11}$$

es decir, los valores de s_{ik} y g_l carecen de toda correlación (siendo $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ las coordenadas de dos puntos del fluido).

A continuación, los coeficientes q_i que relacionan q_i con los valores de $(1/T^2)(\partial T/\partial x_k)\Delta V$ son cero si se toman estas dos magnitudes en volúmenes diferentes ΔV, mientras que valen $\kappa T^2\delta_{ik}/\Delta V$ si el elemento de volumen es el mismo. De aquí tenemos

$$\overline{g_i(\mathbf{r}_1, t_1)g_k(\mathbf{r}_2, t_2)} = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2,$$

$$\overline{g_i(\mathbf{r}, t_1)g_k(\mathbf{r}, t_2)} = \frac{2\kappa T^2}{\Delta V}\delta_{ik}\,\delta(t_1 - t_2).$$

Pasando ahora al límite $\Delta V \to 0$, podemos evidentemente escribir ambas fórmulas conjuntamente como

$$\overline{g_i(\mathbf{r}_1, t_1)g_k(\mathbf{r}_2, t_2)} = 2\kappa T^2\delta_{ik}\,\delta(t_1 - t_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{132.12}$$

Finalmente, podemos de modo semejante obtener las fórmulas que nos dan las correlaciones entre los componentes del tensor de tensiones aleatorias:

$$\overline{s_{ik}(\mathbf{r}_1, t_1)s_{lm}(\mathbf{r}_2, t_2)} = 2T[\eta(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + (\zeta - \tfrac{2}{3}\eta)\delta_{ik}\delta_{lm}]\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2). \tag{132.13}$$

Las fórmulas (132.11)-(132.13) dan la solución del problema (L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, 1957).†

Estas fórmulas pueden volverse a escribir en función de las componentes temporales de Fourier de las magnitudes que nos ocupan. Se define la componente de Fourier de la magnitud fluctuante $x_a(t)$ como

$$x_{a\omega} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t, \qquad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{a\omega}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega; \tag{132.14}$$

† Para convertir a las unidades ordinarias de medida de temperatura (grados) debemos sustituir T por kT y κ por κ/k, siendo k la constante de Boltzmann.

ver FE § 118. Para los componentes $y_{a\omega}$ e $y_{b\omega}$ así definidos tenemos

$$\overline{y_{a\omega}y_{b\omega'}} = (1/2\pi)(\gamma_{ab}+\gamma_{ba})\delta(\omega+\omega');$$

ver FE (121.10). Así pues, sustituyendo $\delta(t_1 - t_2)$ por $(1/2\pi)\delta(\omega + \omega')$, obtenemos en lugar de (132-11)-(132-13)

$$\overline{s_{ik\omega}(\mathbf{r}_1)g_{l\omega'}(\mathbf{r}_2)} = 0, \tag{132.15}$$

$$\overline{g_{i\omega}(\mathbf{r}_1)g_{k\omega'}(\mathbf{r}_2)} = \frac{\kappa T^2}{\pi}\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\omega+\omega'), \tag{132.16}$$

$$\overline{s_{ik\omega}(\mathbf{r}_1)s_{lm\omega'}(\mathbf{r}_2)} = (T/\pi)[\eta(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl})+(\zeta-\tfrac{2}{3}\eta)\delta_{ik}\delta_{lm}]\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\omega+\omega'). \tag{132.17}$$

La generalización de estas fórmulas al caso de fluctuaciones cuantizadas se hace incluyendo simplemente un factor $(\hbar\omega/2T)\coth(\hbar\omega/2T)$ en los segundos miembros de las fórmulas (132.15)-(132.17); ver FE (124.21). Cuando la viscosidad y la conductividad térmica presentan dispersión, η, ζ, κ son funciones complejas de la frecuencia. La generalización correspondiente de las fórmulas (132.15)-(132.17) se realiza sustituyendo η, ζ, κ por las partes reales de las funciones $\eta(\omega)$, $\zeta(\omega)$, $\kappa(\omega)$, como puede demostrarse fácilmente.

§ 133. Fluctuaciones en un medio infinito

Las fórmulas que acabamos de obtener dan, en principio, las fluctuaciones en cualquier caso particular. El problema se resuelve del modo siguiente. Considerando s_{ik} y $\mathbf{g}$ como funciones conocidas de las coordenadas y el tiempo, resolvamos formalmente las ecuaciones (132.1)-(132.3) para $\mathbf{v}$, ρ, ..., teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas de la mecánica de fluidos. Así obtenemos $\mathbf{v}$, ρ, ..., como funciones lineales de s_{ik} y $\mathbf{g}$. De acuerdo con ello, cualquier magnitud cuadrática (o bilineal) en $\mathbf{v}$, ρ, ..., puede expresarse en función de funcionales cuadráticas de s_{ik} y $\mathbf{g}$, y se calculan los valores medios a partir de las fórmulas (132.11)-(132.13); las magnitudes auxiliares s_{ik} y $\mathbf{g}$ no aparecen en el resultado final.

Como ilustración del método que acabamos de describir, consideremos las fluctuaciones de presión en un medio infinito en reposo, teniendo una segunda viscosidad grande $\zeta(\omega)$ que presenta dispersión; en comparación se suponen despreciables los efectos de la viscosidad ordinaria y de la conducción térmica (como puede suceder en las condiciones descritas en § 78).

La solución de las ecuaciones (132.1)-(132-3) puede conseguirse desarrollando todas las magnitudes (ya desarrolladas por Fourier respecto al tiempo) como integrales de Fourier espaciales; en el caso de una magnitud cualquiera $f(\mathbf{r})$ ponemos

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{k}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{k} = \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z, \tag{133.1}$$

en donde

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V. \tag{133.2}$$

Las funciones de correlación para las componentes de Fourier pueden hallarse a su vez a partir de aquellas que correspondan a las propias magnitudes. Por ejemplo, si

$$\overline{f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2)} = A\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{133.3}$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int\int \overline{f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2)} \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)]\,\mathrm{d}V_1\,\mathrm{d}V_2 \\ &= \frac{A}{(2\pi)^6} \int\int \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)]\,\mathrm{d}V_1\,\mathrm{d}V_2 \\ &= \frac{A}{(2\pi)^6} \int \exp[-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}]\,\mathrm{d}V, \end{aligned}$$

o, finalmente,

$$\overline{f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}} = \frac{A}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{133.4}$$

En particular, en lugar de la fórmula (132.17), en la que retenemos (en este caso) solamente el término en ζ, tenemos

$$\overline{(s_{ik})_{\omega\mathbf{k}} (s_{lm})_{\omega'\mathbf{k}'}} = \frac{T}{8\pi^4} \operatorname{re}\, \zeta(\omega) \,.\, \delta(\omega+\omega')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{133.5}$$

Bajo las condiciones anteriores (pequeña conductividad térmica) la influencia de la variación de la entropía sobre la variación de presión es relativamente pequeña; por consiguiente, pueden considerarse las fluctuaciones

de presión como adiabáticas. De acuerdo con ello, escribamos la ecuación linealizada (132.1) como

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \delta \mathbf{v} = 0,$$

en donde δp, $\delta \mathbf{v}$ son las fluctuaciones de presión y velocidad, ρ es la densidad de equilibrio y c_0 la velocidad del sonido calculada a partir de la ecuación de estado del equilibrio (§ 78). Tomando las componentes de Fourier temporal y espacial, tenemos

$$-\frac{\omega}{c_0^2}\delta p_{\omega \mathbf{k}} + \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} = 0. \tag{133.6}$$

Análogamente, la ecuación (132.2) se transforma en

$$-\omega \rho (\delta v_i)_{\omega \mathbf{k}} = -k_i \delta p_{\omega \mathbf{k}} + i\zeta(\omega) k_i \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} + k_k s_{ik}, \tag{133.7}$$

en donde $\zeta(\omega)$ puede, por ejemplo, definirse mediante la fórmula (78.6).

Para hallar $\delta p_{\omega \mathbf{k}}$, multipliquemos escalarmente la ecuación (133.7) por $\mathbf{k}$:

$$-\omega \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}} = -k^2 \delta p_{\omega \mathbf{k}} + i\zeta k^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}}) + k_i k_k s_{ik},$$

y eliminemos $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_{\omega \mathbf{k}}$ por medio de (133.6). El resultado es

$$\delta p_{\omega \mathbf{k}} = k_i k_k s_{ik} \Big/ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} - i\zeta k^2 \frac{\omega}{\rho c_0^2} \right).$$

Finalmente, tomando el producto $\delta p_{\omega \mathbf{k}}\, \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}$ y promediando con ayuda de la fórmula (133.6), tenemos

$$\overline{\delta p_{\omega \mathbf{k}} \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}} = \frac{T c_0^4}{8\pi^4} \frac{\operatorname{re}\, \zeta(\omega) \cdot \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{[c_0^2 - (\omega^2/k^2) - i\omega(\zeta/\rho)][c_0^2 - (\omega^2/k^2) + i\omega(\zeta^*/\rho)]}. \tag{133.8}$$

Por ejemplo, si sustituimos $\zeta(\omega)$ tomada de (78.6), obtenemos

$$\overline{\delta p_{\omega \mathbf{k}} \delta p_{\omega' \mathbf{k}'}} = \frac{T}{8\pi^4} \frac{\tau \rho c_0^4 (c_\infty^2 - c_0^2) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')}{[c_0^2 - (\omega^2/k^2)]^2 + \omega^2 \tau^2 [c_\infty^2 - (\omega^2/k^2)]^2}. \tag{133.9}$$

Para concluir, mostraremos cómo puede deducirse de (133.8) la fórmula usual (clásica) para la fluctuación cuadrática media de la presión en un punto determinado del fluido. Para simplificar los cálculos admitiremos que ζ es independiente de ω.†

† El resultado (clásico) es realmente independiente de la forma de la función $\zeta(\omega)$; las únicas propiedades de esta función que se utilizan en la deducción son las que debe poseer en cualquier caso (ver FE § 122).

Retornando mediante las fórmulas (132.14) y (133.2) desde los desarrollos de Fourier a las propias funciones $\delta p(\mathbf{r}_1, t_1)$, $\delta p(\mathbf{r}_2, t_2)$, y tomando $t_1 = t_2 \equiv t$, podemos escribir

$$\overline{\delta p(\mathbf{r}_1, t)\delta p(\mathbf{r}_2, t)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\delta p_{\omega\mathbf{k}}\delta p_{\omega'\mathbf{k}'}} \exp[-i(\omega+\omega')t] \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)] \times d\omega\, d\omega'\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}',$$

en donde debemos sustituir (133.8). Se obtiene una integración sobre la frecuencia al sustituir $\omega + \omega'$ por cero en el integrando, debido al factor $\delta(\omega + \omega')$. Una segunda integración da†

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c_0^2\zeta/\rho)d\omega}{[c_0^2-(\omega^2/k^2)-(i\zeta\omega/\rho)][c_0^2-(\omega^2/k^2)+(i\zeta\omega/\rho)]} = \pi.$$

Así pues,

$$\overline{\delta p(\mathbf{r}_1, t)\delta p(\mathbf{r}_2, t)} = \frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3}\int\int \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)]\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'$$

$$= \frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3}\int \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]\, d\mathbf{k}$$

$$= \rho T c_0^2 \delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \qquad (133.10)$$

Este resultado es el que se buscaba: promediando (133.10) sobre un pequeño volumen ΔV, se obtiene

$$\overline{(\delta p)^2} = \rho T c_0^2/\Delta V,$$

de acuerdo con una fórmula de la termodinámica, FE (111.11).

† La integración se realiza fácilmente, por ejemplo, mediante el cálculo de residuos, tomando el trayecto de integración como una gran semicircunferencia en el plano de la variable compleja ω.

Índice alfabético

Absorción sonido, 341.
— —, coeficiente, 343.
Aceleración gravitatoria, 9.
Acústica geométrica, 293, 294.
— —, ecuación básica, 294.
Adiabática choque, 367.
— detonación, 551.
—, ecuación, 5.
— Hugoniot, 367.
Adiabático, movimiento, 4.
Aerodinámico, cuerpo. Flujo, 194.
Agua poco profunda, teoría, 452.
Ala, 195.
— aerodinámica, 195.
— —, fuerza arrastre, 198, 199.
— —, sustentación, 196.
—, ángulo ataque, 195.
—, coeficiente arrastre, 202.
— delgada, coeficiente sustentación, 206.
— —, distribución velocidad, 205.
— —, flujo subsónico, 531.
— —, sustentación, 203.
—, envergadura, 154.
—, flujo supersónico, 534.
— plana, fuerza ascensional, 541.
d'Alambert, paradoja, 38.
Amortiguamiento onda gravedad, 108.
Amplitud compleja onda, 284.
— onda, 284.
— —, fase, 284.
Ángulo contacto superficie separación, 267.
— derrape, 537.
— Mach, 356.
Antinodo, 303.
Arrastre, coeficiente, 168.
—, crisis, 190.
—, fuerza, 34, 38.
Arrastre inducido, 197.
— onda, 527.
—, parte disipativa, 103.
—, — inercial, 103.
Autoturbulencia llama, 546, 547.
Autovalor, conducción térmica, 227.

Barodifusión, coeficiente, 255.
Bernoulli, ecuación, 11, 12.
—, —, fluido incompresible, 23.
—, —, flujo potencial, 22.
—, —, generalización relativista, 581.
Bessel, ecuación, 308.
Burbuja gas, fuerza arrastre, 194.

Campo gravitatorio, equilibrio mecánico, 580.
Canal convergente, flujo, 91.
— divergente, flujo, 91.
Cantidad movimiento fluido, 14.
Capa límite, 20, 146, 163.
— —, ecuación Bernoulli, 164.
— —, — continuidad, 164.
— —, — movimiento, 165.
— —, — Navier-Stokes, 164.
— —, espesor, 166, 167.
— —, — cerca punto estancamiento, 169.
— —, — desplazamiento, 167.
— —, flujo cerca línea separación, 170.
— — laminar, 163.
— — —, estabilidad flujo, 176.
— — —, transferencia térmica, 233.
— —, presión, 164.
— —, separación, 170.
— —, teoría Prandtl, 88.
— —, transferencia térmica, 232.
— — turbulenta, 187.
— — —, transferencia térmica, 233.

Capa límite, velocidad flujo, 164.
Capilaridad, 271.
—, constante, 266.
—, onda, 271, 272.
Característica, 357, 432.
— flujo bidimensional estacionario, 496.
Catenoide, 268.
Cauchy-Riemann, condiciones, 26.
Caudal, 64, 397.
Cavitación, 285.
Circulación, conservación, 16.
— velocidad, 16.
— —, contorno fluido, 17.
Cociente difusión térmica, 255.
Coeficiente absorción sonido, 343.
— amortiguamiento onda, 110.
— — — gravedad, 110.
— arrastre, 168.
— barodifusión, 255.
— cinético, 253.
— —, principio simetría, 253.
— difusión, 255.
— — barométrica, 255.
— — térmica, 253, 255.
— presión, 536.
— reflexión, 292.
— superficial, 263.
— sustentación, 196.
— transferencia masa, 253, 255.
— viscosidad, 55.
— — segundo, 348.
Combustión, dinámica fluido, 543.
— lenta, 543.
—, modo, relación, 567.
—, producto, estado termodinámico, 557.
—, —, temperatura, 556.
—, —, velocidad, 556.
—, zona, 544.
Condensación, discontinuidad, 570.
Conducción térmica, 207.
— —, autovalores, 227.
— —, ecuación, 214, 215.
— — fluido incompresible, 213.
— — medio finito, 222.
— — — infinito, 217.
— — pura, 255.
— —, tiempo relajación, 219.
— — turbulenta, 232.
Conductividad térmica, 208.
— termométrica, 214.
— — turbulenta, 232.
Conservación circulación, ley, 16, 17.
— energía, fluido ideal, 207.
— —, ley general, 208.
— materia, 2.
Constante capilaridad, 266.
Continuidad, ecuación, 1, 3.
Contorno fluido, 16.
— —, circulación velocidad, 17.
Convección, 9, 214, 228.
— ausente, equilibrio mecánico, 9.
— flujo estacionario, 241.
— libre, 240.
— —, ley semejanza, 242.
— — campo gravitatorio, parámetros, 242.
Correlación triple velocidad, 141.
— velocidades, 138.
Crisis arrastre, 190.
— fuerza arrastre, 192.
Cuanto sonido, 589.
Cuerpo aerodinámico, 195.
— —, flujo, 194.
— finito, flujo, 523.
— geométricamente semejante, 68, 69.
— puntiagudo, flujo supersónico, 526.
— sólido, oscilación fluido viscoso, 97.
— sumergido fluido ideal, ecuación movimiento, 39.

Chaplygin, ecuación, 492, 494.
—-Zhukovskii, condición, 197.
Choque, adiabática, 367.
— adiabático, 365.
— —, ecuación relativista, 582.
— normal, 365.
— oblicuo, 365.
—, onda, 355, 365.
—, polar, 383.
Chorro débil, 97.
—, flujo medio fuera región turbulenta, 151.
— fuerte, 97.
—, impulso, 95.
—, línea corriente, 97.
— sumergido, 95.
— turbulento, 146.
— —, distribución velocidades, 149.
— — sumergido, tamaño, 152.
— — —, velocidad, 152.

Degenerada, frecuencia, 274.
Densidad campo gravitatorio, 8.

Densidad fluido, 1.
— flujo energía, 13.
— — entropía, 5.
— — másico, 3.
Derrape, ángulo, 537.
Descarga, 397.
Detonación, 550, 551.
—, adiabática, 551.
—, onda, 551.
—, —, propagación, 559.
—, velocidad propagación, 556.
Difusión, 249.
— barométrica, coeficiente, 255.
—, coeficiente, 255.
— partícula suspendida fluido, 258.
— térmica, cociente, 255.
— —, coeficiente, 255.
Dinámica fluido, 1.
— — combustión, 543.
— —, ecuación campo gravitatorio, 579.
— —, — fundamental, 2.
— —, fluctuación, 607.
— gas, 355.
— relativista fluido, 575.
— — —, ecuaciones, 577.
— superfluidos, 587.
— —, ecuación, 591.
Discontinuidad compresión, 365.
— condensación, 570.
— condición inicial, 412.
— débil, 393, 394.
— inicial, 412.
—, intersección línea transición, 516.
— isoterma, 391, 392.
— onda sonora, 426.
—, superficie, 363.
— tangencial, 364.
— — débil, 396.
— —, inestabilidad, 128.
— —, superficie, 19, 128.
Dispersión onda, sección eficaz efectiva total, 339.
— sonido, 337.
Doppler, efecto, 298.

Ecuación adiabática, 5.
— Bernoulli, 11, 12.
— —, generalización relativista, 581.
— continuidad, 1, 3.
— — entropía, 5.
— — fluido incompresible, 23.
Ecuación Euler, 3, 4, 6.
— —, generalización relativista, 579.
— —-Tricomi, 499, 500.
— Fourier, 214.
— fundamental dinámica fluido, 2.
— Laplace, 23, 35.
— movimiento fluido viscoso, solución exacta, 90.
— Navier-Stokes, 56.
— onda, 48, 282.
— —, solución general, 310.
Efecto Doppler, 298.
Eigenvalues, 227.
Eikonal, 294.
Einstein, relación, 260.
Emulsión, absorción sonido, 343.
Emisión dipolar, 323.
— sonido, 319.
Energía activación, 543.
— cinética fluido incompresible, 60.
—, densidad flujo, 13.
—, disipación. Fluido incompresible, 60.
— fluido, variación con tiempo, 12.
— —, — por unidad tiempo, 13.
—, flujo, 12.
— onda sonora, 286.
— sonora total media, 287.
—, variación 12, 13.
Entalpía libre, 8.
— unidad masa, 13.
Entropía, 5.
—, densidad flujo, 5.
—, ecuación continuidad, 5.
— equilibrio, 9.
—, partícula fluido, 4.
Envergadura ala, 154.
Equilibrio, condición estabilidad, 9.
—, estabilidad, 9.
— mecánico, convección ausente, 9.
— — fluido, 7, 9.
— —, temperatura, 9.
— térmico fluido, 8.
Espectro continuo, 115.
— discreto, 115.
Estancamiento, punto, 24.
—, —. Presión, 24.
Estela laminar, 79.
— turbulenta, 152.
— —, anchura, 153, 156.
Estrofoide, 383.

Euler, constante, 76.
—, ecuación, 3, 4, 6.
—, —, fluido viscoso, 53.
—, —, generalización relativista, 579.
—-Tricomi, ecuación, 499, 500.
—-—, —, solución, 505.

Fenómeno separación, 146.
— superficial, 263.
Fluctuación dinámica fluido, 607.
— medio infinito, 611.
—, teoría general, 607.
Fluido campo gravitatorio, 4.
—, cantidad movimiento, 14.
—, conducción térmica, 207.
— cuántico, 587.
—, densidad, 1.
—, dinámica, 1.
—, — relativista, 575.
—, — —, ecuaciones, 577.
—, disipación energía, 4.
—, energía cinética, 36.
—, — total, 36.
—, —. Variación con tiempo, 12.
—, —. — por unidad tiempo, 13.
—, equilibrio mecánico, 7.
— — térmico, 8.
— ideal, 4.
— —, condición límite, 6.
— —, determinación estado. Magnitudes, 6.
— —, ecuación movimiento monodimensional, 6, 7.
— —, ley conservación energía, 207.
—, impulso, 14.
—, — total, 37.
— incompresible, 22.
— —, condiciones, 27.
— —, conducción térmica, 213.
— —, disipación energía, 59.
— —, ecuación Bernoulli,
— —, — continuidad, 23.
— —, — general, 22.
— —, energía cinética, 60.
— —, flujo energía, 23.
— —, — estacionario, ecuación Navier-Stokes, 71.
— —, — potencia, 23.
— —, onda, 49.
— inmiscible, superficie límite, 6.
—, masa total, 2.
—, mezcla, ecuación dinámica, 249.
Fluido móvil, calentamiento cuerpo, 237.
— —, descripción matemática, 1.
— —, determinación estado. Magnitudes, 6.
— movimiento, cuadritensor impulso energía, 575.
—, partícula, 1.
—, presión, 1.
—, punto, 1.
—, velocidad, 1.
— viscoso, 53.
— —, ecuación Euler, 53.
— —, — movimiento, 53, 55.
— —, — —. Condiciones límites, 56.
— —, — —. Solución exacta, 88.
— — incompresible, movimiento, 61.
— —, movimiento oscilante, 97.
— —, tensor densidad flujo impulso, 53.
—, volumen. Ecuación movimiento, 3, 4.
Flujo alrededor obstáculo cónico, 479.
— bidimensional, 25.
— — estacionario, característica, 496.
— canal convergente, 91.
— — divergente, 91.
— cónico, 482.
— cuerpo aerodinámico, 194.
— discontinuo, 19, 20.
— energía, 12.
— — fluido incompresible, 23.
— entre cilindros en rotación, 67.
— — dos planos, curva límite, 125.
— entropía, cuadrivector densidad, 584.
—, estabilidad, estudio matemático, 113.
— estacionario, 11.
— —, ecuación convección, 241.
— — entre cilindros en rotación, estabilidad, 119.
— —, estabilidad, 113.
— —, —, estudio matemático, 114.
— — gas, 358.
— — metaestable, 123.
— gas a través tobera, 397.
— — subsónico, 355.
— — supersónico, 355.
— —, velocidad crítica, 360.
— — viscoso, tubería, 401.
— gaseoso bidimensional, 483.
— — — estacionario, 492.
— — monodimensional, 397.
— — — arbitrario, 441.
— hipersónico, 540.

Flujo impulso, 14.
—, —. Tensor densidad, 16.
— incompresible, 22.
— irrotacional, 18.
— laminar, 118.
— —, coeficiente resistencia, 185.
— mixto, 499.
— no estacionario, 11.
— normal, 588.
— plano, 25.
— potencial, 18.
— —, ecuación Bernoulli, 22.
— — fluido incompresible, 23.
— —, fuerza arrastre, 34.
— — gas, 483.
— —, generalización relativista, 581.
— — parte superfluida, 589.
— — primera aproximación, 21.
— —, propiedades, 21.
— rápido, 454.
— rotacional, 18.
— semejante, 70.
— semejanza, 405.
— — monodimensional, movimiento, 404.
— subsónico rodea ala delgada, 531.
— superfluido, 588.
— supersónico alrededor ángulo, 473.
— —, formación onda choque, 523.
— — rodea ala, 534.
— — — cuerpo puntiagudo, 526.
— tranquilo, 454.
— transónico, 485, 499.
— —, potencial velocidades, 486.
— tubería, 61.
— —, estabilidad, 123.
— turbulento, 118.
— —, disipación energía, orden magnitud, 134.
— —, región, 145.
— — tubería, 184.
— velocidad sonido, 510.
Fonones, 589.
Fourier, componente, 285.
—, — magnitud fluctuante, 610.
—, ecuación, 214.
Frecuencia angular, 43.
— característica, 301.
— —, orden magnitud, 301.
—, circular, 43.
— degenerada, 274.
Frente llama, 544.
Froude, número, 70.
Fuerza arrastre, 38.
— —, crisis, 192.
— sustentación, 38, 81.
Función armónica esférica volumétrica, 273.
— corriente, 25.
— error, 224.
— Legendre asociada, 274.

Gas, dinámica, 355.
—, flujo estacionario, 358.
—, — potencial, 483.
—, — subsónico, 355.
—, — supersónico, 355.
— móvil, propagación perturbación, 355.
— perfecto, ecuación estado, 361.
— —, energía interna, 361.
— —, entalpía, 361.
— — entropía, 361.
— —, equilibrio, 11.
— —, onda choque, 377.
—, velocidad relativista, 582.
Gibbs, potencial, 8.
Grashof, número, 242.
Gravedad, onda, 41.
Green, fórmula, 2.

Hankel, función, 310.
Helio líquido, punto λ, 587.
Helio II, 587.
—, densidad normal, 592.
—, — real, 592.
—, — superfluida, 592.
—, efecto termomecánico, 590.
—, entropía, 589.
—, parte normal, 588.
—, — superfluida, 588.
Hidrostática, 7.
Hodógrafa, plano, 492.
—, transformación, 492.
— velocidad, 462.
Hugoniot, adiabática, 367.

Ignición mezcla gaseosa, 551.
Impulso, cantidad, 15.
—-energía, tensor, 575.
— fluido, 14.
—, flujo, 14.
—, —. Tensor densidad, 16.
— onda sonora, 286.
— total onda sonora, 289.

Invariante Riemann, 437.
Isoentrópico, movimiento, 5.

Jouguet, punto, 553.
Joukowski, teorema, 154, 156.

Kelvin, teorema, 17.
Kolmogorov, ley, 136.

Lagrangiana, variable, 6.
Laplace, ecuación, 23, 35.
—, fórmula, 263, 264.
Laval, tovera, 399.
Legendre asociada, función, 274.
Ley semejanza, 68.
— — hipersónica, 540.
— — transferencia térmica, 228.
— — transónica, 537.
Línea característica, 357.
— corriente, 11.
— —, ecuación Bernoulli, 12.
— límite, 494.
— separación, 146.
— transición, intersección discontinuidad, 516.
Longitud mezcla, 151.
Loytsianski, ley, 160.

Llama, 544.
—, autoturbulencia, 546, 547.
—, frente, 544.
—, velocidad normal, 545.

Mach, ángulo, 356.
—, número, 193, 356.
—, — crítico, 510.
—, superficie, 357.
Magnitud aleatoria, 608.
— fluctuante, componente Fourier, 610.
— —, ecuación movimiento, 607.
Masa virtual, 40.
Materia, conservasión, 2.
Medio móvil, propagación sonido, 297.
Mezcla fluido, conservación energía, 252.
— —, ecuación continuidad, 249.
— —, — dinámica, 249.
— —, — Navier-Stokes, 250.
— —, flujo energía total, 252.
— —, velocidad, 250.
— gaseosa, ignición, 551.
Movimiento browniano, 258.

Navier-Stokes, ecuación, 56.
Newton, constante gravitación, 9.
Niebla, 570.
Nodo, 303.
Número Froude, 70.
— Grashof, 242.
— Mach, 193, 356.
— — crítico, 510.
— Nusselt, 231.
— Péclet, 230.
— Prandtl, 230.
— onda, 43.
— Reynolds, 69.
— Strouhal, 71.
Nusselt, número, 231.

Obukhov, ley, 136.
Onda, amplitud, 284.
—, arrastre, 527.
— capilaridad, 271, 272.
— cilíndrica, 307.
—, coeficiente amortiguamiento, 110.
—, componente Fourier, 285.
—, — monocromático, 285.
— choque, 355, 365.
— —, colisión, 467.
— — débil, 369.
— — entropía, 381.
— —, espesor, 386, 389.
— —, formación en flujo supersónico, 523.
— —, frente, 366.
— — intensa, propagación, 449.
— —, intersección, 464.
— —, — superficie sólida, 469.
— — gas perfecto, 377.
— —, parte trasera, 366.
— —, sentido variación magnitud, 372.
— —, velocidad crítica, 379.
— detonación, 551.
— —, propagación, 559.
— directa, 314.
— dispersada, potencial, 338.
—, ecuación, 48, 282.
— entropía, 381.
— esférica, 304.
— —, reflexión, 314.
— estacionaria, 303.
— fluido incompresible, 49.
—, frecuencia, 43.
— — angular, 43.
—, — circular, 43.

Onda gravedad, 41, 272.
— —, amortiguamiento, 108.
— —, coeficiente amortiguamiento, 110.
— —, disipación energía, 109.
— —, energía mecánica, 109.
— —, flujo fluido muy viscoso, 110.
— — larga, 47.
— —, relación número onda y frecuencia, 43.
— —, velocidad propagación, 44.
— larga, 47.
— —, propagación, 47..
— lateral, 314, 315.
— —, potencial, 319.
— longitudinal, 283.
— monocromática, 284.
— monodimensional no estacionaria, dinámica relativista, 580.
— móvil, 302, 419.
— — monodimensional, 419.
—, perfil, 419.
— plana, 50, 282.
— — móvil, 283.
— — —, velocidad, 283.
— proa, 523.
—, profundidad penetración, 99.
— rarefacción, 457, 460.
— — no estacionaria, 407.
— reflejada, 291.
— refractada, 291.
—, resistencia, 527.
— simple, 421, 488.
— — centrada, 488.
— — estacionaria, 486.
— — semejanza centrada, 434.
— sonora, 281.
— —, descripción, 282.
— —, ecuación Euler, 281.
— —, energía, 286.
— —, impulso, 286.
— —, — total, 289.
— —, formación discontinuidad, 426.
— —, reflexión, 291.
— —, refracción, 291.
— térmica, 227.
— transversal, 50, 98.
—, vector, 50, 284.
—, velocidad grupo, 297.
Oseen, ecuación, 76.

Paquete onda, 289.
Parte superfluida, 588.
Parte superfluida, flujo potencial, 589.
Partícula, difusión fluido, 259.
— esférica, coeficiente difusión, 260.
— fluido, 1.
— —, entropía, 4, 5.
— suspendida, movilidad, 259.
Pascal, principio, 575.
Péclet, número, 230.
Película adsorbida, influencia movimiento líquido, 276.
Perturbación, coeficiente amplificación, 130.
—, propagación gas móvil, 355.
Placa rugosa, coeficiente arrastre, 190.
Plano físico, 492.
— hodógrafa, 492.
Poiseuille, fórmula, 64.
Poisson, fórmula, 311.
Polar choque, ecuación, 383.
Potencial complejo, 26.
— gravitatorio newtoniano, 9.
— químico relativista, 584.
— termodinámico por unidad masa, 8.
— velocidad, 22, 23.
Prandtl, número, 230.
—, teoría capa límite, 88.
Presión campo gravitatorio, 8.
—, coeficiente, 536.
— equilibrio, 9.
— fluido, 1.
— punto estancamiento, 24.
— superficial, 263.
Primer sonido, 602.
Principio simetría coeficiente cinético, 253.
Proceso disipativo, ecuación relativista, 583.
Punto estancamiento, 24.
— —, presión, 24.
— fluido, 1.
— Jouguet, 553.

Rayo sonoro, ecuación, 299, 300.
— —, principio Fermat, 301.
Reciprocidad, principio, 330, 332.
Reflexión, coeficiente, 292.
— onda sonora, 291.
— regular, 472.
Refracción onda sonora, 291.
Región flujo turbulento, 145.
— turbulenta, 145.
— — chorro, caudal, 150.
— —, forma, 147.
Remolino, 131.

Remolino, disipación energía, 133, 134.
—, escala, 131.
—, tamaño, 131.
Resistencia, crisis, 190.
— onda, 38, 527.
Resolución espectral, 285.
Resonador, 303.
Reynolds, número, 69.
—, — crítico, 114.
Riemann, invariante, 437.

Salto agua, 454.
— hidráulico, 454.
Schwarz-Christoffel, fórmula, 34.
Sección eficaz efectiva, 339.
Segunda viscosidad, 348.
Segundo sonido, 602.
Semejanza hipersónica, ley, 540.
—, ley, 68, 70.
— transónica, ley, 537.
Separación capa límite, 170.
— flujo, fenómeno, 146.
— —, línea, 146.
Sonido, 281.
—, absorción, 341.
—, cuanto, 589.
—, dispersión, 337.
—, emisión, 319.
—, intensidad, 322.
—, primero, 602.
—, propagación medio móvil, 297.
—, — en superfluido, 599.
—, — tubo, 333.
—, — —, ecuación, 334.
—, segundo, 602.
—, velocidad, 283.
—, — local, 357.
Stokes, fórmula, 17, 71, 74.
—, teorema, 18.
Strouhal, número, 71.
«Subcapa laminar», 182.
— viscosa, 182.
Sufijo mudo, 14.
Superficie característica, 357.
— contacto, ángulo separación, 267.
— discontinuidad, 363.
— —, intersección, 457.
— — tangencial, 19.
— Mach, 357.
— sónica, 499.
— —, solución ecuación Euler-Tricomi, 505.
Superficie transicional, 499.
Superfluidez, 587.
Superfluido, dinámica, 587.
—, ecuación dinámica, 591.
—, propagación sonido, 599.
—, teoría, 587.
Suspensión, viscosidad, 85.
—, viscosidad efectiva, 86, 87.
Sustancia, ecuación estado ultrarrelativista, 579.
Sustentación, coeficiente, 196.
—, fuerza, 38, 81.

Temperatura campo gravitatorio, 8.
—, ley igualación, 228.
Tensión superficial, coeficiente, 263.
Tensor densidad flujo impulso, 16.
— — — —, fluido viscoso, 53.
— impulso-energía, 575.
— masas asociadas, 37.
— tensiones, 54.
— — viscosidad, 54.
Teorema Kelvin, 17.
— Stokes, 18.
Termomecánico, efecto, 590.
Tiempo relajación conductividad térmica, 219.
Tobera, 397.
— Laval, 399.
Torbellino turbulento, 131.
Transferencia calor, ecuación general, 207.
— masa, coeficiente, 255.
— térmica capa límite, 232.
— — — — laminar, 233.
— — — — turbulenta, 233.
— —, coeficiente, 230.
— —, ecuación general, 209.
— —, ley semejanza, 228.
Tubería, caudal, 64, 65.
—, coeficiente resistencia, 185.
—, estabilidad flujo, 123.
—, flujo, 61.
—, — turbulento, 184.
—, ley resistencia, 185.
Tubo estrecho, 333.
—, propagación sonido, 333.
—, — —, ecuación, 334.
Turbulencia, 113.
—, escala externa, 137.
—, — interna, 137.
—, establecimiento, 115.

Turbulencia, fenómeno separación, 144.
—, isótropa, 135, 158.
— —, disminución, 161.
— local, 134.
— —, correlación velocidades, 138.
— totalmente desarrollada, 130.
—, región, 144.

Unidad masa fluido, energía potencial, 8.

Valor propio conducción térmica, 227.
Variable lagrangiana, 6.
Vector onda, 50, 284.
Velocidad, circulación, 16.
— compleja, 26.
—, correlación, 138.
—, — triple, 141.
— crítica flujo gas, 360.
— fase onda, 297.
— fluido, 1.
— grupo onda, 297.
—, hodógrafa, 462.
Velocidad, ley relativista adición, 582.
— local sonido, 357.
—, parte fluctuante, 131.
—, perfil logarítmico, 180, 183.
—, potencial, 22, 23.
— sonido, 283.
— — relativista, 579.
Vibración característica, 301.
— forzada, 301.
— libre, 301.
Vientre, 303.
Viscosidad, 4, 53.
— cinemática, 56.
—, coeficiente, 55.
— dinámica, 56.
— efectiva suspensión, 86, 87.
— evanescente, teoría, 88.
— suspensión, 85.
—, tensor tensiones, 54.
Vorticidad, 18.

Zhukovskii, fórmula, 196.
Zona combustión, 544.